Universidade do Algarve

Engenharia do Ambiente

ANÁLISE MATEMÁTICA III

Professor Stefan Samko

PROGRAMA

I. CÁLCULO INTEGRAL DE FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS

1. Volume de um corpo cilíndrico e noção de integral duplo
2. Propriedades de integrais duplos
3. Cálculo dos integrais duplos. Integrais repetidos
4. Mudança de variáveis em integral duplo
5. Cálculo de áreas por meio de integrais duplos
6. Cálculo de volumes por meio de integrais duplos
7. Integrais curvilíneos (integrais de linha)
   - 7.1. Integrais curvilíneos da 1^a espécie
   - 7.2. Integrais curvilíneos da 2^a espécie
   - 7.3. Integrais curvilíneos da 2^a espécie no caso de uma curva fechada
8. Fórmula de Green
9. Cálculo de áreas por meio de integrais curvilíneos
10. A condição de independência do integral curvilíneo, de caminho de integração
11. Integral curvilíneo do diferencial total
12. Integrais de superfície
    - 12.1 Integral de superfície da 1^a espécie
    - 12.2. Cálculo dos integrais de superfície da 1^a espécie
    - 12.3. Integral de superfície da 2^a espécie
13. Observação sobre integrais triplos

II. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

1. Noção de equação diferencial e exemplos
2. Equações diferenciais de ordem 1.
3. Equações resolúveis em forma explícita ou implícita
   - 3.1. Equações com variáveis separáveis
   - 3.2. Equações homogéneas
   - 3.3. Equações lineares de ordem 1
   - 3.4. Equações exactas (ou equações com o diferencial total)

4. O teorema geral sobre existência e unicidade da solução

5. Equações lineares de ordem 2

4.1. Noção de uma combinação linear das soluções . Estrutura da solução geral da equação linear homogénea de ordem 2

4.2. Estrutura da solução geral da equação linear não homogénea de ordem 2

5. O método de resolução das equações lineares com coeficientes constantes

5.1. Resolução da equação linear homogénea

5.2. Resolução da equação linear não homogénea

I. CÁLCULO INTEGRAL DE FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS

O nosso primeiro objectivo nessa disciplina de Análise III é generalizar a noção do integral definido de Riemann, conhecido para funções de uma variável, para funções de várias variáveis. Nos estudaremos o caso de duas variáveis.

Primeiramente, nos vamos considerar o problema práctica que nos leva à noção do integral definido de funções de duas variáveis, chamado também o integral duplo.

1. Volume de um corpo cilíndrico e noção de integral duplo

Relembramos que no caso de funções $y = f(x)$ de uma variável, a área do trapézio curvilineo, limitado de cima pela curva $y = f(x)$, de baixo pelo eixo dos x e de lados pelas rectas verticais $x = a$ e $x = b$, levou a noção do integral definiido

$$\textbf{Área} = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Agora pretendemos introduzir a noção do integral duplo de uma função $z = f(x, y)$ de duas variáveis.

Seja D o domínio da função $f(x, y)$ de duas variáveis. Suponhamos que a função $f(x, y)$ é contínua e não negativa. O gráfico dela é uma superfície sobre o domínio D. Essa superfície sobre o domínio D limita o certo corpo cilíndrico. Esse corpo é limitado pela superfície própria $z = f(x, y)$ de cima, pelo domínio D no plano Oxy e pela superfície lateral cilíndrica. Tal corpo chama-se *cilindróide*. Assim a definição do que é cilindróide, é a seguinte.

DEFINIÇÃO. ***Cilindróide*** *ou* ***corpo cilíndrico*** *é um corpo limitado pelas tres superfícies:*

1) o plano $z = 0$ de baixo;
2) a superfície $z = f(x, y)$ de cima;
3) a superfície cilíndrica vertical.

Seja V o volume desse corpo.

Problema. Calcular esse volume V.
O problema levará a noção do integral duplo.

Para resolver o problema, vamos usar a abordagem típica para o cálculo integral, nomeadamente a ideia de partição do domínio D em partes pequenas. Assim, partimos D em partes pequenas, de modo arbitrário. Designamos a cada parte pequena pelo D_i, assim que

$$D = \bigcup_{i=1}^{N} D_i.$$

Sobre cada parte pequena temos a parte correspondente pequena da nossa superfície, que limita um certo corpo cilíndrico fino. Designamos o volume desse corpo cilíndrico fino pelo V_i. Então todo o volume V é igual a

$$V = \sum_{i=1}^{N} V_i \ .$$

A ideia principal é baseada no facto que o volume desse corpo cilíndrico fino pode ser calculado aproximadamente, como o corpo de cilindro com a base D_i e uma certa altura. Para obter essa altura, escolhemos um ponto arbitrário

$$(\xi_i, \eta_i) \subset D_i$$

dentro de D_i. A altura desse corpo cilíndrico fino nesse ponto é igual a $f(\xi_i, \eta_i)$. Portanto, o volume desse corpo cilíndrico fino pode ser calculado aproximadamente como

$$V_i = f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta A_i,$$

onde

$$\Delta A_i \;\; = \;\; \text{Área de } D_i.$$

Então o valor do volume total é igual aproximadamente a

$$V \;\; \approx \;\; \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i, \eta_i) \Delta A_i.$$

Para aumentar a precisão desse cálculo, é necessário aumentar o número N das partes pequenas, e ainda mais, diminuir cada parte pequena D_i. No limite, quando o diámetro máximo d das todas partes pequenas tende para zero, obteremos

$$V \;\; = \;\; \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i, \eta_i) \Delta A_i. \tag{1}$$

Relembramos que o diametro d_i de uma parte D_i é

$$d_i = \sup_{P,Q \in D_i} \operatorname{dist}(P, Q),$$

isto é, d_i é a maior distância entre os pontos do conjunto fechado $\overline{D_i}$. Então o valor máximo d usado acima é $\displaystyle d = \max_{i=1,\ldots,N} d_i.$

O limite do tipo (1) chama-se *integral duplo* sobre a região D. Designa-se como

$$V = \int \int_D f(x, y) dx dy \ .$$

Sublinhamos que esta noção nova apareceu no problema de cálculo de volumes e foi suposto que a função $f(x,y)$ é contínua e não negativa. Essa última suposição foi introduzida para simplicidade, só para dar explicação geométrica dessa noção . Mas a noção do integral duplo pode ser introduzido para funções de qualquer sinal e não obrigatoriarmente contínuas. Portanto, vamos repetir a definição do que é o integral duplo, na situação mais geral e com mais rigor.

Seja $f(x,y)$ uma função arbitrária definida na região D no plano das variáveis x e y. Seja

$$\mathbb{P} = \{D_i\}_{i=1}^N$$

qualquer partição da região D em partes pequenas D_i. Designamos

$$\Delta A_i = \text{ Área de } D_i.$$

Seja $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$ um ponto dentro de cada parte pequena D_i, escolhido de maneira arbitrária. A soma

$$\sum_{i=1}^N f(\xi_i, \eta_i) \Delta A_i$$

diz-se ***a soma integral.***

Introdizimos ainda a designação

$$d = \max\{\text{ diam } D_i\} \; - \; \text{o maior dos diámetros das partes pequenas } D_i \; .$$

DEFINIÇÃO. *Suponhamos que o limite das somas integrais existe desde que $d \to 0$, e não depende da escolha de partição $\mathbb{P}$ e da escolha dos pontos (ξ_i, η_i). Então esse limite diz-se o integral duplo sobre a região D e designa-se de tal modo:*

$$\int\int_D f(x,y)dxdy \;=\; \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^N f(\xi_i, \eta_i) \Delta A_i.$$

A região D diz-se o *domínio de integração* ou *região de integração* .

Se o integral duplo da função $f(x,y)$ sobre a região D existe, a função $f(x,y)$ diz-se *integrável* nessa região.

É possível demonstrar que esse limite realmente existe se a função $f(x,y)$ é contínua na região fechada D_i, isto é, na região incluindo a sua fronteira. É possível demonstrar ainda que cada função integrável é obrigatoriarmente limitada. Mas nem cada função limitada pode ser integrável.

2. Propriedades de integrais duplos

PROPRIEDADE 1. *Seja $f(x,y)$ uma função contínua na região fechada $\overline{D}$. Então ela é integrável, isto é, o integral $\int\int_D f(x,y)dxdy$ existe.*

PROPRIEDADE 2. *Se a função $f(x,y)$ é integrável, ela é limitada.*

PROPRIEDADE 3. *Se existem os integrais duplos das funções $f(x,y)$ e $g(x,y)$ sobre uma região D, então existe também o integral duplo da soma e*

$$\int\int_D [f(x,y)+g(x,y)]dxdy \;=\; \int\int_D f(x,y)dxdy \;+\; \int\int_D g(x,y)dxdy\ .$$

PROPRIEDADE 4. *O factor constante pode-se separar fora do sinal de integração :*

$$\int\int_D Cf(x,y)dxdy \;=\; C\int\int_D f(x,y)dxdy\ .$$

PROPRIEDADE 5. *Seja $f(x,y)$ uma função integrável no domínio D. Se esse domínio é formado de duas partes D_1 e D_2, sem ponto interior comum, então*

$$\int\int_D f(x,y)dxdy \;=\; \int\int_{D_1} f(x,y)dxdy \;+\; \int\int_{D_2} f(x,y)dxdy\ .$$

PROPRIEDADE 6. *Se $f(x,y)\equiv 1$, então*

$$\int\int_D 1\,dxdy \;=\; \text{área da região } D\ .$$

Demonstração . Realmente,

$$\int\int_D 1\,dxdy \;=\; \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{N} 1\cdot\text{área da região } D_i = \text{área da região } D.$$

PROPRIEDADE 7. *Seja $f(x,y)$ é uma função integrável. Então, a função $|f(x,y)|$ é integrável também e*

$$\left|\int\int_D f(x,y)dxdy\right| \le \int\int_D |f(x,y)|dxdy\ .$$

PROPRIEDADE 8. (**Teorema do Valor Médio**) *Seja $f(x,y)$ é uma função contínua na região fechada $\overline{D}$. Então existe um ponto $(\xi,\eta)\in D$ tal que*

$$\int\int_D f(x,y)dxdy \;=\; f(\xi,\eta)A_D,$$

onde A_D é a área da região D.

3. Cálculo dos integrais duplos. Integrais repetidos

Vamos considerar o caso particular importante quando a região D é um rectangulo no plano com lados paralelos aos eixos de x e y:

$$D=\{(x,y):\ a<x<b,\ c<y<d\}\ .$$

Nesse caso podemos introduzir, de maneira natural, o integral repetido

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)dx = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx \right) dy,$$

onde integramos a nossa função , primeiro em variável x, com y fixo, e obtemos o resultado

$$F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$$

que depende só de y, e depois finalmente integramos, em variável y, o resultado dessa primera integração .

Tal integral obtido diz-se *integral repetido*. É possível considerar também o integral repetido semelhante em ordem contrária:

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy \right) dx.$$

PERGUNTA. Que é a relação desses integrais repetidos com o integral duplo sobre o rectângulo?

RESPOSTA é dada pelo teorema seguinte.

TEOREMA. *Seja $f(x,y)$ uma função contínua no rectângulo fechado. Então o integral duplo e integrais repetidos sobre o rectângulo são iguais*:

$$\int\int_D f(x,y)dxdy \ = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy.$$

S e m d e m o n s t r a ç ã o

Agora vamos passar aos integrais repetidos no caso de domínio arbitrário D. Suponhamos que a região D tem a forma de quasi rectângulo, isto é, tem lados verticais rectilíneas, mas as fronteiras de cima e de baixo são curvilíneas. Sejam

$$y = \varphi(x) \quad \text{e} \quad y = \psi(x)$$

equações dessas fronteiras.

Nesse caso podemos introduzir o integral repetido da forma

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x,y)dy.$$

É possível também tratar o caso semelhante quando a região D tem lados horisontais rectilíneos e as fronteiras de lados curvilíneas. Sejam

$$x = g(y) \quad \text{e} \quad x = h(y)$$

as equações dessa fronteiras "de lado". Então o integral repetido sobre tal região pode ser introduzido como

$$\int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)dx.$$

TEOREMA. *Seja D uma região de tipo acima mencionado e $f(x,y)$ uma função contínua na região fechada. Então o integral duplo coincide com o integral repetido correspondente.*

Assim, o teorema permite reduzir o cálculo dos integrais duplos ao cálculo dos integrais repetidos. O cálculo dos integrais repetidos já é uma tarefa bem resolúvel, visto que é cálculo dos integrais ordinários, bem familiar da disciplina de Análise Matemática II.

Observação . No caso de regiões mais complicadas, antes de passar de integral duplo ao integral repetido, é necessário partir a região em partes mais simples, da natureza anterior, e depois, usando a Propriedade 3, passar aos integrais repetidos em cada parte mais simples.

Vamos considerar exemplos.

EXEMPLO 1. *Calcular o integral duplo*

$$\int\int_D (4 - x^2 - y^2)dxdy$$

sobre o rectângulo D limitado pelas rectas:

$$x = 0,\ x = 1, \quad y = 0,\ y = 3.$$

Passando ao integral repetido, temos

$$\int\int_D (4 - x^2 - y^2)dxdy = \int_0^3 \left(\int_0^1 (4 - x^2 - y^2)dx \right) dy =$$

$$= \int_0^3 \left(4x - \frac{x^3}{3} - xy^2 \right) \Bigg|_0^1 dy = \int_0^3 \left(1 - \frac{1}{3} - y^2 \right) dy = 2.$$

EXEMPLO 2. *Calcular o integral duplo*

$$\int\int_D (1 + x + y)dxdy$$

onde o domínio D é limitado pelas curvas

$$y = -x, \quad x = \sqrt{y}, \quad y = 2.$$

Temos

$$\int\int_D (1+x+y)dxdy = \int_0^2 dy \int\limits_{-y}^{\sqrt{y}} (1+x+y)dx = \int\limits_0^2 \left(x + \frac{x^2}{2} + xy\right)\Bigg|_{-y}^{\sqrt{y}} dy.$$

Depois de cálculo bem familiar obtemos

$$\int\int_D (1+x+y)dxdy = \frac{44}{15}\sqrt{2} + \frac{13}{3} \ .$$

EXEMPLO 3. *Calcular o integral duplo*

$$\int\int_D e^{\frac{y}{x}} dxdy \ ,$$

onde o domínio D é o triângulo limitado pelas rectas

$$y = x, \quad y = 0, \quad x = 1.$$

Temos

$$\int\int_D e^{\frac{y}{x}} dxdy \ = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x e^{\frac{y}{x}} dy = \int\limits_0^1 x\left(e^{\frac{y}{x}}\right)\Bigg|_0^x dx = \int\limits_0^1 x(e-1)dx = \frac{e-1}{2} \ .$$

EXEMPLO 4. *Calcular o integral duplo*

$$\int\int_D (x^2+y)dxdy \ ,$$

onde o domínio D é limitado pelas curvas

$$y = x^2, \quad y = \sqrt{x} \ .$$

Temos

$$\int\int_D (x^2+y)dxdy \ = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2+y)dy$$

etc

EXEMPLO 5. *Calcular o integral duplo*

$$\int\int_D (x-y)dxdy \ ,$$

onde o paralelogramo D é limitado pelas rectas

$$y = x, \quad y = x+1, \quad y = 1, \quad y = 3.$$

4. Mudança de variáveis em integral duplo

Relembramos que mudança de variável foi usada frequentemente em integrais ordinários de funções de uma variável:

$$\int_a^b f(x)dx \; = \; \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt, \qquad x = \varphi(t), \tag{1}$$

onde α e β são limites para a variável nova t.

A semelhança para os integrais duplos pode ser feita mudança de variáveis com objectivo de facilitar o cálculo do integral. Neste caso é necessário fazer mudança de duas variáveis simultaneamente, em geral:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v)$$

com as novas variáveis u e v. Esperamos que deve ser válida a fórmula

$$\int\int_D f(x, y)dxdy \; = \; \int\int_{D_1} f[\varphi(u, v), \psi(u, v)] \; \boxed{\;????\;} \; dudv \tag{2}$$

onde D_1 deve ser uma nova região no plano, percorrida pelo ponto (u, v). No caso de integrais ordinários, isto é, na fórmula (1) no lugar de $\boxed{\;????\;}$ foi escrita a derivada $\varphi'(t)$, Assim, no nosso caso de duas variáveis surgem as duas perguntas:

1) o que deve ser escrito em vez de $\boxed{\;????\;}$ na fórmula (2), e

2) como determinar a região nova D_1?

Consideramos a nossa mudança de variáveis:

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v), \\ y = \psi(u, v) \end{cases} \tag{3}$$

Essa mudança gera uma aplicação de uma certa região no plano dos pontos (u, v) à uma região no plano dos pontos (x, y). Suponhamos que as funções $\varphi(u, v)$ e $\psi(u, v)$ são contínuas e unívocas. Assim aplicação é unívoca. Isso significa que a cada ponto (u, v) corresponde um ponto único (x, y). Suponhamos também que essa aplicação é biunívoca, isto é, reciprocamente, para cada ponto (x, y) existe um ponto único (x, y) tal que $\begin{cases} x = \varphi(u, v), \\ y = \psi(u, v) \end{cases}$.

O conjunto de todos os tais pontos (u, v) que correspondem aos pontos (x, y) quando (x, y) percorre a região D, ***designnamos pelo*** D_1. Assim,

$$\boxed{\;(u, v) \in D_1\;} \iff \boxed{\;(x, y) \in D\;}$$

com $\begin{cases} x = \varphi(u, v), \\ y = \psi(u, v) \end{cases}$.

O domínio D diz-se a ***imagem*** do domínio D_1 na aplicação (3). Ainda dizem que o domínio D_1 é a ***preimagem*** do domínio D na aplicação (3). Ainda, em termos de aplicação inversa, é possível dizer que o domínio D_1 é ***imagem*** do domínio D na aplicação inversa a (3).

Pergunta. Dada uma região D e as funções $\varphi(u, v)$ e $\psi(u, v)$ de mudança (3), como é possível determinar a região D_1 correspondente?

A regra geral é a seguinte. Seja Γ a fronteira da região dada D no plano dos pontos (x, y). Temos de estudar o que acontece com essa fronteira Γ com a mudança de variáveis. Seja Γ_1 a imagem dessa fronteira Γ no plano dos pontos (u, v).

Se determinarmos essa imagem Γ_1, isto vai ser quasi a solução do problema. Realmente, se já sabemos a imagem Γ_1 da fronteira Γ, então a região D_1 procurada pode estar ou interior ou exterior da nova fronteira Γ_1. Para verificar o que temos na realidade, basta escolher algum único ponto para verificação .

Vamos considerar um exemplo.

Exemplo. *O domínio D é o triângulo limitado pelas rectas*

$$x = 0, \quad y = 0, \quad x + y = 2.$$

A mudança de variáveis é dada pelas fórmulas

$$\begin{cases} x = u + v, \\ y = u - v \end{cases} \tag{4}$$

temos de determinar o domínio D_1 com essa mudança de variáveis.

De acordo com a regra acima dita examinamos a aplicação (4) só na fronteira da região dada D:

1) $x = 0 \iff u + v = 0,$ i.e. $v = -u;$
2) $y = 0 \iff u - v = 0,$ i.e. $v = u;$
3) $x + y = 2 \iff 2u = 2,$ i.e. $u = 1.$

As rectas novas obtidas

$$v = -u, \quad v = u, \quad u = 2$$

são as fronteiras do novo triângulo. Assim o triângulo inicial passa ou no interior desse novo triângulo, ou no exterior. Para verificar isso, escolhemos um ponto concreto

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

dentro do triângulo inicial D. Neste caso obtemos o ponto

$$(u_0, v_0) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

o que pertence ao interior do novo triângulo. Assim um dos pontos interiores do triângulo D passa ao interior do triângulo novo. Então todos os pontos interiores do D passam ao interior do triângulo novo. Isto significa que a região procurada D_1 é esse triângulo novo.

Assim, ja sabemos, como é possível determinar a região D_1 - via investigação de imagem da fronteira.

Falta dar a resposta à outra pergunta: o que deve ser escrito em vez de $\boxed{\text{????}}$ na fórmula (2)? A resposta é dada no teorema seguinte.

TEOREMA. *Sejam $\varphi(u,v)$ e $\psi(u,v)$ umas funções definidas em região D_1. Suponhamos que elas são contínuas e têm derivadas parciais contínuas em D_1. Então, mudança de variáveis num integral duplo pode ser realizada pela fórmula*

$$\boxed{\int\int_D f(x,y)dxdy \;=\; \int\int_{D_1} f[\varphi(u,v),\psi(u,v)]\cdot|J(u,v)|\; dudv}$$

onde D_1 é a imagem da região D e

$$J(u,v) = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix}$$

é o Jacobiano das funções $\varphi(u,v)$ e $\psi(u,v)$.

Vamos considerar o caso especial, quando a mudança de variáveis consiste de passagem aos coordenades polares:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\,\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

onde $r > 0$ e habitualmente $0 \leq \theta < 2\pi$. (Nesta vez, em vez de (u,v) temos (r,θ)).

Neste caso,

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta, \qquad \frac{\partial x}{\partial\theta} = -r\,\operatorname{sen}\theta,$$
$$\frac{\partial y}{\partial r} = \operatorname{sen}\theta, \qquad \frac{\partial y}{\partial\theta} = r\cos\theta\;.$$

Portanto o Jacobiano correspondente é igual a

$$J(r,\theta) = \frac{D(x,y)}{D(r,\theta)} = r.$$

Conclusão. *A fórmula de passagem aos coordenades polares em integral duplo tem a forma*

$$\boxed{\int\int_D f(x,y)dxdy \;=\; \int\int_{D_1} f(r\cos\theta, r\,\operatorname{sen}\theta)r\; drd\theta\;.}$$

Exemplo 1. *Determinar o integral duplo*

$$\int\int_D \sqrt{9-x^2-y^2}\,dxdy$$

sobre o anel

$$D = \{(x,y): \ 1 < x^2+y^2 < 4 \ \} \ .$$

Com passagem aos coordenades polares, é claro que

$$\boxed{1 < x^2+y^2 < 4} \iff \boxed{\begin{array}{l} 1 < r < 2 \\ 0 \le \theta < 2\pi \ . \end{array}}$$

Assim a nova região D_1 é descrita pelas condições $1 < r < 2, \ 0 \le \theta < 2\pi$. Portanto,

$$\int\int_D \sqrt{9-x^2-y^2}\,dxdy = \int\int_{D_1} r\sqrt{9-r^2}\,drd\theta \ =$$

$$= \int_1^2 r\sqrt{9-r^2}\,dr \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \int_1^2 r\sqrt{9-r^2}\,dr \ .$$

O último integral calcula-se facilmente por meio de mudança de variável $r^2 = t$ e nos chegamos ao resultado $\frac{2\pi}{3}\left[16\sqrt{2} - 5\sqrt{5}\right]$ depois de cálculo simples.

Exemplo 2. *Determinar o integral duplo*

$$\int\int_D (x+y)\,dxdy$$

sobre o domínio D limitado pela curva

$$x^2+y^2+1 = 2(x+y) \ .$$

A curva dada é circunferência de raio 1 centrada no ponto $(1,1)$ visto que a sua equção tem a forma

$$(x-1)^2+(y-1)^2 = 1 \ .$$

É claro que a mundança conveniente de variáveis é

$$\begin{cases} x-1 = r\cos\theta \\ y-1 = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

Com essa mudança temos

$$0 < r < 1, \quad 0 \le \theta < 2\pi \ .$$

Portanto,

$$\int\int_D (x+y)\,dxdy = \int_0^1 rdr \int_0^{2\pi} (2 + r\cos\theta + \ r\mathrm{sen}\,\theta)d\theta = 4\pi \int_0^1 r\,dr = 2\pi \ .$$

5. Cálculo de áreas por meio de integrais duplos

Já sabemos da Propriedade 6 dos integrais duplos que a área de qualquer figura no plano é igual a

$$\boxed{\text{Área da região } D \;=\; \int\int_D dxdy.}$$

Assim, o cálculo da área de qualquer figura D reduze-se ao cálculo do integral duplo $\int\int_D dxdy$ sobre essa figura D.

Exemplo 1. *Determinar a área da figura limitada pelas curvas*

$$xy \;=\; 4, \qquad x+y \;=\; 5\;.$$

É fácil determinar que os pontos de intersecção da hipérbola $y = \frac{4}{x}$ com a recta $y = 5 - x$ são os pontos

$$(1,4) \quad \text{e} \quad (4,1).$$

Portanto obtemos

$$A = \int\int_D dxdy \;=\; \int_1^4 dx \int_{\frac{4}{x}}^{5-x} dy = \int_1^4 \left(5 - x - \frac{4}{x}\right) dx$$

$$= \left(5x - \frac{x^2}{2} - 4\ln x\right)\Bigg|_1^4 = 7,5 - 4\ln 4\;.$$

Exemplo 2. *Determinar a área da figura limitada pelas parábolas*

$$y^2 \;=\; 2x+1, \qquad y^2 \;=\; 4-4x\;.$$

É fácil calcular que os pontos de intersecção dessas parábolas são

$$\left(\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right) \quad \text{e} \quad \left(\frac{1}{2}, -\sqrt{2}\right)\;.$$

Passamos ao integral repetido, integrando primeiramente em x e depois em y. Obtemos

$$A = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int_{\frac{y^2-1}{2}}^{1-\frac{y^2}{4}} dx = 2\int_0^{\sqrt{2}} \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{4}y^2\right) dy = 2\sqrt{2}\;.$$

6. Cálculo de volumes por meio de integrais duplos

Por meio de integras duplos é possível calcular volumes de *cilindróides*

Seja D a região no plano dos x e y que é a base do cilindróide. Então, como foi mostrado na introdução do integral duplo, o volume do cilindróide calcula-se pela fórmula

$$\boxed{V = \int\int_D f(x,y)dxdy\ .}$$

supondo que $f(x,y)$ é uma função não negativa.

EXEMPLO. *Determinar o volume do corpo cilíndrico limitado pelas superfícies*

$$z = 0, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad x + y = 1, \quad z = x + y + 1\ .$$

A base D desse corpo no plano dos x e y é o triângulo limitado pelas rectas $x = 0$, $y = 0$ e $x + y = 1$. A superfície que limita o corpo de cima, é $z = x + y + 1$. Assim

$$V = \int\int_D (x+y+1)dxdy \ = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x+y+1)dy \ = \int_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2} + y \right) \Bigg|_{y=0}^{y=1-x} dx\ .$$

Depois de cálculo bem familiar obtemos $V = \frac{5}{6}$.

7. Integrais curvilíneos (integrais de linha)

7.1. Integrais curvilíneos da 1^a especie

Seja L uma curva no plano, dada pela equação

$$y = y(x)\ ,$$

onde $y(x)$ é uma função definida e diferenciável no intervalo $[a, b]$. Designamos pelo A e B as extremidades dessa curva. Assim,

$$A = (a, y(a)) \quad \text{e} \quad B = (b, y(b))\ .$$

Seja ainda $f(x,y)$ uma função definida em cada ponto (x,y) da curva L. Queremos definir o que é integral desta função $f(x,y)$

ao longo da curva L .

Para isso usamos a abordagem já familiar - partir a curva em partes pequenas. Designamos pelo M_i os pontos de partição na curva. Para cada arco pequeno $(M_i M_{i+1})$ da curva, pelo ΔS_i designamos o cumprimento desse arco. Escolhemos um ponto qualquer

$$(\xi_i, \eta_i) \in (M_i M_{i+1})$$

dentro de cada arco pequeno. As coordenades desse ponto não são independentes uma de outra, visto que o ponto (ξ_i, η_i) pertence a curva. Portanto,

$$\eta_i = y(\xi_i) \ .$$

Formamos a soma integral

$$\sum_{i=1}^{N} f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i \ = \ \sum_{i=1}^{N} f[\xi_i, y(\xi_i)]\Delta S_i \ .$$

Designamos

$$\lambda = \max \Delta S_i \ .$$

DEFINIÇÃO. Se o limite

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{N} f[\xi_i, y(\xi_i)]\Delta S_i$$

existe e não depende da escolha de partição e da escolha dos pontos (ξ_i, η_i), esse limite diz-se ***integral curvilíneo da 1^a espécie da função*** $f(x, y)$ ***ao longo da curva*** L e designa-se como

$$\int\limits_L f(x, y)ds \ = \ \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{N} f[\xi_i, y(\xi_i)]\Delta S_i \ .$$

Redução do integral curvilíneo da 1^a espécie ao integral definido ordinário

TEOREMA. *Se a função $y(x)$ que determina a curva, tem derivada contínua $y'(x)$ no intervalo $[a, b]$, então*

$$\boxed{\int\limits_L f(x, y)ds \ = \ \int\limits_a^b f[x, y(x)]\sqrt{1 + [y'(x)]^2}\,dx \ . \qquad (1)}$$

Exemplo. *Determinar o integral curvilíneo*

$$\int\limits_L \left(x + 4y^{\frac{3}{2}}\right) ds$$

sobre o arco da parábola $y = x^2$ *no intervalo* $0 \le x \le 1$.

Pela fórmula geral (1) temos

$$\int_L \left(x + 4y^{\frac{3}{2}}\right) ds = \int_0^1 (x + 4x^3)\sqrt{1 + 4x^2}dx = \int_0^1 x(1 + 4x^2)^{\frac{3}{2}}dx$$

Com mudança de variável $1 + 4x^2 = t$ obtemos

$$\int_L \left(x + 4y^{\frac{3}{2}}\right) ds = \frac{1}{8}\int_1^5 t^{\frac{3}{2}}dt = \frac{25\sqrt{5} - 1}{20} .$$

7.2. Integrais curvilíneos da 2^a espécie

Vamos estudar a outra noção do integral curvilíneo que é mais importante em aplicações .

Sejam L uma curva dada pela sua equação

$$y = y(x), \qquad a \le x \le b,$$

e $f(x, y)$ uma função definida em pontos dessa curva.

Consideramos a partição qualquer

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_{N-1} < x_N = b$$

e designamos, como sempre,

$$\Delta_i = x_{i+1} - x_i.$$

Arranjamos a soma integral da forma

$$\sum_{i=1}^{N} f(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i,$$

isto é, nesta vez usamos Δx_i em vez de cumprimento Δs_i do arco pequeno da curva. Como foi no caso dos integrais da 1^a espécie, o ponto (ξ_i, η_i) é um ponto arbitrário dentro do arco pequeno. Assim,

$$x_i < \xi_i < x_{i+1}, \qquad \text{e} \qquad \eta_i = y(\xi_i) .$$

O limite correspondente designa-se pelo

$$\int_L f(x, y)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i .$$

A semelhança é possível introduzir o integral da forma

$$\int_L f(x, y)dy = \lim_{\max \Delta y_i \to 0} \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i .$$

com a única diferença na definição que a partição em partes pequenas deve ser feito no eixo dos y, não no eixo dos x.

E agora sejam

$$P(x,y) \quad \text{e} \quad Q(x,y)$$

umas duas funções definidas em pontos da curva L. Se existem os integrais

$$\int\limits_L P(x,y)dx \quad \text{e} \quad \int\limits_L Q(x,y)dy \ ,$$

podemos considerar a soma deles:

$$\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy \ := \int\limits_L P(x,y)dx \ + \ \int\limits_L Q(x,y)dy.$$

Esse integral na forma geral diz-se *integral curvilíneo da 2^a espécie*

OBSERCVAÇÃO. (Sobre a diferença entre os integrais da 1^a e 2^a epécie) *O integral da 1^a espécie não depende do sentido da curva. Nomeadamente, sejam A e B as extremidades da curva. Então*

$$\int\limits_A^B f(x,y)ds \ = \ \int\limits_B^A f(x,y)ds$$

visto que o cumprimento de arco ds não depende da escolha da direcção na curva. Mas dx e dy dependem dessa escolha. Portanto, para os integrais curvilíneos da 2^a espécie temos

$$\int\limits_A^B P(x,y)dx + Q(x,y)dy \ = \ -\int\limits_B^A P(x,y)dx + Q(x,y)dy \ .$$

Cálculo dos integrais curvilíneos da 2^a espécie

O integral curvilíneo da 2^a espécie também pode ser reduzido ao integral definido ordinário:

$$\boxed{\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy \ = \ \int\limits_a^b \{P[x,y(x)] + Q[x,y(x)] \ y'(x)\} \, dx \qquad (2)}$$

Realmente, temos $dy = y'(x)dx$, logo obtemos (2).

EXEMPLO . *Determinar o integral curvilíneo*

$$\int\limits_L 6x^2ydx + 10xy^2dy$$

ao longo da curva $y = x^3$ *do ponto* $A = (1, 1)$ *até o ponto* $B = (2, 8)$.

Usamos a fórmula (2) e obtemos

$$\int_L 6x^2ydx + 10xy^2dy \ = \ \int_1^2 \left(6x^5 + 30x^9\right) \ = \ 3\,132$$

Observamos que nem sempre uma curva no plano pode ser dada pela equação explícita $y = f(x)$. Nestes casos a fórmula (2) não é aplicável. Muitas vezes, uma curva pode ser dada pelas equações paramétricas

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

onde o parámetro t percorre um certo intervalo $[\alpha, \beta]$. A extremidade α do parámetro corresponde ao ponto inicial

$$A = (\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$$

da curva e a semelhança a extremidade direita β do paramétro corresponde ao ponto final

$$B = (\varphi(bt), \psi(\beta))$$

da curva.

Em particular, pode acontecer que os pontos A e B coincidem um com outro , isto significa que a curva é fechada.

Em termos dessa apresentação paramétrica, em vez da fórmula (2) temos

$$\boxed{\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy \ = \ \int_\alpha^\beta \left\{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t),\psi(t) \ \psi'(t)\right\} dt. \qquad (3)}$$

EXEMPLO . *Determinar o integral curvilíneo*

$$\int_L xdx - ydy$$

onde L é o arco da circumferência

$$x^2 + y^2 = 4, \qquad \frac{\pi}{4} \ < \theta < \frac{3\pi}{4} \ .$$

.

Pela fórmula (3) obtemos

$$\int\limits_{L} xdx - ydy \;=\; -8 \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} sen\,\theta \cos\theta \, d\theta \;=\; -4 \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} sen\,2\theta \, d\theta = 0.$$

7.3. Integrais curvilíneos da 2^a espécie no caso de uma curva fechada

É possível também considerar integrais curvilíneos sobre uma curva fechada. Neste caso não temos nem origem (o ponto A), nem o fim (o ponto B) e deve ser dado um sentido na curva. Nos sempre usamos ***sentido positivo***. Recordamos que, por definição , sentido positivo de percurso de uma curva fechada significa que o domínio fica a esquerda do sentido de percurso (i.e. sentido contra relógio).

Vamos escolher dois pontos na nosssa curva fechada, de modo arbitrário, designamo-los pelo A e B. Então podemos escrever

$$\int\limits_{L} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \;=\; \int\limits_{A}^{B} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \;+\; \int\limits_{B}^{A} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

onde o primeiro integral é sobre a parte da nossa curva de ponto A até o ponto B e o outro integral é sobre a parte restante da curva de B até A.

NOTA . *As vezes, o integral sobre uma curva fechada designa-se pelo símbolo especial*

$$\oint$$

para sublinhar que fala-se sobre a integração no caso de curva fechada.

Assim, é possível escrever equivalmente

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

mas só no caso de curva fechada.

8. Fórmula de Green

Existe uma relação entre o integral curvilíneo sobre uma curva fechada e o integral duplo sobre a região limitada pela essa curva.

Sejam $P(x,y)$ e $Q(x,y)$ duas funções definidas na região fechada $\overline{D}$. Suponhamos que elas têm derivadas parciais contínuas na região fechada $\overline{D}$. Então a fórmula é válida

$$\boxed{\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy \;=\; \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \qquad (4)}$$

supondo que a fronteira L da região D é percorrida no sentido positivo (no integral no lado esquerdo da igualdade (4)).

A fórmula (3) diz-se ***a fórmula de Green***.

9. Cálculo de áreas por meio de integrais curvilíneos

Recordamos-nos que a área de uma região D calcula-se pela fórmula

$$A \;=\; \int\int_D dxdy \qquad (5).$$

Agora pretendemos mostrar que é possível obter outras fórmulas para calcular áreas, em termos de integrais curvilíneos sobre a fronteira da região D. Estas fórmulas serão obtidas por meio de fórmula de Green.

A fórmula de Green diz que

$$\int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \;=\; \oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy \qquad (6)$$

para quaisquer funções P e Q. Vamos escolher essas funções de tal modo que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \;\equiv\; 1.$$

Neste caso o lado esquerdo da fórmula (6) é a área da região D e nos teremos

$$A = \int\int_D dxdy \;=\; \oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy, \qquad \text{se } \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \;\equiv\; 1.$$

Para satisfazer a condição $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \;\equiv\; 1$, é possível escolher P e Q de várias maneiras. Por exemplo,

1) $P(x,y) \equiv 0, \qquad Q(x,y) \equiv x,$

ou

2) $P(x,y) \equiv -y, \qquad Q(x,y) \equiv x.$

Respeitivamente a essas duas escolhas obtemos as duas fórmulas

$$\boxed{A \;=\; \int_L xdy} \qquad \text{e} \qquad \boxed{A \;=\; -\int_L ydx}$$

Daqui decorre ainda outra fórmula, mais simétrica:

$$\boxed{A \;=\; \tfrac{1}{2}\int_L (xdy - ydx)\;. \qquad (7)}$$

EXEMPLO . *Determinar a área da astroide.*

A *astroide* é a figura limitada pela curva também chamada astroide. Essa curva é dada pela relação

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \;=\; a^{\frac{2}{3}}, \qquad a > 0.$$

A equação da fronteira pode ser escrita também em termos mais fácil para o cálculo, passando a representação paramétrica:

$$x = a\cos^3\theta, \qquad y = a\,sen^3\,\theta$$

com $0 < \theta < 2\pi$.

Pela fórmula (7) obtemos

$$A = \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\; sen^2\,\theta\, d\theta \;=\; \frac{3a^2}{8}\int_0^{2\pi} sen^2\,(2\theta)\, d\theta$$

$$=\; \frac{3a^2}{8}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(4\theta)}{2}\, d\theta \;=\; \frac{3a^2}{8}\;.$$

10. A condição de independência do integral curvilíneo, de caminho de integração

Consideramos o integral curvilíneo

$$I_L \;=\; \int_L Pdx + Qdy$$

sobre uma curva L que reune os pontos

$$A \;=\; (x_0, y_0) \quad \text{e} \quad B \;=\; (x_1, y_1).$$

Consideramos também o integral semelhante

$$I_{L'} \;=\; \int_{L'} Pdx + Qdy$$

sobre um outro caminho L' que reune os mesmos pontos A e B.

Pergunta: *É possível que o integral curvilíneo depende só das extremidades A e B da curva, mas não depende da escolha de caminho que reune essas extremidades?*

Isto é, é possível que

$$I_L = I_{L'}$$

para todos os caminhos L e L' com extremidades comums?

A última igualdade significa que

$$\int_L Pdx + Qdy - \int_{L'} Pdx + Qdy = 0 . \qquad (1)$$

Designamos pelo $\overline{L'}$ a curva L' percorrida no sentido contrário, assim que

$$\int_{L'} Pdx + Qdy = - \int_{\overline{L'}} Pdx + Qdy .$$

Então a igualdade (1) toma a forma

$$\oint_{L_1} Pdx + Qdy = 0,$$

onde a curva $L_1 = L \cup \overline{L'}$ é fechada.

A resposta a nossa pergunta sobre independência do caminho terá resposta positiva, se é válida a afirmação seguinte: *O integral $\oint_{L_1} Pdx + Qdy$ é igual ao zero para qualquer curva fechada* (tomando em conta que os caminhos L e L' foram arbitrários).

TEOREMA. *Sejam $P(x,y)$ e $Q(x,y)$ duas funções contínuas no domínio D, bem como as suas derivadas parciais $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Para que o integral curvilíneo sobre qualquer curva fechada L, situada no domínio D, seja nulo:*

$$\oint_L Pdx + Qdy = 0,$$

é necessário e suficiente que

$$\boxed{\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial y} \qquad (2)}$$

Nos omitimos a toda demonstração desse teorema, mas explicamos que a suficiência da condição (2) é consequência imediata da fórmula de Green:

$$\oint_L Pdx + Qdy = \int\int_{D_0} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy ,$$

onde D_0 é a região limitada pela curva L.

Corolário. *Seja L_{AB} um caminho que reune os pontos A e B. O integral curvilíneo*

$$\int_{L_{AB}} Pdx + Qdy$$

não depende da escolha desse caminho se e só se a condição (2) é satisfeita.

Exemplo. *Sejam $A = (0,0)$ e $B = (2,3)$. Determinar, se dependem ou não, do caminho L entre esses pontos, os seguintes integrais curvilíneos*

$$1) \qquad \int_L 3x^2ydx + x^3dy \ ,$$

$$2) \qquad \int_L xydx + y^2dy \ .$$

1) No primeiro caso temos $P = 3x^2y, \ Q = x^3 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \equiv 0 \quad \Longrightarrow$ **não depende**;

2) No segundo caso temos $P = xy, \ Q = y^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \equiv x \quad \Longrightarrow$ **depende.**

11. Integral curvilíneo do diferencial total

Consideramos o integral curvilíneo

$$\int_L Pdx + Qdy$$

sobre algum caminho entre os dois pontos fixos

$$A = (x_0, y_0) \quad \text{e} \quad B = (x_1, y_1),$$

supondo que a condição

$$\frac{\partial P}{\partial y} \ \equiv \ \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{3}$$

é válida. Como já sabemos, neste caso o integral não depende da escolha de caminho entre os pontos A e B.

De outro lado, a condição (3) significa que $Pdx + Qdy$ é diferencial total, isto é, existe uma função $u(x,y)$ de duas variáveis tal que

$$Pdx + Qdy \ \equiv \ du$$

onde

$$du \ = \ \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

é diferencial total da função u.

TEOREMA . *Se* $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$*, isto é,*

$$Pdx + Qdy \equiv du,$$

então

$$\int_L Pdx + Qdy = u\Big|_A^B = u(x_1, y_1) - u(x_0, y_0). \tag{4}$$

S e m   d e m o n s t r a ç ã o

A última fórmula é parecida com a fórmula de Newton-Leibniz conhecida de Análise I.

EXEMPLO. Calcular o integral

$$\int_L 2xydx + \left(x^2 + \frac{2}{y}\right) dy$$

sobre qualquer caminho entre os pontos $A = (0, 1)$ *e* $B = (2, e)$.

Temos $P = 2xy$, $Q = x^2 + \frac{2}{y}$. Assim

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x \quad \Longrightarrow \quad 2xydx + \left(x^2 + \frac{2}{y}\right) dy \quad \text{é diferencial total :}$$

$$2xydx + \left(x^2 + \frac{2}{y}\right) dy = du.$$

Para determinar a função u, integramos em x a igualdade $\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy$ e obtemos $u = x^2y + C(y)$. Para determinar o termo $C(y)$, substituimos o resultado obtido $u = x^2y + C(y)$ na relação $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2}{y}$ e obtemos $C'(y) = \frac{2}{y}$ e então

$$u = x^2y + 2\ln y.$$

Por isso, usando a fórmula (4), obtemos

$$\int_L 2xydx + \left(x^2 + \frac{2}{y}\right) dy = u(0, 1) - u(2, e) = 4e + 2 .$$

12. Integrais de superfície

Seja S uma superfície no espaço, dada pela equação

$$z = z(x, y)$$

com domínio D no plano dos x e y. Este domínio D diz-se ainda a base da superfície. Suponhamos que em cada ponto (x, y, z) desta supefície é definida uma função $f(x, y, z)$. Recordamos que nos pontos (x, y, z) pertencentes à superfície, a coordenade z, não é indepedente, mas depende de x e y:

$$(x, y, z) = \ (x, y, z(x, y)) \ .$$

Queremos dar a noção do integral dessa função sobre a superfície S.

12.1 Integral de superfície da 1^a espécie

Como sempre, para introduzir a noção do integral, partimos a superfície S em partes pequenas ΔS_i. Escolhemos um ponto (ξ_i, η_i, ζ_i) dentro de cada parte pequena ΔS_i (recordemos que $\zeta_i = z(\xi_i, \eta_i)$). Designamos pelo

$$\Delta A_i \ = \ \text{a área da parte } \ \Delta S_i, \quad i = 1, 2, 3, ...$$

e introdizimos a soma integral

$$\sum_i f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta A_i \ .$$

DEFINIÇÃO. *Se existe o limite*

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_i f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta A_i$$

onde λ é o máximo dos diametros de todas as partes pequenas ΔS_i , e este limite não depende da escolha de partição e da escolha dos pontos (ξ_i, η_i, ζ_i), então esse limite diz-se integral de superfície da 1^a espécie e designa-se pelo

$$\int\int_S f(x, y, z)dS = \lim_{\lambda \to 0} \sum_i f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta A_i \ .$$

É possível demonstrar que tal integral realmente existe, se

$$\boxed{\text{1)} \quad \text{a função} \quad f(x, y, z) \ \text{ é contínua e limitada}}$$

e

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{2)} \qquad \text{a função} \quad z = z(x, y) \ \text{ que define a superfície,} \\ \text{tem derivadas parciais contínuas no domínio fechado } \ \overline{D}\end{array}}$$

12.2. Cálculo dos integrais de superfície da 1ª espécie

O teorema seguinte diz que o cálculo dos integrais de superfície da 1ª espécie reduze-se ao cálculo dos integrais duplos sobre a base D.

TEOREMA . *Suponhamos que as condições 1) e 2) são satisfeitas. Então,*

$$\boxed{\int\int_S f(x,y,z)dS \;=\; \int\int_D f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy \; . \qquad (1)}$$

S e m d e m o n s t r a ç ã o

EXEMPLO . *Calcular o integral de superfície*

$$\int\int_S (x^2+y^2+z)dS,$$

onde S é a superfície do paraboloide dada pela equação $z=x^2+y^2$ e limitada pelo plano $z=1$.

Pela fórmula (1) obtemos

$$\int\int_S (x^2+y^2+z)dS \;=\; 2\int\int_D (x^2+y^2)\sqrt{1+4x^2+4y^2}\, dxdy.$$

A base D é o circulo $x^2+y^2<1$ de raio 1. Assim

$$\int\int_S (x^2+y^2+z)dS \;=\; 2\int\int_{x^2+y^2<1} (x^2+y^2)\sqrt{1+4\left(x^2+y^2\right)}\, dxdy.$$

Passando aos coordenades polares, obtemos

$$\int\int_S (x^2+y^2+z)dS \;=\; 2\int_0^{2pi} d\theta \int_0^1 r^3\sqrt{1+4r^2}dr.$$

Com mudança de variável $\sqrt{1+4r^2}=t$ obtemos

$$\int\int_S (x^2+y^2+z)dS \;=\; \frac{\pi}{4}\int_1^{\sqrt{5}} (t^2-1)t^2dt.$$

Falta calcular o último integral ordinário.

Cálculo de áreas de superfícias por meio de integrais de superfície

Dada uma superfície pela equação

$$z=f(x,y)$$

com a base D, a área dessa superfície pode ser calculada pela fórmula

$$A \;=\; \int\int_S dS \;=\; \int\int_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\; dxdy\;. \qquad (2)$$

EXEMPLO . *Calcular a área da superfície do paraboloide*

$$z = x^2 + y^2$$

limitado pelo plano $z = 2$.

Pela fórmula (2) temos

$$A \;=\; \int\int_S dS \;=\; \int\int_{x^2+y^2<2} \sqrt{1+4x^2+y^2}dxdy = 2\pi\int_0^{\sqrt{2}} r\sqrt{1+4r^2}dr$$

O último integral calcula-se por meio de mudança de variável $\sqrt{1+4r^2} = t$.

12.3. Integral de superfície da 2^a espécie

Nessa disciplina nos não vamos estudar pormenores da teoria dos integrais de superfície da 2^a espécie, só mencionamos que eles têm a forma

$$\int\int_S P(x,y,z)dxdy + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dydz$$

Compare com os os integrais curvilíneos

$$\int_L f(x,y)ds \qquad \text{e} \qquad \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

da 1^a e 2^a espécie, respeitivamente.

Recordemos que o integral curvilíneo da 1^a espécie $\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ considera-se ao longo da curva L orientada, isto é, o sentido na curva deve ser dado. Para o integral curvilíneo da 1^a espécie $\int_L f(x,y)ds$ a orientação da curva não tem inportância.

A semelhança, no caso de integral de superfiivie da 2^a espécie, a superfície deve ser orientada. No caso de superfícies, a escolha de orientação da superfície significa a escolha do sentido do vector normal da superfície.

13. Observação sobre integrais triplos

Nos acabamos com a observação que é possível considerar os integrais sobre domínios D no espaço R^3, isto é, para funções de tres variáveis. Neste caso, em vez de integral duplo

$$\int\int_D f(x,y)dxdy$$

teremos os integrais de tipo

$$\int\int\int_D f(x,y,z)dxdydz \ .$$

Tais integrais dizem-se ***integrais triplos***, mas nos não estudamo-los nessa disciplina.

II. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

1. Noção de equação diferencial e exemplos

Na Ciência e Engenharia são frequentemente usados modelos matemáticos. Muitas vêzes estes modelos contem uma equação com derivadas da função procurada. Tais equações chamam-se **equações diferenciais**. Geralmente, uma equação diferencial tem a forma

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

onde $y = y(x)$ é a função a procurar. A mais superior ordem n de derivada involvida em (1), chama-se **a ordem da equação diferencial**.

Consideremos dois exemplos de física.

Exemplo 1. Equação de oscilações harmónicas.
Seja $y = y(t)$ a oscilação do peso pendurado no momento de tempo t. Consideramos a oscilação relativamente ao estádio de equilíbrio. É possível demonstrar que a função $y(t)$ e a sua segunda derivada y'' são relacionadas uma com outra pela equação

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = 0,$$

onde ω é constante.

Em seguida nos poderemos aprender o como é possível encontrar todas as funções que satisfazem esta relação . Nos mostraremos que todas as soluções desta equação são dadas pela fórmula:

$$y(t) = C_1 sen\,(\omega t) + C_2 \cos(\omega t),$$

onde C_1 and C_2 são constantes arbitrárias.

Exemplo 2. Equação de radiação radioactiva.
Seja $y = A(t)$ a quantidade de uma substância radiactiva existente no momento do tempo t. Baseando no facto que o decrescimento de radiação é proporcional à quantidade existente, podemos escrever que

$$A'(t) = -kA(t), \quad k > 0. \tag{2}$$

Esta equação pode ser resolvida facilmente:

$$\frac{dA(t)}{dt} = -kA(t) \quad \Longrightarrow \quad \frac{dA}{A} = -kdt \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{dA}{A} = -k \int dt$$

$$\Longrightarrow \quad \ln A = -kt + C \Longrightarrow \quad A(t) = e^{-kt+C}$$

ou

$$A(t) = C_1 e^{-kt}, \tag{3}$$

onde C_1 é uma constante arbitrária positiva. A fórmula (3) dá todas as soluções da equação (2).

Observação . Equações diferenciais de tipo (1) chamam-se equações diferenciais ordinárias, em comparação com assim chamadas *equações diferenciais parciais* para funções de várias variáveis. Nesta dscipina tratam-se só equações diferenciais ordinárias.

Destacamos o caso particular, muito importante, das equações ordinárias, nomeadamente equações diferenciais lineares:

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x), \tag{4}$$

onde os coeficientes $a_n(x), a_{n-1}(x), \ldots, a_1(x), a_0(x)$ e o lado direito $f(x)$ são funções dadas, e a função $y(x)$ é desconhecida, é a função a procurar.

A equação que não pode ser apresentada em forma (4), chama-se equação **não linear.**

Por exemplo, a equação

$$y'' + y = x^2$$

é equção linear (de ordem 2). A equação

$$y'' + sen\, y = 0$$

não é equação linear, por causa do termo $sen\, y$. A equção

$$y'' - yy' = \cos x$$

também não é linear, visto que está presente o producto yy'.

Sublinhamos que equações diferenciais têm papel importante em aplicações e usam-se frequentemente em várias ciências.

Exemplos de equações diferenciais que encontram-se em aplicações :

1. $$5y''(t) + 2y'(t) + 9y(t) = 2\cos(3t) \qquad \textbf{(linear)}$$

   (*teoria de vibrações ; circuitos eléctricos, seismologia*);

2. $$y\left(1 + (y')^2\right) = C \qquad \textbf{(não linear)}$$

   (*o problema de brahistohrona; cálculo de variações*);

3. $$8y^{(4)} = x(1-x) \qquad \textbf{(linear)}$$

   (*em problemas de deviação de raios*);

4. $$y' = \frac{y(2-3x)}{x(1+3y)} \qquad \textbf{(não linear)}$$

   (*em problemas de competição de duas espécies; ecologia*);

5.
$$y' = k(4-y)(1-y) \qquad \textbf{(não linear)}$$

(*em reacções químicas*);

6.
$$xy'' + y' + xy = 0 \qquad \textbf{(linear)}$$

(*em aerodinámica*);

7.
$$y''(t) - \varepsilon(1-y^2)y'(t) + 9y = 0, \quad \varepsilon = const, \qquad \textbf{(linear)}$$

(*equação de van der Pol, tubo de vácuo de triode*).

Estes são só um poucos exemplos de equações diferenciais que encontram-se em várias aplicações .

Noção de soluções de equações diferenciais

Consideramas a equação geral (1) em forma resolúvel relativamente a derivada de ordem superior:

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right). \tag{5}$$

Definição 1. A função $y = \varphi(x)$ diz-se a *solução explícita* da equação (5) num intervalo (a, b), se ela satisfaz esta equação nesse intervalo.

As vezes, temos de trabalhar com soluções que chamam-se *soluções implícitas*:

Definição 2. Dizemos que a relação $F(x, y) = 0$ da uma solução implícita da equação (5) num intervalo (a, b), se esta relação determina:

$$F(x, y) = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = \varphi(x)$$

uma ou mais soluções que satisfazem a equação (mas nem sempre essas funções $\varphi(x)$ podem ser determinadas explicitamente).

Exercícios.

1. Mostre que a função $\varphi(x) = x^2 - \frac{1}{x}$ é uma solução explícita da equação

$$y'' - \frac{2y}{x^2} = 0.$$

2. Mostre que a relação $x + y + e^{xy} = 0$ da a solução implícita da equação

$$(1 + xe^{xy})\, y' + (1 + ye^{xy})\, y = 0.$$

2. Equações diferenciais da primeira ordem

A equação diferencial da 1^a ordem tem a forma

$$y' = f\,(x, y)\,, \tag{6}$$

ou, em forma mais detalhada

$$y'(x) = f\,(x, y(x))\,. \tag{7}$$

O problema geral é o encontrar todas as soluções da equação (7).

Notemos que o caso especial, quando o lado direito $f(x, y)$ não depende de y, isto é, a equação tem a forma

$$y' = f\,(x)\,, \tag{8}$$

é bem familiar para nós. Isto é o problema de primitivação da função $f(x)$:

$$y = \int f(x)\,dx,$$

resolvido por meio de integração .

Já neste caso particular, a solução da equação simples $y' = f\,(x)$, inclue uma constante arbitrária, assim temos uma família de soluções .

Acontece que, em geral, qualquer equação $y' = f\,(x, y)$ de 1^a ordem tem solução que inclue uma constante arbitrária. (Em sequida nós poderemos ver que a solução de uma equação de ordem n inclue n constantes arbitrárias, independentes uma de outra).

Geometricamente: visto que a equação $y = \varphi(x)$ determine uma curva no plano, podemos dizer, que a família de soluções , dependentes de constante arbitrária C determine uma família de curvas no plano. Assim, resolver uma equação diferencial, significa o encontrar uma família de curvas. (Quando dizemos que uma curva, dada pela equação $y = \varphi(x)$ satisfaz a equação diferencial, é subentendido que a função $\varphi(x)$ satisfaz esta equação)

Assim, já é claro que qualquer equação diferencial de ordem 1 tem muitas soluções . Para determinar uma solução única, não é bastante ter só a equção diferencial. Temos ainda ter uma condição adicional.

As vezes, para determinar a solução única de uma equação diferencial, pode ser dada uma condição suplementar: *determinar uma solução da equação diferencial* (6) *tal que*

$$y(x_0) = y_0, \tag{9}$$

onde x_0 é um certo ponto do intervalo (a, b), onde estudamos a nossa equação , e y_0 é um valor dado. **Geometricamente** isto significa que é necessário determinar tal curva que passa pelo ponto dado (x_0, y_0).

Definição . O problema de encontrar a solução $y = \varphi(x)$ qua satisfaz a condição suplementar (9), diz-se **o problema de Cauchy**, e a condição própria (9) chama-se **condição de Cauchy**.

3. Equações resoluveis em forma explícita ou implícita

Vamos estudar alguns tipos de equações diferenciais da 1^a ordem, resoluveis por meio de integração , em forma explícita ou implícita. Observemos que nem sempre é possível resolve-las por meio de integração . Nós consideraremos os seguintes tipos de equações diferenciais da 1^a ordem:

3.1. Equações com variáveis separáveis.
3.2. Equações homogêneas.
3.3. Equações lineares.
3.4. Equações exactas (ou equações com o diferencial total).

3.1. Equações com variáveis separáveis

Definição . A equação $y' = f(x, y)$ da 1^a ordem diz-se equação com variáveis separadas, se o lado direito $f(x, y)$ tem a forma

$$f(x, y) = A(x)B(y).$$

Observamos que as equações

$$y' = A(x)B(y) \tag{10}$$

com variáveis separadas escrevem-se também em forma um pouco mais geral:

$$a(x)b(y)dx + m(x)n(y)dy = 0. \tag{11}$$

Mas esta generalidade é relativa: a equação (11) reduza-se a forma (10) imediatamente por divizão pelo $m(x)n(y)$.

O método de rezolução .
Reescrevemos a equação (10) em forma

$$\frac{dy}{B(y)} = A(x)dx.$$

Integrando, obtemos

$$\int \frac{dy}{B(y)} = \int A(x)dx + C.$$

Designamos para brevidade:

- $F(y) = \int \frac{dy}{B(y)}$ – uma primitiva da função $\frac{1}{B(y)}$,
- $G(x) = \int A(x)dx$ – uma primitiva da função $A(x)$.

Então temos

$$F(y) = G(x) + C.$$

Assim foram obtidas todas as soluções da equação , em forma implícita. Disemos que a solução geral obtida depende de uma constante arbitrária C.

Exemplos.

Exemplo 1: resolver a equação $y' = \frac{x-5}{y^2}$.

Temos:

$$y^2 dy = (x-5)dx \quad \Longleftrightarrow \quad \int y^2 dy = \int (x-5)dx \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{y^3}{3} = \frac{(x-5)^2}{2} + C.$$

Daqui obtemos a solução geral

$$y = \sqrt[3]{\frac{3}{2}(x-5)^2 + C}.$$

A solução foi obtida em forma explícita.

Exemplo 2: resolver a equação $y' = \frac{y^2+1}{x+2xy}$.
Temos

$$\frac{1+2y}{1+y^2}dy = \frac{dx}{x} \quad \Longleftrightarrow \quad \int \frac{1+2y}{1+y^2}dy = \int \frac{dx}{x} + C \quad \Longleftrightarrow \quad arctg\, y + \ln(1+y^2) = \ln x + C.$$

Neste caso a solução não foi obtida na forma explícita, só na forma implícita.

Exemplo 3: determinar a solução da equação $y' = \frac{y-1}{x-3}$ que satisfaz a condição $y(-1) = 0$.
Temos:

$$\frac{dy}{y-1} = \frac{dx}{x-3} \quad \Longleftrightarrow \quad \int \frac{dy}{y-1} = \int \frac{dx}{x-3} \quad \Longleftrightarrow \quad \ln(y-1) = \ln(x-3) + C;$$

então

$$y = 1 + C(x-3).$$

Usando a condição $y(-1) = 0$, podemos determinar a constante C: $C = \frac{1}{4}$ e então

$$y = \frac{x+1}{4}.$$

Exemplo 4: resolver a equação $y' = \frac{6x^5-2x+1}{e^y+\cos y}$.
Temos

$$(e^y + \cos y)dy = (6x^5 - 2x + 1)dx \quad \Longleftrightarrow \quad \int (e^y + \cos y)dy = \int (6x^5 - 2x + 1)dx.$$

Daqui

$$e^y + sen\, y = x^6 - x^2 + x + C;$$

a solução obtida em forma implícita.

Assim, é claro que a rezolução de equações diferenciais com variáveis separaveis reduze-se ao cálculo de primitivas.

Observação . Sabemos que a primitiva de uma função elementar pode ser função não elementar. Por exemplo, a primitiva

$$\int e^{x^2} dx$$

da função elementar e^{x^2}, não é elementar; ela não pode ser exprimida por meio de funções elementares. Portanto, embora uma equação diferencial pode incluir só funções elementares, a solução da equação pode ser função não elementar. Por exemplo, a equação

$$y' = \frac{e^{-x^2}}{2y}$$

tem a solução geral

$$y = \pm\sqrt{\Phi(x) + C},$$

onde $\Phi(x) = \int e^{x^2} dx$ não é função elementar.

3.2. Equações homogéneas

Voltamos a equação em forma geral

$$y' = f(x, y).$$

Tencionamos considerar um outro caso quando esta equação pode ser resolvido. Vai ser o caso quando a função $f(x, y)$ é homogénea.

Definição . Uma função $f(x, y)$ de duas variáveis x, y diz-se homogénea de grau m, se ela satisfaz a condição

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y)$$

para qualquer factor λ.

Agora, na teoria de equações diferenciais, nós consideramos só funções homogéneas de grau 0:

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y).$$

Definição . Uma equação diferencial

$$y' = f(x, y) \tag{12}$$

da 1^a ordem diz-se equação homogénea, se a função $f(x, y)$ é homogénea de grau zero.

O método de resolução .

A equação homogénea pode ser reduzida a equação com variáveis separadas por meio de substituição . Fazemos a substituição seguinte

$$y = tx$$

onde t é a nova função a procurar. Da equação (12) obtemos

$$t'x + t = f(x, tx).$$

Usando a propriedade de homogeneidade da função $f(x, y)$, obtemos

$$t'x + t = f(1, t),$$

ou

$$t'x = f(1, t) - t.$$

Tinhamos chegado a equação com variáveis separadas, que pode ser resolvido:

$$\frac{dt}{f(1,t) - t} = \frac{dx}{x} \quad \Longleftrightarrow \quad \int \frac{dt}{f(1,t) - t} = \int \frac{dx}{x} + C.$$

Seja

$$F(t) = \int \frac{dt}{f(1,t) - t}$$

a primitiva da função $\frac{1}{f(1,t)-t}$. Temos

$$F(t) = \ln x + C;$$

daqui

$$x = Ce^{F(t)}.$$

Como $t = \frac{y}{x}$, finalmente obtemos

$$x = Ce^{F\left(\frac{y}{x}\right)}$$

- a solução geral em forma implícita.

Exemplos.

Exemplo 1. Resolver a equação

$$y' = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}.$$

A função $f(x, y) = \frac{x^2+xy+y^2}{x^2}$ é homogénea de grau zero. Assim o método de substituição $y = tx$ é aplicável. Obtemos

$$t'x + t = \frac{x^2 + x^2t + x^2t^2}{x^2}$$

ou

$$t'x + t = 1 + t + t^2.$$

Daqui obtemos

$$\frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{dx}{x}.$$

Então

$$arctg\, t = \ln\, x + C$$

e portanto obtemos a solução geral em forma

$$y = xtg\,(C + \ln x).$$

Neste caso a solução foi obtida em forma explícita.

Exemplo 2. Resolver a equação

$$y' = \frac{y-x}{y+x} \cdot \frac{y}{x}.$$

O resultado: $y + x\ln(xy) = Cx$.

Exemplo 3. Resolver a equação

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2}.$$

O resultado: $y = \frac{x}{\arccos(C - \ln x)}$.

3.3. Equações lineares de ordem 1

Definição . A equação

$$y' = f(x, y)$$

diz-se linear, se a função $f(x, y)$ é linear respeitivamente a variável y, isto é, $y = a(x)y + b(x)$.

Assim , equações lineares têm a forma

$$y' = a(x)y + b(x).$$

Habitualmente, equações lineares escrevem-se na forma

$$y' + p(x)y = f(x), \tag{13}$$

onde $p(x)$ e $f(x)$ são funções dadas e y é a função a procurar.

Se $f(x) \equiv 0$, a equação (13) chama-se *linear homogénea.* (Não confunde com a noção de equação homogénea; agora a palavra "homogénea" usa-se em sentido diferente). Se $f(x) \neq 0$, a equação diz-se *linear ão homogénea.*

I. Rezolução da equação homogénea linear. A resolução da equação homogénea linear

$$y' + p(x)y = 0$$

é fácil visto que isto é a equação com variáveis separadas:

$$y' = -p(x)y \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{dy}{y} = -p(x)dx \quad \Longleftrightarrow \quad \ln y = -\int p(x)dx + C.$$

Assim, obtemos que a solução geral da equação homogénea linear é dada pela fórmula

$$\boxed{y = Ce^{-\int p(x)dx}} \qquad (*)$$

onde C é constante arbitrária.

I. Rezolução da equação não linear homogénea. Usamos o método que chama-se *método de variação de constante.* A fórmula anterior $(*)$ tem a forma

$$y = Cy_0(x)$$

onde $y_0 = e^{-\int p(x)dx}$ é a solução particular da equação homogénea. A idea de resolução é a seguinte. Procuramos a solução da equação não homogénea, tentando escrever $C(x)$ em vez da constante C (Portanto o método chama-se método de variação de constante):

$$y = C(x)y_0(x)$$

onde $C(x)$ está a procurar. Substituimos $y = C(x)y_0(x)$ na equação

$$y' + p(x)y = f(x) \tag{14}$$

e obtemos

$$C'(x)y_0(x) + C(x)\left[y_0'(x) + p(x)y_0(x)\right] = f(x).$$

Visto que $y_0(x)$ é uma solução da equação homogénea, temos

$$y_0'(x) + p(x)y_0(x) \equiv 0.$$

Portanto

$$C'(x)y_0(x) = f(x).$$

Daqui é possível determinar $C(x)$ por meio de integração :

$$C(x) = \int \frac{f(x)}{y_0(x)}dx + C = \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + C.$$

Exemplos

Exemplo 1. Resolver a equação $y' - 2\frac{y}{x} = x^2 \cos x$.
Resolvendo a equação linear homogénea $y' - 2\frac{y}{x} = 0$, obtemos

$$y = Cx^2.$$

Para resolver a equação linear não homogénea $y' - 2\frac{y}{x} = x^2 \cos x$, usamos o método de variação de constante e procuramos a solução na forma

$$y = C(x)x^2.$$

Substituindo na equação $y' - 2\frac{y}{x} = x^2 \cos x$, obtemos $C'(x) = \cos x$. Portanto

$$C(x) = sen\, x + C.$$

Então a solução geral da equação é

$$y = x^2 sen\, x + Cx^2.$$

Exemplo 2. Resolver o problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' + 4y = x^2 e^{-4x}, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Resultado: $y = e^{-4x}\left(\frac{x^3}{3} + 1\right)$.

Exemplo 3. Resolver a equação $(x^2+1)y' = x - 4xy$.
Resultado: $y = \frac{1}{4} + \frac{C}{(x^2+1)^2}$.

3.4. Equações exactas (ou equações com o diferencial total)

Observamos que equações diferenciais $y' = f(x, y)$ da 1^a ordem as vezes escrevem-se na forma

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \tag{15}$$

Isto é uma outra forma de escrever a igualdade $y' = f(x, y)$. É claro que a equação (15) reduz-se a equação da forma $y' = f(x, y)$ por divizão pelo $Q(x, y)$.

Observação sobre o diferencial total de funções de duas variáveis. Seja $u(x, y)$ uma função de duas variáveis. Pelo

$$\frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y}$$

designamos as derivadas da função $f(x, y)$ em variáveis x e y, respeitivamente. Notemos que essas derivadas chamam-se *derivadas parciais* da função $u(x, y)$. A expressão

$$du(x, y) := \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \tag{16}$$

diz-se *diferencial total* da função $u(x, y)$. É possível demonstrar que uma função $u(x, y)$ de duas variáveis é constante se e só se o seu diferencial total $du(x, y)$ é igual ao zero identicamente:

$$u(x, y) \equiv const \quad \Longleftrightarrow \quad du(x, y) = 0.$$

Comparando a equação (15) com a expressão (16), chegamos a conclusão seguinte: *se o lado esquerdo $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ da equação (15) é diferencial total de uma certa função $u(x, y)$, então a igualdade $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ é equivalente ao dizer que $u(x, y) = C$, o que da a solução geral da equação , em forma implícita.*

Definição . A equação (15) diz-se **equação exacta**, se o lado esquerdo $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ é diferencial total de uma função $u(x,y)$.

Assim, a solução de uma equação exacta é imediata:

$$u(x,y) = C$$

se sabemos a função $u(x,y)$.

Surgem as duas perguntas:

1) Como é possível determinar se uma equação é exacta?
2) Se é exacta, como é possível determinar a função $u(x,y)$?

A resposta à primeira pergunta é dada pelo teorema segunte.

Teorema. *Uma expressão $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ é diferencial total de uma certa função , se e só se*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{17}$$

Se a condição (17) é satisfeita, a resposta à pergunta 2) obtem-se pela procura da função $u(x,y)$ das relações

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y) \\ \\ \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y) \end{cases}$$

Exemplos

Exemplo 1. Resolver a equação

$$\left(2xy - \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx + (x^2 + 2y)dy = 0. \tag{18}$$

Neste caso temos

$$P(x,y) = 2xy - \frac{1}{\cos^2 x}, \quad Q(x,y) = x^2 + 2y.$$

Visto que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x \quad \text{e} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x,$$

a condição (17) é satisfeita. Portanto a equação (18) é exacta, existe uma função $u(x,y)$ tal que

$$du(x,y) = \left(2xy - \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx + (x^2 + 2y)dy.$$

Para determinar esta função $u(x,y)$, usamos as relações

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 2xy - \frac{1}{\cos^2 x} \\ \\ \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + 2y \end{cases} \tag{19}$$

Integrando a primeira relação relativamente a variável x, obtemos

$$u(x,y) = x^2y - tg\, x + C(y).$$

Notemos que a integração foi feita em variável x; portanto a constante de integração C não depende de variável x, a variável de integração , mas pode depender de outra variável. Por isso, C foi escrita como $C(y)$. Temos de determinar esse termo adicional $C(y)$. Para tal temos que usar a segunda relação em (19). Substituindo em (19) a expressão $u(x,y) = x^2y - tg\, x + C(y)$ obtida para a função $u(x,y)$, obtemos

$$x^2 + C'(y) = x^2 + 2y.$$

Daqui $C'(y) = 2y$ e então $C(y) = y^2$. Assim,

$$u(x,y) = x^2y + y^2 - tg\, x.$$

Portanto a solução geral da equação (18) é dada pela relação implícita

$$u(x,y) = x^2y + y^2 - tg\, x = C,$$

onde C é constante arbitrária. Visto que esta relação é quadratica relativamente a variável y, podemois resolver a equação quadrática correspondente e obtemos a solução em forma explícita

$$y = -\frac{x^2}{4} \pm \sqrt{\frac{x^4}{4} + tg\, x + C}.$$

Exemplo 2. Resolver a equação

$$(1 + ye^x + xye^x)\, dx + (2 + xe^x)dy = 0.$$

Resultado: $y = \frac{C-x}{2+xe^x}$.

4. O teorema geral sobre existência e unicidade da solução

Consideramos o problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{20}$$

em forma geral.

Os exemplos considerados acima, mostram que a solução da equação $y' = f(x,y)$ da 1^a ordem depende de constante arbitrária:

$$y = \varphi(x, C).$$

Portanto, a equação diferencial $y' = f(x,y)$ não tem uma solição única, mas sim uma família de soluções . A condição suplementar $y(x_0) = y_0$ permite determinar o valor da constante C e obter a solução única.

Pergunta. No caso geral (não só em exemplos), é possível afirmar que o problema de Cauchy (20) tem solução e esta solução é única?

A resposta positiva é dada no teorema a seguir, supondo qua a função $f(x,y)$ é "suficientemente boa".

Teorema (de Cauchy-Picard). *Seja $f(x,y)$ uma função contínua numa região D. Suponhamos que $f(x,y)$ tem derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$ em variável y, limitada na região D:*

$$\sup_{(x,y)\in D}\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| \leq M < \infty.$$

Então, dado um ponto $(x_0, y_0) \in D$, há uma vizinhança $(x_0 - h, x_0 + h)$ do ponto x_0 tal que nesta vizinhança existe uma solução do problema de Cauchy e esta solução é única.

4. Equações lineares de ordem 2

Recordemos que a equação diferencial de ordem 2 em forma geral é

$$F(x, y, y', y'') = 0.$$

Nós não vamos estudar equações diferenciais da 2^a ordem em forma geral, mas sim em forma linear:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x). \tag{21}$$

Como foi no caso da equação linear da 1^a ordem, tratamos em separado o caso quando o lado direito $f(x)$ é igual ao zero identicamente:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{22}$$

A equação (22) chama-se *equação homogenea linear*, correspondente a equação (21).

4.1. Noção de uma combinação linear das soluções . Estrutura da solução geral da equação linear homogénea de ordem 2

Tratamos a equação linear homogénea

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{23}$$

Sejam $y_1(x)$ e $y_2(x)$ umas soluções desta equação :

$$y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0 \quad e \quad y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0.$$

Definição . A expressão

$$C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias, diz-se *combinação linear* das funções $y_1(x)$ e $y_2(x)$.

Teorema *Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções da equação linear homogénea, então qualquer combinação delas também é solução dessa equação .*

Demonstração é imediata.

Definição . Umas funções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ dizem-se **linearmente dependentes**, se

$$y_1(x) = Cy_2(x)$$

ou

$$y_2(x) = Cy_1(x),$$

onde C é constante.

Nota. É possível que $C = 0$. Isto significa que as funções

$$y \equiv 0 \quad \text{e qualquer outra função} \quad y(x)$$

são sempre linearmente dependentes.

Uma outra forma de definição . Umas funções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ dizem-se **linearmente dependentes**, se existem as constantes C_1 e C_2, não iguas ao zero simultaneamente, tais que

$$C_1y_1(x) + C_2y_2(x) \equiv 0.$$

Se umas duas funções não são linearmente dependentes, dizem que elas são **linearmente independentes**.

O teorema seguinte diz que, para obter todas as soluções existentes da equação linear homogénea, é bastante saber algumas duas só soluções desta equação .

Teorema. *Sejam $y_1(x)$ e $y_2(x)$ umas soluções linearmente independentes da equação linear homogénea*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Então, todas outras possíveis soluções dessa equação são dadas pela folrmula

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x), \tag{24}$$

onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias.

Já sabemos que

$$\boxed{\begin{array}{c} y_1 \text{ e } y_2 \\ \text{são soluções} \end{array}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{c} C_1y_1 + C_2y_2 \\ \text{com constantes arbitrárias} \\ \text{também é solução} \end{array}}$$

O teorema diz que a afirmação inversa também é válida. Nós omitimos a demonstração desta parte do teorema.

Definição . A solução (24) com duas constantes diferentes diz-se **solução geral da equação linear homogénea** .

Nota. *Para obter a solução geral* (24), *sabendo algumas duas soluções particulares* y_1 *e* y_2, *podem ser usadas só soluções* y_1 *e* y_2 *linearmente independentes.*

Notemos que o conjunto de qualquer duas soluções linearmente independentes, da equação homogénea, diz-se *sistema fundamental* desta equação .

Assim, o teorema anterior diz que para determinar todas as soluções possíveis da equação homogénea, é bastante saber qualquer uma sistema fundamental desta equação .

4.2. Estrutura da solução geral da equação linear não homogénea de ordem 2

Estudamos agora a equação linear não homogénea:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x). \tag{25}$$

Para obter a solução geral (isto é, todas as soluções possíveis) desta equação , **é bastante** saber o sequinte:
1) a solução geral $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ da equação linear homogénea;
2) alguma solução particular y_{part} da equação linear não homogénea,
e então a solução geral da equação (24) é dada pela fórmula

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + y_{part}(x). \tag{26}$$

Demonstração da fórmula (26). Fazemos a substituição

$$y(x) = u(x) + y_{part}(x),$$

onde $u(x)$ é a nova função a procurar. Substituindo em (25), obtemos

$$u'' + p(x)u' + q(x)u + y''_{part} + p(x)y'_{part} + q(x)y_{part} = f(x).$$

Visto que y_{part} é solução da equação não homogénea, temos

$$y''_{part} + p(x)y'_{part} + q(x)y_{part} = f(x).$$

Portanto obtemos

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = 0.$$

Assim a função $u(x)$ deve ser solução arbitrária da equação homogénea não linear. Então

$$u(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + y_{part}(x),$$

o que prova a fórmula (26).

5. Resolução das equações lineares com coeficientes constantes

Estudamos o caso quando os coeficientes da equação , $p(x)$ e $q(x)$ são constantes:

$$p(x) \equiv p = const, \qquad q(x) \equiv q - const.$$

Nos tratamos equações com coeficientes p e q constantes. Sublinhamos que nós sempre procuramos soluções reais.

Neste caso, a equação linear

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{27}$$

com coeficientes constantes pode ser resolvida em forma implícita por meio de integração .

De acordo com a fórmula geral (26), é necessário saber umas duas soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ da equação homogénea

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{28}$$

5.1. Resolução da equação linear homogénea (28).

A ideia de procura das soluções $y_1(x)$ **e** $y_2(x)$. Procuramos uma solução $y(x)$ da equação (28) em forma

$$y = e^{\lambda x},$$

onde o expoente λ desconhecido está a procurar. Substitiuimos na equação e obtemos e

$$e^{\lambda x}(\lambda^2 + p\lambda + q) = 0.$$

Daqui

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \tag{29}$$

Assim, a função $e^{\lambda x}$ é solução da equação (28), se λ é uma raíz da equação quadrática (29).

Definição . A equação quadrática (29) diz-se *equação característica* correspondente a equação diferencial (28).

Resolvendo a equação característica, obtemos, em geral, os dois valores possíveis para λ:

$$\lambda = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

No caso $p^2 - 4q < 0$, estes valores sõ complexas, não reais. Nós procuramos soluções $y(x)$ reais. Portanto podemos usar só valores reais de λ. Portanto no caso quando λ é complexo, será necessário modificar a nossa abordagem.

1^o caso: $p^2 - 4q > 0$ **- temos raízes reais diferentes,** $\lambda_1 \neq \lambda_2$**.**

Neste caso temos as duas soluções

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} \qquad \text{e} \qquad y_2 = e^{\lambda_2 x}.$$

Estas funções são linearmente independentes, visto que $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

CONCLUSÃO. A solução geral da equação
$$y'' + py' + qy = 0$$
no caso $p^2 - 4q > 0$ é dada pela fórmula
$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$
onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias e
λ_1 e λ_2 são as raízes da equação característica
$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0.$$

2^o caso: $p^2 - 4q = 0$ - temos raízes reais coincidentes, $\lambda_1 = \lambda_2$.

Neste caso, via a eqyação característica nós obtemos só uma solução

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad \lambda_1 = -\frac{p}{2}.$$

Vamos mostrar que a outra solução , neste caso, é a função

$$y_2 = xe^{\lambda_1 x}.$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} y &= xe^{\lambda_1 x}, \\ y' &= e^{\lambda_1 x}(1 + \lambda_1 x), \\ y'' &= e^{\lambda_1 x}(2\lambda_1 + \lambda_1^2 x). \end{aligned}$$

Substituindo na equação , depois de simpificação obtemos

$$(\lambda_1^2 + p\lambda_1 + q)x + (2\lambda_1 + p) = 0$$

o que é realmente válido, visto que $\lambda_1^2 + p\lambda_1 + q$ e $\lambda_1 = -\frac{p}{2}$ no caso $p^2 - 4q = 0$.

CONCLUSÃO. A solução geral da equação
$$y'' + py' + qy = 0$$
no caso $p^2 - 4q = 0$ é dada pela fórmula
$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda_1 x}$$
onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias e
$\lambda_1 = -\frac{p}{2}$ é a raíz (única) da equação característica
$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0.$$

3^o caso: $p^2 - 4q < 0$ - temos raízes reais complexas conjugadas, $\lambda = a \pm bi,\ b \neq 0$. Neste caso formalmente temos

$$e^{\lambda x} = e^{(a \pm bi)x} = e^{ax} e^{\pm bix}.$$

Usamos a fórmula de Euler:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i sen\,\varphi.$$

De acordo com esta fórmula obtemos

$$e^{\lambda x} = e^{ax}\cos(bx) \pm i e^{ax} sen\, bx.$$

A nossa ideia agora é usar os componentes reais $e^{ax}\cos(bx)$ e $e^{ax} sen\, bx$, em vez das funções complexas $e^{ax}\cos(bx) \pm i e^{ax} sen\, bx$.

Como os coeficientes p e q são reais, é fácil ver que a parte real $e^{ax}\cos(bx)$ e parte imaginária $e^{ax} sen\,(bx)$ da solução complexa $e^{(a \pm bi)x}$, também são soluções da equação homogénea. Visto que $b \neq 0$, é claro que essas soluções $e^{ax}\cos(bx)$ e $e^{ax} sen\,(bx)$ são linearmente independentes. Então nós chegamos a conclusão seguinte.

CONCLUSÃO. A solução geral da equação
$$y'' + py' + qy = 0$$
no caso $p^2 - 4q < 0$ é dada pela fórmula
$$y(x) = [C_1\cos(bx) + C_2 sen\,(bx)]e^{ax}$$
onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias e
a e b são partes real e imaginária
das raízes complexas $\lambda = a \pm b$ da equação característica
$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0.$$

Exemplos

Exemplo 1. Resolver a equação $y'' - 5y' + 6y = 0$.

A equação característica é

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \quad \text{com as raízes} \quad \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3.$$

Portanto a solução geral é

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

Exemplo 2. Resolver a equação $y'' - 10y' + 25y = 0$.

A equação característica é

$$\lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0 \quad \text{com a raíz única} \quad \lambda = 5.$$

Portanto a solução geral é

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{5x}.$$

Exemplo 3. Resolver a equação $y'' - 2y' + 5y = 0$.

A equação característica é

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \quad \text{com as raízes complexas} \quad \lambda = 1 \pm 2i.$$

Portanto a solução geral é

$$y(x) = [C_1 \cos(2x) + C_2 sen\,(2x)]e^x.$$

5.2. Resolução da equação linear não homogénea (28).

Agora estudamos a equação linear, com coeficientes constantes, não homogénea:

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{30}$$

Como já sabemos, para obter a solução geral desta equação , é bastante adicionar alguma solução particular y_{part} da equação não homogénea à solução geral da equação homogénea. A solução geral da equação homogénea, como sabemos, é construido por meio se funções exponenciais via rezolução da equção característica. Assim, basta saber uma solução particular y_{part} da equação não homogénea. Em seguida nós mostraremos que é possível determinar tal solução y_{part}, por meio de integracao, no caso de qualquer lado direito $f(x)$. Mas agora começamos do caso quando o lado direito tem a forma mais simples: pode ser função exponencial com polínomio. Neste caso a solução particular y_{part} da equação não honogénea pode ser determinado sem integração , usanso so operações algébricas.

Procura da solução particular y_{part} no caso de funções $f(x)$ específicas

O caso quando $f(x)$ é função exponencial

Assim, consideramos a equação

$$y'' + py' + qy = Ae^{\alpha x} \tag{31}$$

onde A e α são constantes dadas. Temos de procurar uma solução particular desta equação . É possível encontrar tal solução na forma semelhante ao lado direito, isto é,

$$y_{part} = Ce^{\alpha x}$$

com coeficiente C indeterminado. Para determinar este coeficiente C, substituimos $y = Ce^{\alpha x}$ na equação e obtemos

$$C(\alpha^2 + p\alpha + q)e^{\alpha x} = Ae^{\alpha x}.$$

Então,

$$C = \frac{A}{\alpha^2 + p\alpha + q} \tag{32}$$

supondo que $\alpha^2 + p\alpha + q \neq 0$, isto é, supondo que o expoente dado α não é raíz da equação característica.

CONCLUSÃO. Se α não é raíz da equação característica
$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0,$$
a equação $y'' + py' + qy = Ae^{\alpha x}$
tem solução particular $y_{part}(x) = Ce^{\alpha x}$
com $C = \frac{A}{\alpha^2 + p\alpha + q}$

Exemplo 1. Resolver a equção $y'' - 6y' + 8y = 2e^{3x}$.

A equação característica
$$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$$
tem as raízes $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 4$. Portanto, a solução geral da equação homogénea é
$$C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x}.$$
Como $\alpha = 3$ não é raíz da equação característica, podemos usar a conclusão anterior e procuramos a solução particular y_{part} da equção não homogénea na forma
$$y = Ce^{3x}.$$
Depois de cálculo fácil, obtemos
$$C = -2$$
e então a solução geral da equação dada é
$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x} - 2e^{3x},$$
onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias.

Nota. Da mesma maneira é possível procurar uma solução particular no caso quando o lado direito é a soma de várias funções exponenciais, não só uma função exponencial. Esta possibilidade basea-se na observação seguinte.

Observação . Sejam $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ e $y^1_{part}(x)$ e $y^2_{part}(x)$ soluções particulares das equações
$$y'' + py' + qy = f_1(x),$$
$$y'' + py' + qy = f_2(x).$$
Então $y^1_{part}(x) + y^2_{part}(x)$ é solução particular da equação
$$y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x).$$

Exemplo. Resolver a equação $y'' - 5y' + 6y = e^x - 4e^{-2x}$.

A equação característica
$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

tem as raízes $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$. Portanto, a solução geral da equação homogénea é

$$C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

Os expoentes $\alpha = 1$ e $\alpha = -2$, que encontram-se no lado direito, não são raízes da equacão característica. Portanto, podemos procurar a solução y_{part} da equação não homogénea em forma das funções exponenciais também. De acordo com a observação feita, podemos procurar esta solução y_{part} em forma $y_{part} = y_1 + y_2$, onde a solução particular y_1 corresponde ao termo e^x e a solução y_2 - ao termo $-4e^{-2x}$. Depois de cálculo directo, temos

$$y_1 = Ce^x \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{1}{2},$$

$$y_2 = Ce^{-2x} \quad \Longrightarrow \quad C = -\frac{1}{5}.$$

Assim, a solução geral da equação dada é

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{2} e^x = \frac{1}{5} e^{-2x}.$$

O caso quando $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$

Da mesma maneira é possível determinar uma solução particular da equação não homogénea no caso quando o lado direito $f(x)$ da equação tem a forma

$$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x},$$

onde $P_n(x)$ é um polinómio de grau n e α não é raíz da equação característica. Neste caso, a solução particular y_{part} procura-se na forma

$$y = Q_n(x)e^{\alpha x}$$

onde $Q_n(x)$ é o polinómio da mesma grau n, com coeficientes indeterminados.

Por exemplo, se $f(x) = (5x - 1)e^{7x}$, procuramos a solução particular em forma

$$y = (Ax + B)e^{7x}$$

onde A e B estão a ser determinados.

Vamos considerar um exemplo

Exemplo. Resolver a equação $y'' - 7y' + 10y = xe^{3x}$.

A equação característica

$$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

tem as raízes $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 5$. Portanto, a solução geral da equação homogénea é

$$C_1 e^{2x} + C_2 e^{5x}.$$

O expoente $\alpha = 3$ que encontra-se no lado direito, não é raíz da equacão característica. Portanto, podemos procurar a solução y_{part} da equação $y'' - 7y' + 10y = xe^{3x}$ em forma

$$y = (Ax + B)e^{3x}. \tag{33}$$

Nota. Observamos que em (33) usamos duas constantes indeterminadas, como deve ser no caso de polinómio de grau 1, embora no lado direito $f(x) = xe^{3x}$ temso só um termo x.

Substituindo $y = (Ax + B)e^{3x}$ na equação $y'' - 7y' + 10y = xe^{3x}$, depois de cálculo simples obtemos que

$$A = -\frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{4}$$

e então

$$y_{part} = \frac{1}{4}(1 - 2x)e^{3x}$$

e a solução geral é

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{5x} + \frac{1}{4}(1 - 2x)e^{3x}.$$

Nota. Observamos que no caso $f(x) = P_n(x)$, o métodi exposto é aplicável, se o número $\alpha = 0$ n
ao é raíz da equação característica.

Exemplo. Resolver a equação $y'' + 3y' + 2y = 3x + 1$.

A equação característica

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

tem as raízes $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = -1$. A solução geral da equação homogénea é

$$C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}.$$

O número 0 não é raíz da equação característica. Portanto, podemos procurar a solução y_{part} em forma $y = Ax + B$. Substituimos na equação e depois de cálculo directo obtemos

$$A = \frac{3}{2}, \quad B = -\frac{7}{4}.$$

Então a solução geral é

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + \frac{3x - 14}{4}.$$

O caso quando o expoente correspondente coincide com uma daz raízes da equação característica

Neste caso náo vamos estudar o assunto em forma geral, mas explicamos uma ideia considerando uns exemplos.

Exemplo 1. Resolver a equação $y'' - 7y' + 6y = 5e^{6x}$.

A equação característica

$$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$$

tem as raízes $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 6$. A solução geral da equação homogénea é

$$C_1 e^x + C_2 e^{6x}.$$

O número $\alpha = 6$ no expoente no lado direito coincide com a raíz $\lambda_2 = 6$ da equação característica. Portanto, já não podemos procurar a solução y_{part} em forma $y = Ae^{6x}$.

Mas vamos procurar na forma

$$y = Axe^{6x}.$$

Substituindo na equação , depois de cálculo obtemos

$$A = 1.$$

Então a solução geral é

$$y = C_1 e^x + (C_2 + x)e^{6x}.$$

Exemplo 2. Resolver a equação $y'' - 8y' + 16y = 12e^{4x}$.

A equação característica

$$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$$

tem as raízes $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$ coincidentes e o número $\alpha = 4$ no expoente no lado direito também coincide com essas raízes coincidentes.

Neste caso a procura da solução particular y_{part} na forma

$$y = Axe^{6x}$$

já não ajuda. Mas vamos procurar na forma

$$y = Ax^2 e^{6x}$$

Substituindo na equação , depois de cálculo obtemos

$$A = 6.$$

Então a solução geral é

$$y = (C_1 + C_2 x + 6x^2)e^{6x}.$$

Baseando nestes exemplos, chegamos a conclusão seguinte.

CONCLUSÃO. Se α coincide com **uma** das raízes diferentes da equação característica $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, então a solução particular y_{part} da equação $y'' + py' + qy = Ae^{\alpha x}$ procura-se na forma $y(x) = Cxe^{\alpha x}$

CONCLUSÃO. Se a equação característica $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ tem as raízes coincidentes $\lambda_1 = \lambda_2$ e o expoente α coincide com elas, então a solução particular y_{part} da equação $y'' + py' + qy = Ae^{\alpha x}$ procura-se na forma $y(x) = Cx^2 e^{\alpha x}$

Procura da solução particular y_{part} no caso de qualquer lado direito $f(x)$

Mostraremos que a solução particular y_{part} da equção não homogénea sempre pode ser determinado por meio de integração , se sabemos alguma sistema fundamental $\{y_1(x), y_2(x)\}$ de soluções da equação homogénea.

A ideia é usar o método de variação de constantes C_1 e C_2 na fórmula

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

de solução geral da equação homogénea. Nomeadamente, procuramos a solução particular y_{part} na forma

$$y_{part} = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) \tag{34}$$

onde as funções $C_1(x)$ e $C_2(x)$ estão a ser determinadas.

Temos

$$\begin{aligned} y_{part} &= C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x), \\ y'_{part} &= C'_1(x)y_1(x) + C'_2(x)y_2(x) + C_1(x)y'_1(x) + C_2(x)y'_2(x). \end{aligned}$$

Escolhemos $C_1(x)$ e $C_2(x)$ de tal modo que

$$C'_1(x)y_1(x) + C'_2(x)y_2(x) = 0. \tag{35}$$

Então

$$y''_{part} = C'_1(x)y'_1(x) + C'_2(x)y'_2(x) + C''_1(x)y'_1(x) + C''_2(x)y'_2(x).$$

Substituindo $y_{part}, y'_{part}, y''_{part}$ na equação não homogénea, depois de simplificação obtemos

$$C'_1(x)y'_1(x) + C'_2(x)y'_2(x) = f(x).$$

Junto com a condição (35) temos o sistema

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} C'_1(x)y_1(x) + C'_2(x)y_2(x) = 0 \\ C'_1(x)y'_1(x) + C'_2(x)y'_2(x) = f(x). \end{array} \right.}$$

onde as funções $y_1(x), y_2(x)$ e as suas derivadas são dadas, e temos de determinar as derivadas $C_1'(x), C_2'(x)$. Relativamente $C_1'(x)$ e $C_2'(x)$ temos sistema algébrica. O determinante desse sistema é

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

Este determinante diz-se *Wronskiano*. É possível demonstar que este determinate é diferente de zero sempre quando $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções linearmente independentess da equação hoimogénea, o que tem lugar.

Portanto o sistema algébrica sempre é resolúvel e podemos determinar as derivadas $C_1'(x)$ e $C_2'(x)$. Passando às primitivas, podemos calcular e as funções próprias $C_1(x), C_2(x)$.

Exemplo. Resolver a equação $y'' + y = \frac{1}{sen\, x}$.

A equação característica é $\lambda^2 + 1 = 0$ com as raízes complexas $\lambda = \pm i$. Portanto o sistema fundamental de soluções da equção homogénea $y'' + y = 0$ é

$$y_1(x) = \cos x, \quad y_2(x) = sen\, x$$

e a solução geral da equação homogénea é

$$y = C_1 \cos x + C_2 sen\, x.$$

Procuramos a solução particular y_{part} da equação não homogénea por variação de constantes:

$$y_{part}(x) = C_1(x) \cos x + C_2(x) sen\, x.$$

Para tal temos de resolver os sitema algébrica (36), isto é,

$$\left\{ \begin{array}{c} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) sen\, x = 0 \\ -C_1'(x) sen\, x + C_2'(x) \cos x = \frac{1}{sen\, x}. \end{array} \right. \tag{36}$$

Resolvindo este sistema relativamente C_1', C_2', obtemos

$$C_1'(x) = -1, \quad C_2' = ctg\, x.$$

Então,

$$C_1(x) = -x, \quad C_2 = \ln(sen\, x)$$

e

$$y_{part}(x) = -x \cos x + sen\, x \ln(sen\, x).$$

Finalmente, a solução geral da equção dada é

$$y = C_1 \cos x + C_2 sen\, x - x \cos x + sen\, x \ln(sen\, x),$$

onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias.