
Electromagnetismo

2004/2005 – Eng. Física / Física e Química / Química
(antigo)

Compendium de conceitos e Fórmulas
(Versão de 13/9/2004)

Robertus Potting

UNIVERSIDADE DO ALGARVE
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Índice

1	Cálculo Vectorial Elementar	4
1.1	Notações	4
1.2	Conceitos Básicos	4
1.2.1	Operações bilineares	4
1.2.2	O operador $\vec{\nabla}$	4
1.2.3	Sucessivas Operações de $\vec{\nabla}$	5
1.2.4	Integração	5
1.3	Coordenadas Curvilíneas	6
1.3.1	Coordenadas Cilíndricas	6
1.3.2	Coordenadas Esféricas	7
1.4	Teoremas úteis para integrais	8
1.4.1	Integral de linha de um gradiente	8
1.4.2	Teorema de Stokes	9
1.4.3	Teorema da divergência	9
2	Electrostática	9
2.1	A lei de Coulomb e o campo electrostático	9
2.2	O potencial electrostático	10
2.3	A lei de Gauss	12
2.4	Distribuições contínuas de carga	14
2.5	A energia de uma distribuição de carga	15
2.6	Dipolos eléctricos	16
2.7	Força e momento de força	17
2.8	Equilíbrio electrostático de condutores	18
2.9	Condições de continuidade	18
2.10	Condutores carregados	20
2.10.1	O campo de uma esfera com raio a e potencial V	20
2.10.2	O método das imagens	20
2.10.3	Uma esfera condutora num campo uniforme	21
2.11	Capacidade	22
2.12	O condensador com placas paralelas	23
2.13	A energia electrostática de um condensador	23
3	Corrente Eléctrica	24
3.1	A natureza da corrente eléctrica	24
3.2	Densidade de corrente	24
3.3	A equação de continuidade	25

4	Campos magnéticos estáticos	26
4.1	A força de Lorentz	26
4.2	A lei de Gauss para para o campo magnético	27
4.3	A lei de Ampère	28
4.4	A força magnético numa corrente	29
4.5	A definição da unidade de corrente no SI	30
5	Campos magnéticos estáticos	31
5.1	O vector potencial e a lei de Biot e Savart	31
5.2	Dipolos magnéticos	32
6	Campos dependentes do tempo	34
6.1	A lei de indução de Faraday	34
6.2	As equações de Maxwell	36
6.3	Indutância	36
6.4	A energia magnética	38
7	Propriedades eléctricas da matéria	39
7.1	O campo de polarização	39
7.2	A distribuição de carga equivalente	40
7.3	O campo de deslocamento	42
7.4	A susceptibilidade eléctrica e a constante dieléctrica	43
7.5	A superfície de um isolador	43
7.6	Dieléctricos em condensadores	44
7.7	A energia electrostática em matéria	45
8	Propriedades magnéticas da matéria	46
8.1	Materiais magnéticas	46
8.2	Magnetização	47
8.3	A distribuição de corrente equivalente	47
8.4	A susceptibilidade magnética e a permeabilidade relativa	48
8.5	A energia magnética em matéria	49

1 Cálculo Vectorial Elementar

1.1 Notações

- **vectors unitários** \hat{i} , \hat{j} e \hat{k} são os vectores unitários nas direcções dos eixos positivos dos xx , yy , zz , satisfazendo

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = 0$$

- **vector de posição** $\vec{r} = (x, y, z) = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$ em que \hat{i} , \hat{j} e \hat{k} são os vectores unitários nas direcções dos eixos positivos dos xx , yy , zz .

1.2 Conceitos Básicos

No Electromagnetismo utilizaremos o conceito de *campos*, objectos que dependem do ponto $\vec{r} = (x, y, z)$ no espaço, e (as vezes) do tempo t . Utilizaremos os seguintes tipos de campos:

Campo escalar tem valores escalares (números reais) $\phi(\vec{r}) = \phi(x, y, z)$;

Campo vectorial tem valores vectoriais

$$\vec{A}(\vec{r}) = (A_x(x, y, z), A_y(x, y, z), A_z(x, y, z)) = \hat{i}A_x(x, y, z) + \hat{j}A_y(x, y, z) + \hat{k}A_z(x, y, z)$$

1.2.1 Operações bilineares

Produto escalar entre dois campos vectoriais \vec{A} e \vec{B} :

$$(\vec{A} \cdot \vec{B})(\vec{r}) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Produto vectorial entre dois campos vectoriais \vec{A} e \vec{B} :

$$(\vec{A} \times \vec{B})(\vec{r}) = \hat{i}(A_y B_z - A_z B_y) + \hat{j}(A_z B_x - A_x B_z) + \hat{k}(A_x B_y - A_y B_x)$$

1.2.2 O operador $\vec{\nabla}$

é um operador diferencial vectorial:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Definem-se os seguintes operações:

O gradiente de um campo escalar resulta num campo vectorial:

$$\vec{\nabla} \phi = \hat{i} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial \phi}{\partial z}.$$

A **divergência** de um campo vectorial resulta num campo escalar:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

O **rotacional** de um campo vectorial resulta num campo vectorial:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \hat{i} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \hat{j} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right).$$

1.2.3 Sucessivas Operações de $\vec{\nabla}$

:

- O Laplaciano:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \phi) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \equiv \nabla^2 \phi$$

- Várias identidades:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \\ \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \phi) &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) &= 0. \end{aligned}$$

1.2.4 Integração

Integrais de linha de um campo vectorial \vec{A} ao longo de um caminho C :

$$\begin{aligned} \int_C \vec{A} \cdot d\vec{r} &= \int_C (\hat{i}A_x(x, y, z) + \hat{j}A_y(x, y, z) + \hat{k}A_z(x, y, z)) \cdot (\hat{i}dx + \hat{j}dy + \hat{k}dz) \\ &= \int_C (A_x dx + A_y dy + A_z dz) \end{aligned}$$

Integrais de superfície de um campo vectorial \vec{A} sobre uma superfície Σ :

$$\int_{\Sigma} \vec{A} \cdot d\vec{\sigma}$$

em que $d\vec{\sigma} = \hat{n}d\sigma$ represente um elemento infinitesimal da superfície Σ . Note que $d\vec{\sigma}$ está sempre normal a Σ , o seu sentido sendo para fora no caso de Σ ser uma superfície fechada.

Integrais de volume de uma campo escalar ϕ sobre um volume V :

$$\int_V \phi dV.$$

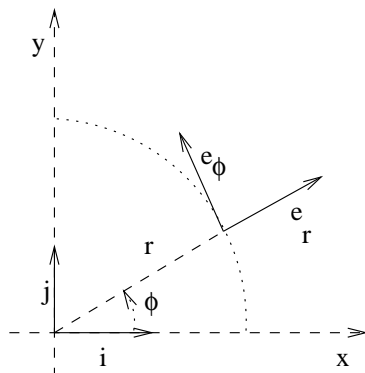


Figura 1: Coordenadas cilíndricas.

1.3 Coordenadas Curvilíneas

1.3.1 Coordenadas Cilíndricas

Em casos com simetria cilíndrica utiliza-se, normalmente, coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) , definidas pelas transformações

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi \\ y &= r \sin \phi \\ (z &= z), \end{aligned}$$

com as transformações inversas

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right). \end{aligned}$$

Os vectores unitários correspondentes são (ver Fig. 1)

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= \vec{i} \cos \phi + \vec{j} \sin \phi \\ \vec{e}_\phi &= -\vec{i} \sin \phi + \vec{j} \cos \phi \\ (\vec{e}_z &= \vec{k}). \end{aligned}$$

As operações de gradiente, divergência e rotacional ficam, em termos de coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \Psi &= \vec{e}_r \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \vec{e}_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} + \vec{e}_z \frac{\partial \Psi}{\partial z} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \vec{\nabla} \times \vec{A} &= \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r \vec{e}_\phi & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_r & r A_\phi & A_z \end{vmatrix} \end{aligned}$$

e o Laplaciano

$$\nabla^2\Psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}.$$

O deslocamento infinitesimal (integrais de linha) fica

$$\vec{dr} = \vec{e}_r dr + \vec{e}_\phi r d\phi + \vec{e}_z dz$$

e o elemento de volume (integrais de volume)

$$dV = r dr d\phi dz.$$

1.3.2 Coordenadas Esféricas

Em casos com simetria esférica utiliza-se, normalmente, coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) , definidas pelas transformações

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\phi \\ y &= r \sin\theta \sin\phi \\ z &= r \cos\theta, \end{aligned}$$

com as transformações inversas

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta &= \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right) \\ \phi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right). \end{aligned}$$

Os vectores unitários correspondentes são (ver Fig. 2)

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= \vec{i} \sin\theta \cos\phi + \vec{j} \sin\theta \sin\phi + \vec{k} \cos\theta \\ \vec{e}_\theta &= \vec{i} \cos\theta \cos\phi + \vec{j} \cos\theta \sin\phi - \vec{k} \sin\theta \\ \vec{e}_\phi &= -\vec{i} \sin\phi + \vec{j} \cos\phi \end{aligned}$$

As operações de gradiente, divergência e rotacional ficam, em termos de coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\Psi &= \vec{e}_r \frac{\partial\Psi}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial\Psi}{\partial\theta} + \vec{e}_\phi \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\Psi}{\partial\phi} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + r \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta A_\theta) + r \frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} \right) \\ \vec{\nabla} \times \vec{A} &= \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\theta & r \sin\theta \vec{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi} \\ A_r & r A_\theta & r \sin\theta A_\phi \end{vmatrix} \end{aligned}$$

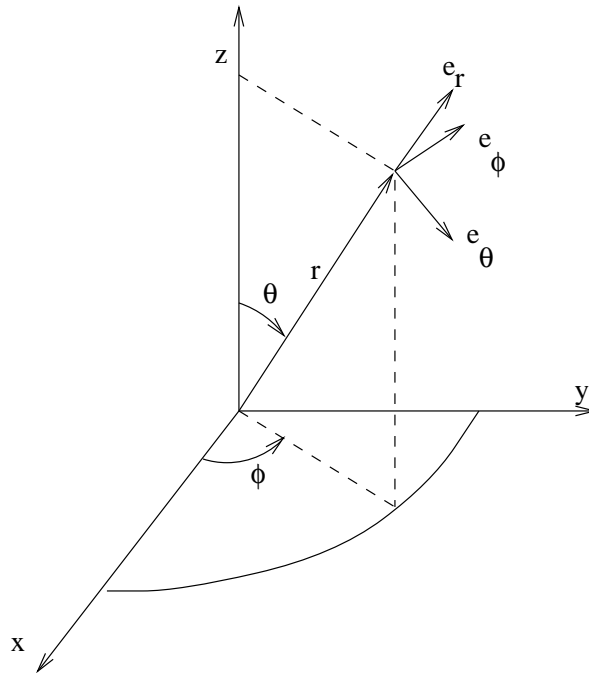


Figura 2: Coordenadas esféricas.

e o Laplaciano

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2}.$$

O deslocamento infinitesimal (integrais de linha) fica

$$d\vec{r} = \vec{e}_r dr + \vec{e}_\theta r d\theta + \vec{e}_\phi r \sin \theta d\phi$$

e o elemento de volume (integrais de volume)

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\phi d\theta.$$

1.4 Teoremas úteis para integrais

1.4.1 Integral de linha de um gradiente

Sendo

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla} \Psi) \cdot d\vec{r} &= \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Psi}{\partial z} dz \\ &= d\Psi \end{aligned}$$

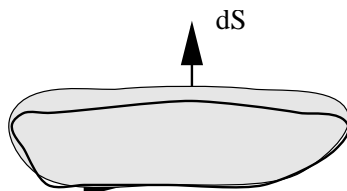


Figura 3: Teorema de Stokes.

temos

$$\int_{C(A,B)} (\vec{\nabla}\Psi) \cdot d\vec{r} = \int_{C(A,B)} d\Psi = \Psi(B) - \Psi(A).$$

Aqui $C(A, B)$ é um caminho arbitrário do ponto A para o ponto B . (Note que o resultado não depende do caminho, só dos pontos inicial e final!)

Este resultado é a generalização da fórmula

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

1.4.2 Teorema de Stokes

A generalização da fórmula anterior para duas dimensões é o teorema de Stokes:

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \int_{\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{r}.$$

Aqui S é uma superfície arbitrária com fronteira ∂S , o que é sempre um caminho fechado. O integral sobre ∂S deve ser percorrido no sentido relacionado com o sentido de $d\vec{S}$ pela regra da mão direita (ver figura).

1.4.3 Teorema da divergência

A generalização da fórmula anterior para três dimensões é o teorema da divergência:

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})dV = \int_{\partial V} \vec{A} \cdot d\vec{S}.$$

Aqui V é um volume arbitrário com fronteira ∂V , o que é sempre uma superfície fechada. O sentido do vector $d\vec{S}$ é sempre para fora do volume V .

2 Electrostática

2.1 A lei de Coulomb e o campo electrostático

Propriedade fundamental dos constituintes da matéria: *carga eléctrica*. Carga eléctrica do electrão: $-e$; carga eléctrica de núcleos atómicos $+Ze$, $Z = 1, 2, 3, \dots$

é o número atómico. Assim a carga eléctrica é quantizada em termos da unidade de carga fundamental e . A carga eléctrica total é sempre conservada em qualquer processo na Natureza.

Unidade de carga no Sistema Internacional (SI) é o Coulomb (C), cuja definição será dada mais tarde:

$$e = (1,602176462 \pm 0,000000063) \times 10^{-19} C$$

Força electrostática que actua numa carga Q_2 na posição \vec{r}_2 devido a uma carga Q_1 na posição \vec{r}_1 :

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

A constante ϵ_0 tem o valor (exacto)

$$\begin{aligned} \epsilon_0 &= \frac{1}{\mu_0 c^2} \quad \text{com } \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{Ns}^2\text{C}^{-2} \\ &= 8,854187187 \dots \times 10^{-12} \text{C}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2} \end{aligned}$$

A força de Coulomb é repulsiva se Q_1 e Q_2 têm o mesmo sinal, atractiva se Q_1 e Q_2 têm sinal contrário.

Pelo *princípio de sobreposição* a força electrostática total sobre uma carga q numa posição \vec{r} devido à presença de cargas Q_i ($i = 1, 2, \dots, N$) colocadas nas posições \vec{r}_i é a soma vectorial das forças sobre q devido às cargas individuais:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{qQ_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i)$$

ou

$$\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r})$$

no qual

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i)$$

chama-se *o campo electrostático* (ou também *o campo eléctrico*) causada pelo conjunto das cargas Q_i . Note que $\vec{E}(\vec{r})$ é um campo vectorial. A carga q chama-se neste caso a *carga de teste*; $\vec{E}(\vec{r})$ é independente de q .

Unidade SI do campo electrostático: 1 N/C.

2.2 O potencial electrostático

Podemos escrever

$$\frac{\vec{r}}{r^3} = \vec{e}_r \frac{1}{r^2} = \vec{\nabla} \left(-\frac{1}{r} \right)$$

ou também

$$\frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} = \vec{\nabla} \left(-\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \right)$$

de modo que

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r})$$

no qual

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

é o *potencial electrostático* devido às cargas Q_i . $\Phi(\vec{r})$ é um campo escalar.

Unidade SI do potencial electrostático: $1 \text{ J/C} \equiv 1 \text{ V}$ (Volt).

O trabalho efectuado pela força electrostático enquanto q se desloca de r_1 para r_2 ao longo de um caminho C :

$$\begin{aligned} W &= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= q \int_C \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \\ &= -q \int_C (\vec{\nabla}\Phi(\vec{r})) \cdot d\vec{r} \\ &= -q(\Phi(\vec{r}_2) - \Phi(\vec{r}_1)) \end{aligned}$$

o que não depende do caminho C , só dos pontos inicial e final. Então a força electrostática é *conservativa*, e sabemos da mecânica que podemos definir uma energia potencial $U(\vec{r})$ tal que

$$W = U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2).$$

Logo podemos identificar

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{U(\vec{r})}{q},$$

o potencial electrostática é a a energia potencial por unidade da carga de teste.

Da identidade $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r})$ temos que

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = 0$$

é sempre satisfeita *na electrostática*.

Uma maneira útil de visualizar o campo eléctrico é de usar *linhas do campo*, que são relacionadas com o campo eléctrico de tal maneira que, em qualquer ponto, a linha do campo que passa pelo ponto é tangente ao campo eléctrico nesse ponto. O sentido do campo é indicado nas linhas do campo com uma seta.

Suponha que $d\vec{r}$ é um deslocamento infinitesimal normal à direcção do campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r})$ num ponto \vec{r} . A variação correspondente do potencial eléctrico é

$$d\Phi \equiv \Phi(\vec{r} + d\vec{r}) - \Phi(\vec{r}) = \vec{\nabla}\Phi \cdot d\vec{r} = -\vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

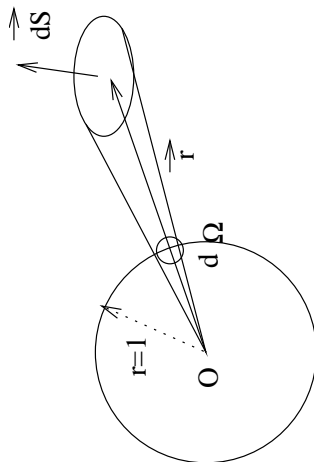


Figura 4: A relação entre o fluxo eléctrico através da superfície e o ângulo sólido.

o que implica que o potencial mantém-se constante nas direcções normal a \vec{E} . Com outras palavras, as superfícies equipotenciais (em que o potencial tem um valor constante) são sempre normais ao campo eléctrico.

Por exemplo, para uma carga pontual positiva as linhas do campo são rectas direccionadas radialmente para fora a partir da posição da carga; para uma carga negativa as linhas estão direccionadas radialmente para dentro. Neste caso, as superfícies equipotenciais são esféricas. Deste exemplo vimos que as linhas do campo têm origem em cargas positivas e acabam em cargas negativas. As linhas do campo podem também continuar até ao infinito; isto pode acontecer no caso geral se a carga total é diferente de zero.

2.3 A lei de Gauss

O *fluxo eléctrico* através de uma superfície S é definido por

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}.$$

A *lei de Gauss* relaciona o fluxo por uma superfície *fechada* com a carga no volume dentro da superfície. Precisamente

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$$

em que Q_{in} é a carga total dentro de S .

Para mostrar isto consideramos uma carga Q dentro de S . Escolhemos as coordenadas tal que Q fica na origem, o campo eléctrico é

$$\vec{E}(\vec{r}) = Q \frac{\hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

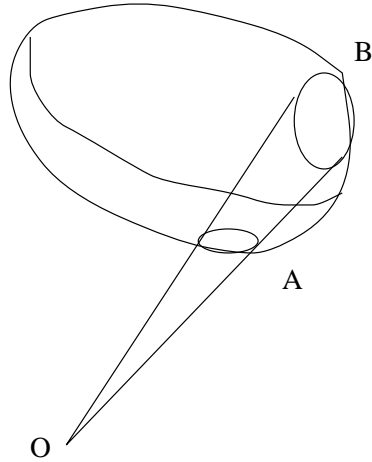


Figura 5: O fluxo eléctrico para uma carga fora da superfície é zero devido à anulação das duas contribuições em A e B.

Assim,

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r} \cdot d\vec{S}}{r^2},$$

sendo $\hat{r} \cdot d\vec{S}$ a projecção radial de $d\vec{S}$. A expressão $d\Omega \equiv \hat{r} \cdot d\vec{S}/r^2$ é sem dimensão e é igual ao ângulo sólido do cone com bico na origem e base $d\vec{S}$ (ver figura). Então

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

sendo o ângulo sólido integrado sobre todas as direcções igual a 4π .

Para uma carga Q fora do volume encerrada pela superfície, o cone vai cortar S duas vezes (ver figura), e então temos duas contribuições, uma onde o cone entra para dentro do volume, outra onde sai do volume. A contribuição da última é proporcional com $d\Omega$ como acima, mas a primeira é proporcional com $-d\Omega$ (uma vez que a projecção radial de $d\vec{S}$ aponta para a origem, e não para fora). Assim, as contribuições sempre anulam.

Logo, mostrámos que, para uma carga Q , o fluxo eléctrico através da superfície fechada S é

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \begin{cases} \frac{Q}{\epsilon_0} & \text{se a carga está dentro de } S; \\ 0 & \text{se a carga está fora de } S. \end{cases}$$

Adicionando as contribuições de todas as cargas obtém-se a lei de Gauss anunciada.

Uma medida do fluxo eléctrico através de uma superfície é o número de linhas do campo que passam através da superfície. Por exemplo, pela lei de Gauss o fluxo que atravessa uma superfície envolvendo uma carga pontual q é q/ϵ_0 ,

independente da forma da superfície, o que é consistente com o facto que todas as linhas do campo que têm origem na carga atravessam a superfície.

2.4 Distribuições contínuas de carga

Para objectos macroscópicas não é prático tomar em conta todas as cargas pontuais (núcleos, electrões) em que consiste o material. Neste caso, descrevemos a distribuição das cargas por uma *densidade de carga* $\rho(\vec{r})$ que é definida como o limite da carga por unidade de volume se o volume tende para zero:

$$\rho(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V}.$$

Se estejamos só interessados em efeitos macroscópicas (o que normalmente é o caso) o volume ΔV não devia ser tomado estritamente para zero, mas devia sempre conter um número grande de cargas, para que obtermos um limite suave.

Obtemos, então,

$$\Delta q = \rho \Delta V$$

para a carga dentro de um pequeno volume ΔV . A carga total dentro de um volume arbitrário é dada pelo integral

$$Q = \int_V \rho(\vec{r}) dV.$$

A lei de Gauss para uma distribuição de carga pode, então, ser escrita como

$$\int_{S=\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}) dV.$$

Pelo teorema da divergência obtemos

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}) dV.$$

Isto é verdadeiro para qualquer volume V , portanto

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

que é a lei de Gauss na forma local. Com $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$ temos também

$$\nabla^2 \Phi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0},$$

a *equação de Poisson* para o potencial electrostático.

Para uma distribuição contínua, a fórmula $\Phi(\vec{r}) = \sum_i Q_i / (4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|)$ torna-se

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV',$$

passando a soma sobre i para um integral, e identificando $Q_i \rightarrow \rho(\vec{r}')dV'$. Isto é a (única) solução da equação de Poisson tal que $\Phi(\vec{r}) \rightarrow 0$ se $|\vec{r}| \rightarrow \infty$. A solução geral é igual a esta solução mais qualquer solução da equação homogênea

$$\nabla^2\Phi(\vec{r}) = 0,$$

a equação de Laplace.

O conjunto das equações

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

descreve completamente as propriedades do campo electrostático. A primeira garante a existência de um potencial eléctrico Φ ; a segunda é equivalente à equação de Poisson para Φ e implica o princípio de sobreposição. A solução é equivalente à lei de Coulomb.

2.5 A energia de uma distribuição de carga

A energia potencial mútua de duas cargas pontuais Q_1 e Q_2 colocadas em \vec{r}_1 e \vec{r}_2 é

$$U_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}.$$

Isto é, então, o trabalho necessário para colocar as duas cargas nas respectivas posições, sendo ambas inicialmente colocadas a grande distância.

A generalização para N cargas envolve uma soma sobre todos os pares de cargas, então

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{i-1} \frac{Q_i Q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}.$$

Note que a soma é tal que $j < i$, para contar cada par de cargas uma vez. Isto pode ser reescrito

$$U = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j} \frac{Q_i Q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}.$$

Nesta expressão cada par é contado duas vezes, o que é compensado pelo factor $1/2$.

Passando para o caso de uma distribuição contínua de carga, $\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}$, $\vec{r}_j \rightarrow \vec{r}'$, $Q_i \rightarrow \rho(\vec{r})dV$ e $Q_j \rightarrow \rho(\vec{r}')dV'$:

$$\begin{aligned}U &= \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV dV' \\ &= \frac{1}{2} \int_V \rho(\vec{r})\Phi(\vec{r}) dV.\end{aligned}$$

Aqui V é um volume que engloba a distribuição de carga. Utilizando a lei de Gauss $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$:

$$\begin{aligned} U &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_V \Phi \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV \\ &= -\frac{\epsilon_0}{2} \int_V \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \Phi dV + \frac{\epsilon_0}{2} \int_V \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \Phi) dV \end{aligned}$$

(usando a regra de Leibnitz $\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \Phi) = \Phi \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \Phi$). O segundo termo do membro direito pode ser reescrito como um integral sobre a fronteira de V

$$\frac{\epsilon_0}{2} \int_{\partial V} \Phi \vec{E} \cdot d\vec{S}.$$

Escolhendo V uma esfera com raio R , temos para R grande: $|\vec{E}| \propto 1/R^2$ e $\Phi \propto 1/R$. Como a área da esfera é $4\pi R^2$, temos

$$\int_{\partial V} \Phi \vec{E} \cdot d\vec{S} \propto R^{-1}.$$

Assim, no limite $R \rightarrow \infty$ (V passa a englobar todo espaço), este termo desaparece. Ficamos com

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{todo espaço}} \vec{E} \cdot \vec{E} dV.$$

2.6 Dipolos eléctricos

Consideramos o caso em que haja uma distribuição de carga numa região do espaço, e queremos saber o potencial eléctrico num ponto \vec{r} longe dessa região. Neste caso, é muitas vezes vantajoso fazer uma *expansão multipolar*. Temos

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{(r^2 + (r')^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}')^{1/2}} dV' \end{aligned}$$

utilizando que

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^2 = (\vec{r} - \vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}') = r^2 + (r')^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'.$$

Escolhendo a origem das coordenadas dentro da região com a distribuição de carga, o requerimento que \vec{r} fica longe dessa região é

$$r = |\vec{r}| \gg r' = |\vec{r}'|.$$

Isto implica que a quantia $\frac{(r')^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} \ll 1$. Assim,

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = r^{-1} \left(1 + \frac{(r')^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} \right)^{-1/2} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

utilizando a expansão

$$(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + O(x^2)$$

que é válida para $x < 1$. Assim obtemos:

$$\Phi(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) + O\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

com a carga total

$$Q = \int \rho(\vec{r}') dV'$$

e

$$\vec{p} = \int \rho(\vec{r}') \vec{r}' dV'$$

é o momento dipolar eléctrico da distribuição de carga.

Exemplo: Duas carga pontuais, uma carga q em $\vec{r}_0 + \vec{d}$, outra carga $-q$ em \vec{r}_0 . O momento dipolar é

$$\vec{p} = \int \rho(\vec{r}') \vec{r}' dV' = q(\vec{r}_0 + \vec{d}) - q\vec{r}_0 = q\vec{d}.$$

Note que foi utilizada a identificação $\Delta Q = \rho \Delta V$, a carga total no volume ΔV . Neste caso o momento dipolar $\vec{p} = q\vec{d}$ não depende da posição \vec{r}_0 das cargas, somente da posição relativa entre as duas cargas. Isto sempre se verifica se a carga total é zero (aqui $q - q = 0$).

2.7 Força e momento de força

Considere uma distribuição de carga $\rho(\vec{r})$ que se encontra num campo eléctrico externo uniforme $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0$.

A força total sobre a distribuição é a soma das forças sobre todas as cargas:

$$\vec{F} = \int \vec{E}_0 \rho(\vec{r}) dV = Q \vec{E}_0$$

em que Q é a carga total.

O momento de força total é:

$$\vec{\tau} = \int \vec{r} \times (\vec{E}_0 \rho(\vec{r}) dV) = \left(\int \vec{r} \rho(\vec{r}) dV \right) \times \vec{E}_0 = \vec{p} \times \vec{E}_0.$$

O momento de força tem a tendência de alinhar o momento dipolar com o campo eléctrico.

A energia potencial da distribuição de carga no campo externo pode ser calculado a partir do potencial que corresponde com o campo externo \vec{E}_0 :

$$\Phi_{ext}(\vec{r}) = \Phi(\vec{0}) - \vec{E}_0 \cdot \vec{r}.$$

Aqui $\Phi(\vec{0})$ é o valor do potencial externo na origem. (Verifique que $\vec{E}_0 = -\vec{\nabla}\Phi_{ext}$.) Portanto a energia potencial é:

$$\begin{aligned} U &= \int \Phi_{ext}(\vec{r})\rho(\vec{r})dV \\ &= Q\Phi(\vec{0}) - \vec{p} \cdot \vec{E}_0 \end{aligned}$$

A energia potencial é mínima se o momento dipolar e o campo externo são paralelos.

2.8 Equilíbrio electrostático de condutores

Um *condutor* é um material que contém electrões, ou iões, que podem mover-se livremente dentro do material e transpor carga em resposta a um campo eléctrico externo. Num metal ou semiconductor essas cargas livres são electrões. Sempre se o campo eléctrico (médio) não for igual a zero em qualquer ponto dentro do material, as cargas livres vão mover em resposta à força electrostática (média). Assim, podemos concluir que, em equilíbrio electrostático, o campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r})$ será zero em qualquer ponto no interior do condutor. Qualquer tentativa de estabelecer um campo electrostático dentro do condutor vai induzir uma redistribuição de cargas livres, cuja contribuição ao campo eléctrico anula o campo externo.

Num *isolador* os electrões são todos ligados fortemente aos iões, não havendo qualquer corrente de cargas significativa em resposta a um campo electrostático externo. Assim, campos eléctricos externos podem existir dentro de um material isolador.

Pela lei de Gauss $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$ isto implica que teremos também $\rho(\vec{r}) = 0$ em qualquer ponto do interior do condutor. No entanto, é possível que haja uma densidade de carga *superficial*, retida dentro de algumas camadas atómicas na superfície do condutor. Define-se a densidade de carga superficial $\sigma(\vec{r})$ tal que $\sigma(\vec{r})\Delta S$ é a carga total associada com um elemento de superfície ΔS . A carga total no condutor será, então, $\int_{\partial V} \sigma dS$.

2.9 Condições de continuidade

O componente tangencial do campo eléctrico na superfície de um material (condutor ou não), ou na superfície entre dois materiais diferentes, é sempre contínuo. Para ver isso, utilizamos a propriedade do campo electrostático $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$. Pela teorema de Stokes, isto implica que

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0.$$

para qualquer caminho fechado Γ . Escolhendo o caminho indicado na figura 6, obtemos

$$0 = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r} \approx \vec{E}_1 \cdot \vec{l} - \vec{E}_2 \cdot \vec{l}$$



Figura 6: A continuidade do componente tangencial do campo eléctrico na superfície entre dois materiais diferentes. O caminho passa muito perto da superfície entre os materiais; a distância transversal é muito pequena.

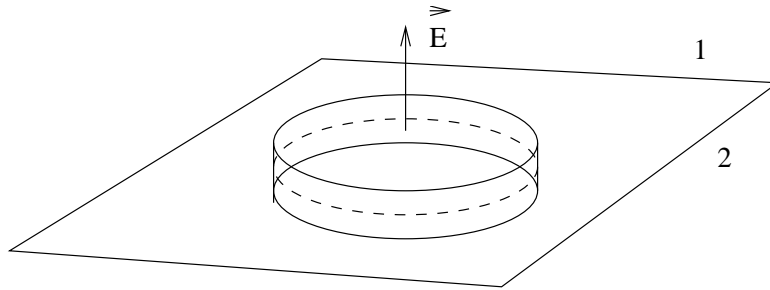


Figura 7: Determinação do campo eléctrico fora da superfície de um condutor utilizando a lei de Gauss.

em que \vec{l} é o vector tangencial à superfície definida pelo caminho Γ . Portanto a projecção tangencial (qualquer projecção tangencial!) do campo eléctrico é contínuo.

Aplicando isto ao caso de um condutor obtemos que

$$\vec{E} = E_n \hat{n} \quad (\text{superfície de um condutor})$$

(com \hat{n} o vector unitário normal à superfície) está sempre normal à superfície do condutor, uma vez que $\vec{E} = \vec{0}$ dentro do condutor. Utilizando a lei de Gauss num cilindro quase plano, com a superfície superior paralelo com, e justamente fora da superfície do condutor, e a superfície inferior dentro do condutor (ver figura 7), obtemos

$$E_n(\vec{r}) = \frac{\sigma(\vec{r})}{\epsilon_0}.$$

Uma vez que as superfícies equipotenciais estão normais a \vec{E} , concluímos que a superfície do condutor deve ser uma superfície equipotencial:

$$\Phi_{ext} = V (= \text{constante}).$$

Aqui Φ_{ext} é o potencial electrostático justamente fora do condutor. O potencial Φ_{int} no interior do condutor é também constante (como $\vec{E} = \vec{0}$), mas tem geralmente um valor diferente de Φ_{ext} , dependente dos detalhes da distribuição de carga nas camadas atómicas exteriores do condutor.

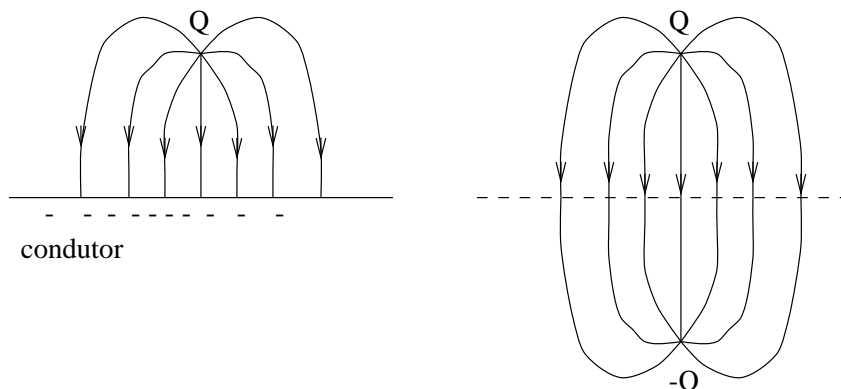


Figura 8: O método das imagens.

2.10 Condutores carregados

Problema fundamental da electrostática: considere um sistema de condutores, cada um com alguma carga total, ou algum potencial especificado, qual o campo eléctrico no espaço em volta dos condutores?

No espaço entre os condutores o potencial satisfaz a equação de Laplace:

$$\nabla^2\Phi = 0.$$

É possível mostrar que, se tivermos condições apropriadas especificadas na superfície dos condutores, há uma e só uma solução para o potencial (e então para o campo eléctrico) na região entre os condutores. Este resultado é conhecido como *o teorema da unicidade*.

Em vez de considerar este resultado na toda generalidade, consideremos algumas situações especiais.

2.10.1 O campo de uma esfera com raio a e potencial V

Consideramos também que o potencial no infinito é zero. Pela simetria esférica esperamos que $\Phi(\vec{r}) = \Phi(r) = C/r$, sendo isto o potencial devido a uma carga pontual (aqui C é uma constante). Da condição $\Phi(a) = V$, concluímos que $C = Va$. Esta solução satisfaz a equação de Laplace, bem como as condições em $r = a$ e $r \rightarrow \infty$.

2.10.2 O método das imagens

Isto é uma aplicação engenhosa do teorema da unicidade. Consideremos o caso de uma carga pontual Q numa distância d da superfície plana de um condutor (cujo comprimento é muito maior que d) a potencial zero (“ligada a Terra”).

A carga vai induzir uma densidade da carga superficial no condutor, de modo que o campo eléctrico resultante (devido à carga Q e à carga induzida) é zero

dentro do condutor. Para saber qual o potencial nos pontos acima do plano do condutor, consideramos uma situação fisicamente diferente (ver figura 8), em que não há o condutor, mas uma carga de imagem $-Q$, localizada no ponto numa distância d abaixo do plano que corresponde com a superfície do condutor (agora ausente). Escolhendo o plano xy a coincidir com a superfície do condutor, e a origem das coordenadas entre as duas cargas, as mesmas ficam então localizadas nos pontos $(0, 0, d) \equiv \vec{d}$ e $(0, 0, -d) \equiv -\vec{d}$. O potencial devido às duas cargas será:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{d}|} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} + \vec{d}|}.$$

Como para qualquer ponto no plano xy a distância até as cargas é igual, o potencial será zero nesses pontos; também verificamos que $\Phi(\vec{r}) \rightarrow 0$ se $r \rightarrow \infty$, e que $\nabla^2\Phi = 0$, sendo $\Phi(\vec{r})$ a soma de duas contribuições que ambos satisfazem a mesma equação. Isto mostre que a segunda situação, com a carga de imagem, satisfaz todas as condições da situação original, para a região $z > 0$ (acima da superfície do condutor). Pelo teorema da unicidade isto implica que o potencial acima referido então deve ser também aplicável para situação original (para a região $z > 0$)!

Usando a lei de Gauss podemos calcular a distribuição de carga superficial induzida na superfície do condutor:

$$\sigma(r) = \epsilon_0 E_z = -\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial z} \Phi(r, z)|_{z=0}.$$

Esta carga então induz um campo eléctrico que cancela exactamente o campo da carga Q .

Da equivalência com situação com a carga de imagem vimos também que a força atractiva entra a carga Q e o condutor é

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{(2d)^2}.$$

2.10.3 Uma esfera condutora num campo uniforme

Considere, como aplicação final do teorema da unicidade, uma esfera condutora colocada num campo eléctrico uniforme. O campo resultante será a soma do campo uniforme e um campo devido a carga superficial induzida na superfície do condutor, que será distribuída tal que o campo resultante no interior da esfera é exactamente zero. Isto implica que num lado da esfera deve haver uma carga superficial negativa, no outro lado uma carga positiva (sendo a carga total zero). Escolhemos coordenadas esféricas, com o eixo dos z ao longo do campo, tal que $\vec{E} = E_0\hat{z}$. O potencial do campo uniforme é

$$\Phi_0(\vec{r}) = -E_0z = -E_0r \cos \theta$$

(escolhendo $\Phi(r = 0) = 0$). A grande distância da esfera, o campo devido à distribuição de carga induzida é em primeira aproximação um campo dipolar; da simetria da situação o momento dipolar deve apontar na direcção do eixo zz : $\vec{p} = p\hat{z}$, logo $\vec{p} \cdot \vec{r} = pz = pr \cos \theta$. Então

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{r}) &= -E_0 r \cos \theta + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right) \\ &= \left(-E_0 r + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^2}\right) \cos \theta + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right).\end{aligned}$$

Agora para $r = a$ temos a condição que o potencial deve ser constante, ou seja, não devia depender de θ . Isto é o caso para a expressão acima, se e só se

$$p = 4\pi\epsilon_0 E_0 a^3.$$

Temos, então, uma solução que satisfaz a equação de Laplace bem como as condições à fronteira (note que, para $r \rightarrow \infty$, o campo eléctrico tende para o campo uniforme, como deve ser). Pelo teorema da unicidade concluímos que a solução deve ser, então, *exactamente*

$$\Phi(\vec{r}) = -E_0 \left(r - \frac{a^3}{r^2}\right) \cos \theta.$$

2.11 Capacidade

Considere um sistema de conductores colocados em posições fixas no espaço, todas mantidos a potencial zero (“ligados à Terra”), com excepção de um dos conductores (1). O espaço entre os conductores é vazio, ou é constituído de um material isolador. Se o potencial do condutor 1 for também zero, o potencial em todo espaço entre os conductores será zero também, e então isto corresponde com densidade de carga zero em qualquer ponto. Logo neste caso a carga no condutor 1 será zero. Suponha agora que colocarmos uma carga Q_1 no condutor 1. Isto vai provocar um potencial V_1 na superfície do condutor 1 (os outros conductores mantêm-se a potencial zero!). Se mudarmos a carga no condutor 1 para αQ_1 (α sendo um valor qualquer), pelo princípio da sobreposição o potencial na superfície do condutor 1 vai mudar para αV_1 . Assim, o que fica invariante é a razão

$$C = \frac{Q}{V},$$

a *capacidade* do sistema. A unidade SI da capacidade é Farad: $1 \text{ F} = 1 \text{ C/V}$.

Exemplo: Uma esfera isolada com raio a relativamente ao infinito: $V = Q/4\pi\epsilon_0 a$, então $C = 4\pi\epsilon_0 a$. Se $a = 1 \text{ cm}$, $C = 1,1 \times 10^{-12} \text{ F}$.

2.12 O condensador com placas paralelas

Condensadores são dispositivos para armazenar carga. O exemplo mais simples é o condensador com placas paralelas: duas placas paralelas, ambas de área A , separada a uma distância d . Normalmente $d \ll A$, de modo que podemos desprezar efeitos de fronteira. O potencial na região entre as placas é dado por

$$\Phi(z) = \frac{V}{d}z,$$

sendo colocada uma placa a $\Phi = 0$ de modo que a sua fronteira superior se encontra a $z = 0$, outra a $\Phi = V$ de modo que a sua fronteira inferior se encontra a $z = d$. É fácil verificar que esta função satisfaz a equação de Laplace. O campo eléctrico entre as placas é:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi = -\frac{V}{d}\hat{e}_z$$

e portanto a densidade de carga superficial na fronteira da placa a $\Phi = V$ é

$$\sigma = \epsilon_0 E_n = -\epsilon_0 E_z = \epsilon_0 \frac{V}{d}$$

(a densidade de carga na superfície da outra placa é $-\epsilon_0 V/d$). Assim, a carga total na placa superior será $Q = \epsilon_0 AV/d$, de modo que

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 A}{d}.$$

2.13 A energia electrostática de um condensador

Considere um condensador com capacidade C , com uma carga Q , tendo então uma diferença de potencial $V = Q/C$. Para aumentar o valor da carga por dq , é preciso transferir carga entre as placas. Por exemplo, retirar um electrão do condutor a $V = 0$ requer um trabalho W_1 , em que W_1 é a função de trabalho do condutor. Mover o electrão para a outra placa requer um trabalho $-eV$, e uma energia igual à função de trabalho W_2 é libertada quando o electrão é juntado à segunda placa. Assim, o trabalho total requerido para transferir o electrão será

$$W_1 - eV - W_2.$$

Supomos, por simplicidade, que as placas são feitas do mesmo material, neste caso $W_1 = W_2$, e então o trabalho total fica a ser $(-e)V = (dq)V$. Assim, o trabalho total necessário para encarregar o condensador (iniciando com as placas descarregadas) é

$$U = \int_0^Q V dq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C} = \frac{QV}{2} = \frac{CV^2}{2}.$$

Também se verifica facilmente que $U = \frac{\epsilon_0}{2} \int |\vec{E}|^2 dV$ (integrando sobre o volume entre as placas).

3 Corrente Eléctrica

Corrente eléctrica é constituída por cargas em movimento, e o processo do transporte de carga chama-se *condução*. Mais precisamente, a corrente I é definida pela carga transportada por unidade de tempo:

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

(sendo dQ a carga transportada no intervalo de tempo dt). A unidade SI da corrente é o Ampère: $1 \text{ A} = 1 \text{ C/s}$.

3.1 A natureza da corrente eléctrica

Num metal, os transportadores de carga são os electrões de valência, não (fortemente) ligados aos iões; os iões positivos ficam fixos na rede cristalina. Num electrólito, o transporte de carga é efectuado por iões positivos e/ou negativos. Note que os iões negativos movem-se na direcção oposta aos iões positivos; no entanto, contribuem a corrente na mesma direcção: a direcção de corrente corresponde à direcção do movimento dos iões positivos. Há também a possibilidade de correntes em plasmas, ou em gases durante uma descarga eléctrica.

Note que os transportadores de carga efectuem dois tipos de movimento: um movimento térmico e um movimento de *deriva*. O movimento térmico é aleatório, não resultando num transport organizado de carga. Só o movimento comum de deriva contribui à condução de corrente.

3.2 Densidade de corrente

Suponha que haja um tipo de transportador de carga q que contribui à corrente. Suponha ainda que, numa região do espaço, a densidade de de carga deste tipo é igual a ρ , e que a velocidade de deriva é \vec{v} . Podemos calcular a corrente que passa através de um elemento de superfície $\delta\vec{S}$ utilizando a figura 9. Durante um intervalo de tempo dt as cargas efectuam um deslocamento igual a $\vec{v}dt$. A carga que atravessa o elemento da área $\delta\vec{S}$ durante este intervalo de tempo será a carga total dentro do volume formado pela base $\delta\vec{S}$ e o deslocamento $\vec{v}dt$, indicado na figura 9. O referido volume é igual à base vezes altura:

$$dV = \delta S \cdot v dt \cos \theta = (\vec{v} \cdot \delta\vec{S}) dt.$$

A carga (do tipo considerado) dentro deste volume é

$$dQ = \rho dV,$$

logo a corrente δI que passa por $\delta\vec{S}$ será

$$\delta I = \frac{dQ}{dt} = \rho \vec{v} \cdot \delta\vec{S}.$$

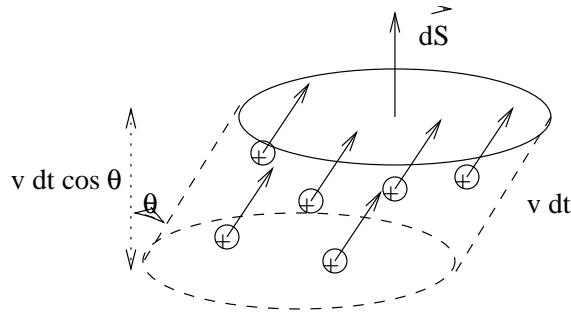


Figura 9: Determinação da corrente através de um elemento de área. Indicado são algumas cargas com a velocidade de deriva \vec{v} .

Caso que haja mais do que um tipo de transportador de carga q_i ($i = 1, \dots, n$) com densidade de carga ρ_i e velocidade de deriva \vec{v}_i a corrente será a soma das correntes dos respectivos tipos de carga:

$$\delta I = \frac{dQ}{dt} = \sum_{i=1}^n \rho_i \vec{v}_i \cdot \delta \vec{S}.$$

Define-se agora a *densidade de corrente*

$$\vec{J} = \sum_{i=1}^n \rho_i \vec{v}_i$$

que é um campo vectorial (uma vez que ρ_i é um campo vectorial e também \vec{v}_i pode depender do ponto no espaço). A unidade de \vec{J} é 1 A/m^2 . Podemos escrever

$$\delta I = \vec{J} \cdot \delta \vec{S}$$

para a corrente através $\delta \vec{S}$. Para a corrente por uma superfície arbitrária S teremos o integral

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}.$$

3.3 A equação de continuidade

Há um facto empírico fundamental que diz que carga eléctrica é conservada em qualquer processo na Natureza. Por exemplo, cargas podem mover-se de um ponto para o outro: a carga total mantém-se constante. Mesmo durante transformações entre diferentes tipos de matéria (reações químicas ou nucleares) é sempre conservada a carga total das partículas envolvidas. Esta conservação é *local*: qualquer mudança de carga num volume corresponderá com um transporte de carga para dentro (ou fora) deste volume, ou seja, corresponde com uma corrente. A consequência disto é que variação da densidade de carga $\rho(\vec{r})$ em

qualquer ponto estará relacionado com a densidade de corrente $\vec{J}(\vec{r})$ na região perto desse ponto.

Para ver isso melhor, consideremos um volume arbitrário V com fronteira S . A corrente eléctrica que passa para fora do volume V é

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J} dV$$

(usando o teorema da divergência). Isto deve ser igual à taxa de decrescimento da carga no volume V :

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV.$$

Se o volume V é fixo, podemos escrever

$$I = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV.$$

Combinando estas equações, e utilizando que o volume V é arbitrário, obtemos a equação da continuidade

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

4 Campos magnéticos estáticos

O magnetismo é um fenómeno conhecido desde pelo menos a idade clássica, exibido por alguns tipos de material (por exemplo, ferro) que podem ser “magnetizados”: imans. Muito especialmente a Terra é magnetizada, influenciando imans na Terra (por exemplo, a agulha numa bússola!). No século XIX descobriu-se que imans colocados na vizinhança de uma corrente sentem uma força. Investigações por Biot e Savart e por Ampère mostrou que duas correntes interagem entre si por forças magnéticas.

Para explicar os fenómenos magnéticos é natural introduzir o campo magnético $\vec{B}(\vec{r})$, que tem origem em imans e correntes no sistema, pelo qual os constituintes do sistema interagem.

4.1 A força de Lorentz

Suponha que uma carga q se move com velocidade \vec{v} numa região com campos eléctrico e magnético. As investigações dos físicos no século XIX revelou que esta carga sente uma força \vec{F} de acordo com a relação

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}),$$

a força de Lorentz, que consiste de uma força electrostática e uma força magnética. Assim, pela segunda lei de Newton a equação de movimento clássico de um

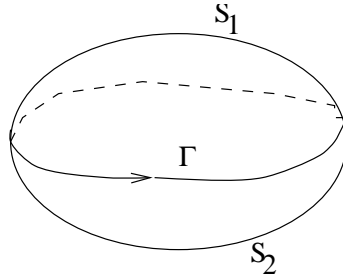


Figura 10: Os fluxos magnéticos através das superfícies S_1 e S_2 são iguais.

eléctron será¹

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}).$$

Podemos interpretar esta relação como a “definição operacional” de \vec{B} . A unidade de \vec{B} no sistema SI, 1 T(esla) é determinada pela mesma relação.

Note que o termo $\vec{v} \times \vec{B}$ está normal a \vec{v} e \vec{B} . Isto implica que a força do campo magnético não faz trabalho.

4.2 A lei de Gauss para o campo magnético

Sabemos que as fontes do campo eléctrico são cargas eléctricas. Em princípio seria possível a existência de cargas magnéticas (monopolos magnéticos), criando um campo magnético radial proporcional com $1/r^2$, como é o caso para o campo eléctrico. Apesar de muita procura experimental, tais cargas não têm sido observadas.² Assim, vamos supor que tais cargas não existem na prática. Agora, a lei de Gauss para o campo eléctrico tem, no membro direito, a densidade de carga eléctrica. Não havendo a densidade de carga magnética, teremos

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

para qualquer superfície fechada S . Na forma local temos (pela teorema da divergência)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0.$$

Isto implica que as linhas do campo magnético não podem ter início nem acabar em qualquer ponto (lembre que as linhas do campo eléctrico têm início e acabam em cargas).

Uma consequência disto é que o fluxo magnético através de uma superfície com fronteira orientada Γ s’o depende de Γ , ou seja, é igual para superfícies S_1

¹Não consideramos aqui “correções de radiação” que são proporcionais com $\ddot{\vec{v}}$.

²Com a possível excepção de uma vez, numa experiência feita em 1980.

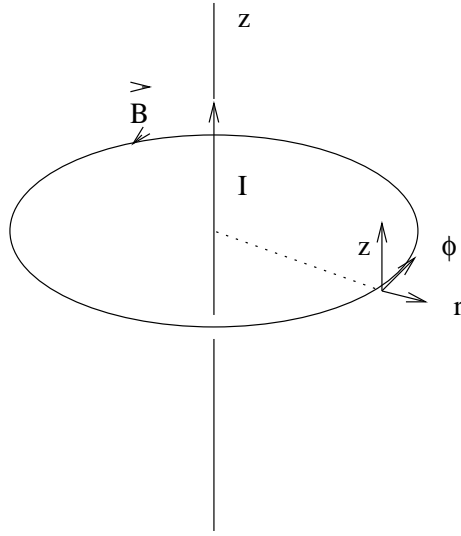


Figura 11: O campo magnético devido a uma corrente num fio longo e recto.

e S_2 com a mesma fronteira. [Prova: S_1 e S_2 podem ser considerados as duas partes de uma superfície fechada S , através do qual o fluxo total para fora é zero. Portanto, o fluxo para cima através de S_1 é igual ao fluxo para cima através de S_2 .]

4.3 A lei de Ampère

Na primeira metade do século XIX houve muitas investigações acerca do campo magnético criado por correntes em fios finos. Biot e Savart determinaram que o campo magnético devido a uma corrente num fio longo e reto gera um campo magnético que varia com a distância r até como $1/r$. Mais precisamente,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi}$$

em que μ_0 é uma constante chamada a *permeabilidade do vácuo* (ver figura 4.3). Suponha que temos um caminho fechado Γ_1 que encerra o corrente uma vez no sentido positivo (ver figura 4.3). O integral de linha $\oint_{\Gamma_1} \vec{B} \cdot d\vec{r}$ pode ser calculado com a expressão acima para \vec{B} e $d\vec{r} = dr\hat{r} + r d\phi\hat{\phi} + dz\hat{z}$, pelo qual

$$\oint_{\Gamma_1} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0}{2\pi} I d\phi = \mu_0 I.$$

Para um caminho Γ_0 que não encerra a corrente, os valores inicial e final da variável de integração ϕ serão iguais, pelo qual o integral dá zero. Geralmente, o integral será proporcional com o número de vezes que o caminho encerra a corrente no sentido positivo.

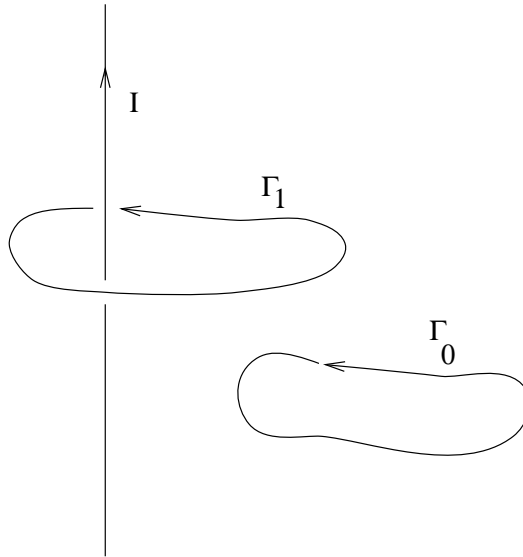


Figura 12: Caminhos fechados Γ_1 (encerrando a corrente) e Γ_0 (não encerrando a corrente).

Escolhendo uma superfície S com fronteira Γ_1 , teremos

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

e então

$$\oint_{\gamma_1} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}.$$

Usando o teorema de Stokes obtemos

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}.$$

Como isto é válido para qualquer superfície S , obtemos

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

a lei de Ampère.

4.4 A força magnético numa corrente

A força magnética num fio que leve uma corrente I é determinada pela força de Lorentz nas cargas individuais. Consideremos um (pequeno) elemento de fio com volume $\delta V = \delta \vec{S} \cdot \delta \vec{l}$. Neste volume a densidade de corrente $\vec{J} \propto \delta \vec{l}$ pode ser considerada aproximadamente constante. A força magnética sobre as cargas neste elemento é igual à soma das forças nas cargas individuais:

$$\delta \vec{F} = \sum_j q_j \vec{v}_j \times \vec{B}.$$

Caso que haja só um tipo de transportadores de carga com velocidade de deriva \vec{v} , temos

$$\begin{aligned}\sum_j q_j \vec{v}_j &= \sum_j q_j \cdot \vec{v} \\ &= (\text{carga dentro } \delta V) \cdot \vec{v} \\ &= \delta V \rho \vec{v}.\end{aligned}$$

Com mais do que um tipo de transportadores de carga, o factor $\rho \vec{v}$ no último termo passa a ser $\sum_i \rho_i \vec{v}_i \equiv \vec{J}$, em que o índice i indique os tipos de carga. Então

$$\begin{aligned}\sum_j q_j \vec{v}_j &= \delta V \vec{J} \\ &= (\delta \vec{S} \cdot \delta \vec{l}) \vec{J} \\ &= (\delta \vec{S} \cdot \vec{J}) \delta \vec{l} \\ &= I \delta \vec{l}.\end{aligned}$$

Aqui a troca entre $\delta \vec{l}$ e \vec{J} é permitida visto que têm a mesma direcção. Lembremos para o futuro a substituição $\vec{J} \delta V \rightarrow I \delta \vec{l}$ válida para uma corrente num fio fino.

Consequentemente, temos

$$\delta \vec{F} = I \delta \vec{l} \times \vec{B}$$

para a força sobre o elemento de fio. Note que $\delta \vec{F} \perp \delta \vec{l}$. A força magnética total num comprimento arbitrário de fio é

$$\vec{F} = I \int d\vec{l} \times \vec{B}.$$

4.5 A definição da unidade de corrente no SI

Considere dois fios finos longos e paralelos à distância r , levando correntes I_1 e I_2 na mesma direcção. O campo magnético devido à corrente I_1 é

$$\vec{B}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \hat{\phi}$$

(escolhendo o eixo dos zz ao longo da corrente I_1). Da fórmula $\vec{F} = I \int d\vec{l} \times \vec{B}$ vimos que a força sobre a corrente I_2 é direccionada para esquerda, ou seja, as correntes atraem-se, e tem magnitude por unidade de comprimento de I_2 :

$$\frac{F}{l} = I_2 |\vec{B}_1| = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{r}.$$

Nas unidades SI, a permeabilidade do vácuo μ_0 é *definida* por

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2.$$

Portanto duas correntes de 1 A numa distância de 1 m sentem uma força de atracção de $2 \times 10^{-7} \text{ N/m}$. Esta definição fixa as unidades SI da corrente (Ampère) e da carga (Coulomb).

5 Campos magnéticos estáticos

Nesta secção consideramos os campos magnéticos produzidos por correntes estacionárias em condutores, sem a presença de matéria magnética.

As equações básicas da magnetostática são as leis de Ampère e o teorema de Gauss:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0.\end{aligned}$$

5.1 O vector potencial e a lei de Biot e Savart

Para obter uma solução das equações acima, é muito útil introduzir um novo campo vectorial: a *vector potential* $\vec{A}(\vec{r})$, tal que

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}.$$

Isto resolve automaticamente a equação $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ (para qualquer campo \vec{A}). Não é difícil mostrar também que qualquer campo \vec{B} com divergência zero pode ser escrito como $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ para algum campo \vec{A} (ver problema no TP).

O campo \vec{A} não é único! Se $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, o campo

$$\vec{A}'(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) + \vec{\nabla}\chi(\vec{r}),$$

com $\chi(\vec{r})$ um campo escalar arbitrário, também satisfaz $\vec{B}' = \vec{\nabla} \times \vec{A}'$. A passagem $\vec{A} \rightarrow \vec{A}'$ é chamada uma *transformação de gauge* ou *transformação padrão*.

A lei de Ampère torna-se

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}.$$

É possível fazer uma transformação de gauge $\vec{A} \rightarrow \vec{A}'$ tal que \vec{A}' satisfaz uma condição, a *gauge de Coulomb* $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = 0$. Assim, a lei de Ampère fica

$$\nabla^2 \vec{A}' = -\mu_0 \vec{J}$$

(no seguimento suprimiremos a linha '), o que tem a forma da equação de Poisson para cada uma das componentes do vector potencial. Dada uma distribuição de corrente localizada, podemos obter a solução que satisfaz $\vec{A}'(\vec{r}) \rightarrow 0$ para $|\vec{r}| \rightarrow \infty$ por analogia com a solução para o potencial electrostático, substituindo $\Phi \rightarrow \vec{A}'$, $\rho \rightarrow \vec{J}$ e $\epsilon_0 \rightarrow \mu_0^{-1}$:

$$\vec{A}'(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'.$$

Note que esta solução satisfaz a condição de Coulomb, como deve ser:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\vec{\nabla}_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \cdot \vec{J}(\vec{r}') dV' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\frac{\vec{r}' - \vec{r}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) \cdot \vec{J}(\vec{r}') dV' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(-\vec{\nabla}_{r'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \cdot \vec{J}(\vec{r}') dV' \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\partial V} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{J}(\vec{r}') \cdot d\vec{S}' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \left(\vec{\nabla}_{r'} \cdot \vec{J}(\vec{r}') \right) dV' \\
&= 0
\end{aligned}$$

visto que $\vec{J}(\vec{r}') \rightarrow 0$ para $|\vec{r}'| \rightarrow \infty$ para uma distribuição de corrente localizada (∂V , a fronteira aqui pode ser considerada como uma superfície de uma esfera com raio que tende para infinito), e que $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\partial\rho/\partial t = 0$ numa situação estacionária.

Para o campo magnético obtemos

$$\begin{aligned}
\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{\nabla}_r \times \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\vec{\nabla}_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \times \vec{J}(\vec{r}') dV' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'
\end{aligned}$$

usando, na segunda equação, a identidade $\vec{\nabla} \times (\phi \vec{F}) = (\vec{\nabla} \phi) \times \vec{F} + \phi (\vec{\nabla} \times \vec{F})$.

Para uma corrente I num fio fino obtemos, utilizando a identificação $\vec{J} dV \rightarrow I d\vec{r}'$:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}.$$

Este resultado, a *lei de Biot e Savart*, foi determinado experimentalmente em 1820.

5.2 Dipolos magnéticos

É possível fazer uma expansão multipolar para o campo magnético gerado por uma distribuição localizada de corrente, semelhante à expansão para o campo eléctrico devido a uma distribuição localizada de carga. Consideremos aqui o caso de um circuito fechado com corrente I . Para o vector potencial temos:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \left(\frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} + \dots \right) d\vec{r}'.
\end{aligned}$$

Agora o primeiro termo é proporcional a

$$\oint d\vec{r}' = 0$$

visto que o circuito é fechado. Para calcular o segundo termo utilizamos que

$$d\vec{r}'(\vec{r} \cdot \vec{r}') = \frac{1}{2}(\vec{r}' \times d\vec{r}') \times \vec{r} + \frac{1}{2}d(\vec{r}'(\vec{r} \cdot \vec{r}'))$$

o que é uma consequência das identidades

$$(\vec{r}' \times d\vec{r}') \times \vec{r} = -\vec{r}'(\vec{r}' \cdot d\vec{r}') + d\vec{r}'(\vec{r}' \cdot \vec{r}')$$

e

$$d(\vec{r}'(\vec{r} \cdot \vec{r}')) = d\vec{r}'(\vec{r} \cdot \vec{r}') + \vec{r}'(\vec{r} \cdot d\vec{r}')$$

(consideramos aqui \vec{r} constante).

Logo

$$\begin{aligned}
\vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{2} \oint \frac{(\vec{r}' \times d\vec{r}') \times \vec{r}}{r^3} + \dots \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} + \dots
\end{aligned}$$

com

$$\vec{m} = \frac{I}{2} \oint \vec{r}' \times d\vec{r}' = \frac{1}{2} \int \vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}') dV'$$

o *momento dipolar magnético*. Note que o termo monopolar é ausente para o campo magnético.

Para o campo magnético obtemos

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left[\frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{m} \right] + \dots$$

Se o circuito é um laço plano, o momento magnético é

$$\vec{m} = \frac{I}{2} \oint \vec{r}' \times d\vec{r}' = I \int d\vec{S}$$

em que o integral final é sobre a superfície encerrada pelo circuito. Logo \vec{m} está normal ao plano do circuito, tem módulo igual ao produto da corrente e a área encerrada pelo circuito e sentido relacionada com a direção da corrente pela regra da mão direita.

6 Campos dependentes do tempo

O físico Inglês Michael Faraday fez uma série de experiências sobre o que acontece se um circuito se move num campo magnético, e o que acontece se um circuito se encontra num campo magnético dependente do tempo.

6.1 A lei de indução de Faraday

Considere um circuito fechado que se move arbitrariamente num campo magnético estático $\vec{B}(\vec{r})$ (note que o circuito pode ser deformado, isto é, diferentes pontos do circuito podem ter velocidades diferentes). Os transportadores de carga num elemento $d\vec{r}$ do fio sofrerão uma força de Lorentz igual a $\vec{F} = q\vec{u} \times \vec{B}$, sendo \vec{u} a velocidade do elemento do fio. A componente de \vec{F} ao longo de $d\vec{r}$ vai empurrar transportadores de carga (electrões) em volta do circuito, produzindo uma corrente.

A *força electromotriz* \mathcal{E} é definida pelo integral de linha de \vec{F}/q em volta do circuito:

$$\mathcal{E} = \oint \left(\frac{\vec{F}}{q} \right) \cdot d\vec{r}.$$

Note que \mathcal{E} não é, de facto, uma força, mas tem dimensão de potencial eléctrico! Podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \oint (\vec{u} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r} \\ &= - \oint \vec{B} \cdot (\vec{u} \times d\vec{r}). \end{aligned}$$

Multiplicando esta equação pelo intervalo de tempo infinitesimal δt , obtemos

$$-\mathcal{E} \cdot \delta t = \oint \vec{B} \cdot (\delta \vec{x} \times d\vec{r})$$

como $\delta \vec{x} = \vec{u} \delta t$ é o deslocamento do elemento de fio $d\vec{r}$. Podemos identificar

$$\delta \vec{x} \times d\vec{r} \equiv \delta \vec{S}$$

com o elemento da área definida por $\delta \vec{x}$ e $d\vec{r}$ (ver figura 6.1). Logo, integrando ao longo do circuito, vemos que $-\mathcal{E} \cdot \delta t$ é igual à diferença entre o *fluxo magnético* através do circuito

$$\mathcal{F} \equiv \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

no tempo $t + \delta t$ e o mesmo no tempo t . Então

$$\mathcal{E} = - \frac{d\mathcal{F}}{dt}.$$

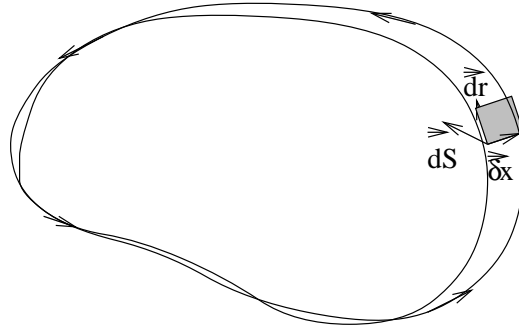


Figura 13: A força electromotriz num circuito em movimento num campo magnético estático.

Note que a direcção de $d\vec{S}$ corresponde com o sentido ao longo do circuito com a regra da mão direita. O sinal que se obtém assim na relação acima é referido como a *lei de Lenz*: a força electromotriz induzido no circuito é contrário ao sentido da variação do fluxo magnético através do circuito.

Consideremos agora um circuito fixo num campo magnético dependente do tempo. O fluxo através do circuito dependerá também do tempo. Faraday determinou que, também neste caso, há uma força electromotriz no circuito, e que esta também é igual a menos a variação do fluxo magnético por unidade do tempo. A primeira vista, isto é surpreendente, visto que não pode haver uma força magnético sobre os elementos do circuito, uma vez que estes estão em repouso. A única explicação possível é a existência de uma força *eléctrica* sobre as cargas no circuito: deve haver um campo eléctrico \vec{E} , tal que

$$\mathcal{E} = \oint \frac{\vec{F}}{q} \cdot d\vec{r} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d\mathcal{F}}{dt}.$$

Como o circuito é fixo, temos

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S},$$

e então

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}.$$

Usando o teorema de Stokes, temos

$$\int (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = - \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

sendo o integral em ambos os membros sobre a mesma superficie encerrada pelo circuito. Como esse pode ser escolhido arbitrariamente, obtemos

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

a lei de Faraday na forma local. Esta lei é a generalização da lei $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ que é válida só no caso estático.

6.2 As equações de Maxwell

Reunimos as identidades fundamentais que temos obtido até agora:

$$\begin{array}{ll}
 \text{A lei de Coulomb:} & \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\
 \text{A lei de Ampère:} & \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \\
 \text{A ausência do monopolos magnéticos:} & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\
 \text{A lei de Faraday:} & \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
 \text{A equação de continuidade:} & \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0
 \end{array}$$

As primeiras três equações são derivadas de experiências feitas em situações estacionárias. James Clerk Maxwell percebeu que a lei de Ampère não é consistente com a equação de continuidade: uma vez que $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0$ é uma identidade matemática, obtemos que $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$; isto é somente correcto para situações estacionárias. Maxwell propus que a lei de Ampère fosse modificada:

$$\text{Lei de Ampère modificada:} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{J}.$$

Assim, tomando a divergência, obtemos

$$\begin{aligned}
 0 &= \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \left(\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J} \right) \\
 &= \mu_0 \left(\epsilon_0 \frac{\partial (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \right) \\
 &= \mu_0 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \right)
 \end{aligned}$$

em concordância com a lei de continuidade. O conjunto das leis de Coulomb, Ampère (com modificação), Faraday e a lei de Gauss para o campo magnético chamam-se *as equações de Maxwell*. Estas leis, em combinação com a lei da força de Lorentz, governam todos os fenómenos electromagnéticos na Natureza (no nível clássico), incluindo os fenómenos de radiação eléctrica (ondas de luz, etc.). Note que a equação de continuidade é uma consequência das equações de Maxwell. As equações de Maxwell são consistentes com a relatividade restrita de Einstein.

6.3 Indutância

Considere um circuito isolado. O fluxo magnético através do circuito depende da geometria do circuito e proporcional à corrente, pela lei de Biot e Savart.

Portanto, para um circuito estacionário e rígido, o fluxo só pode variar se a corrente muda. Então:

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \frac{d\mathcal{F}}{dI} \cdot \frac{dI}{dt}.$$

Definimos

$$L = \frac{d\mathcal{F}}{dI}$$

como a *auto-indutância* (incremental) do circuito. Uma vez que \mathcal{F} é proporcional com I , temos também

$$\mathcal{F} = L.I$$

A lei de Faraday para o circuito pode ser escrito como:

$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt}.$$

Para um sistema de dois circuitos i e j , colocados na mesma região do espaço, define-se a *indutância mútua* pela variação do fluxo no circuito i causada pela variação da corrente no circuito j :

$$L_{ij} = \frac{d\mathcal{F}_{ij}}{dI_j} (= \frac{d\mathcal{F}_i}{dI_j}).$$

Uma vez que \mathcal{F}_{ij} é proporcional com I_j , temos também

$$\mathcal{F}_{ij} = L_{ij}I_j$$

Para o fluxo total através do circuito i obtemos

$$\mathcal{F}_i = \sum_j \mathcal{F}_{ij} = \sum_j L_{ij}I_j.$$

É possível obter uma expressão explícita para a indutância mútua:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{ij} &= L_{ij}I_j \\ &= \int \vec{B}_j(\vec{r}_i) \cdot d\vec{S}_i \\ &= \int (\vec{\nabla} \times \vec{A}_j(\vec{r}_i)) \cdot d\vec{S}_i \\ &= \oint_{\Gamma_i} \vec{A}_j(\vec{r}_i) \cdot d\vec{r}_i \\ &= \frac{\mu_0 I_j}{4\pi} \oint_{\Gamma_i} \oint_{\Gamma_j} \frac{d\vec{r}_i \cdot d\vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}. \end{aligned}$$

Aqui \vec{B}_j é o campo magnético devido à corrente no circuito j , e Γ_i é o caminho correspondente ao circuito i . Assim, obtemos a *fórmula de Neumann*

$$L_{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma_i} \oint_{\Gamma_j} \frac{d\vec{r}_i \cdot d\vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}.$$

6.4 A energia magnética

Considere um circuito com auto-indutância \mathcal{L} e resistência R , no qual é aplicado uma força electromotriz externa \mathcal{E}_0 . A aplicação de \mathcal{E}_0 pode mudar a corrente no circuito, e assim, induzir uma força electromotriz \mathcal{E} pela lei de Faraday. Temos pela lei de Ohm

$$\mathcal{E}_0 + \mathcal{E} = IR$$

O trabalho efectuado pela força electromotriz externa para mover a carga $dq = I dt$ que passa pelo circuito no intervalo de tempo dt é

$$\mathcal{E}_0 dq = \mathcal{E}_0 I dt = -\mathcal{E} I dt + I^2 R dt = I d\mathcal{F} + I^2 R dt.$$

O segundo termo no membro direito representa a conversão de energia eléctrica em aquecimento na resistência (efeito de Joule). O primeiro termo representa trabalho efectuado contra a força electromotriz induzida no circuito, necessário para alterar os campos magnéticos. Então, este termo corresponde com a variação da energia magnética armazenada no sistema:

$$dU_m = I d\mathcal{F}.$$

No caso de n circuitos acoplados teremos

$$dU_m = \sum_i I_i d\mathcal{F}_i.$$

Para os incrementos $d\mathcal{F}_i$ temos

$$d\mathcal{F}_i = \sum_j \frac{d\mathcal{F}_{ij}}{dI_j} dI_j = \sum_j L_{ij} dI_j.$$

Portanto para a variação da energia magnética obtemos

$$dU_m = \sum_{i,j} L_{ij} I_i dI_j = d \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j} L_{ij} I_i I_j \right).$$

Uma vez que a energia magnética será zero se as correntes são zero, isto implica que a energia magnética é

$$U_m = \frac{1}{2} \sum_{i,j} L_{ij} I_i I_j.$$

No caso de um circuito só,

$$U_m = \frac{1}{2} L I^2.$$

É possível exprimir U_m directamente em termos do campo magnético. Utilizando a fórmula de Neumann

$$U_m = \frac{1}{2} \sum_{i,j} I_i I_j \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma_i} \oint_{\Gamma_j} \frac{d\vec{r}_i \cdot d\vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}.$$

Passando para a formulação com uma distribuição contínua pela substituição $I d\vec{r} \rightarrow \vec{J} dV$, isto torna-se igual a

$$\begin{aligned} U_m &= \frac{1}{2} \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}) \cdot \vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} dV dV' \\ &= \frac{1}{2} \int_V \vec{A}(\vec{r}) \cdot \vec{J}(\vec{r}) dV. \end{aligned}$$

O volume V deve conter todos os circuitos (note que, assim, podemos suprimir a soma sobre i e j). Usando a lei de Ampère $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ (supondo que temos uma situação estacionária) e a identidade

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

ficamos com

$$U_m = \frac{1}{2\mu_0} \int_V \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) dV - \frac{1}{2\mu_0} \int_V \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) dV.$$

O segundo termo pode ser convertido com o teorema da divergência em

$$-\frac{1}{2\mu_0} \int_{\partial V} (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S}$$

com ∂V a fronteira do volume. Escolhendo V uma esfera com raio R em volta da região com as correntes, temos, para R grande, $|\vec{A}| \sim R^{-2}$ e $|\vec{B}| \sim R^{-3}$ (termo dipolar é dominante). Sendo a área da esfera proporcional com R^2 , o integral tende para zero se $R \rightarrow \infty$. Em conclusão, sobra somente o primeiro termo, que passa a ser

$$U_m = \frac{1}{2\mu_0} \int |\vec{B}|^2 dV$$

(o integral é sobre todo espaço).

7 Propriedades eléctricas da matéria

Num material isolador, é possível que existe um campo eléctrico (médio) sem corrente, uma vez que não há electrões livres que podem mover-se pelo material. No entanto, o campo eléctrico puxa os núcleos e os electrões em direcções contrárias, pelo que haverá um deslocamento relativo entre as cargas positivas e as cargas negativas, que resulta num estado de *polarização eléctrica*.

7.1 O campo de polarização

Considere um material isolador com átomos neutrais em posições fixas \vec{R}_i . A aplicação de um campo eléctrico externo \vec{E}_0 provocará num deslocamento relativa

entre núcleo e electrões, pelo que cada átomo vai adquirir um momento dipolar \vec{p}_i . Para campos eléctricos fracos podemos esperar que \vec{p}_i será proporcional com o campo eléctrico em \vec{R}_i :

$$\vec{p}_i = 4\pi\epsilon_0\alpha\vec{E}_0(\vec{R}_i).$$

Aqui α é chamada a *polarizabilidade atómica*.

Vimos que o momento dipolar total de um sistema neutral não depende da sua posição, pelo que o momento dipolar de um conjunto de átomos neutrais é igual à soma dos momentos dipolares dos átomos individuais. Seja $N(\vec{r})$ a densidade de número de átomos no ponto \vec{r} no isolador. Considere um volume δV em volta do ponto \vec{r} , pequeno mas macroscópico, de modo que o número de átomos $N(\vec{r})\delta V$ em δV é grande. O momento dipolar do volume δV é

$$N(\vec{r})\vec{p}\delta V,$$

com \vec{p} igual ao momento dipolar dos átomos em δV . Define-se o *campo de polarização*

$$\vec{P}(\vec{r}) = N(\vec{r})\vec{p}.$$

Se o material é suficientemente difusa, podemos desprezar as interações entre os dipolos em comparação com o campo externo, de modo que

$$\vec{P}(\vec{r}) = 4\pi\epsilon_0\alpha N(\vec{r})\vec{E}(\vec{r}).$$

O momento dipolar de um volume arbitrário V da matéria é

$$\int_V \vec{P}(\vec{r})dV.$$

Há outros mecanismos microscópicos que a polarizabilidade atómica que podem resultar em contribuições ao campo de polarizabilidade, tal como materias que consistem em iões, ou em moléculas com dipolos permanentes.

7.2 A distribuição de carga equivalente

Seja V um volume com campo de polarização $\vec{P}(\vec{r})$. Num pequeno subvolume δV no ponto \vec{r}' o momento dipolar é $\vec{p} = \vec{P}(\vec{r}')\delta V$. Este momento dipolar contribuirá ao potencial electrostático num outro ponto \vec{r} :

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}.$$

O potencial electrostático total no ponto \vec{r} será igual à soma das contribuições dos dipolos em todo volume V :

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'.$$

Com a identidade

$$\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)$$

podemos escrever

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \vec{P}(\vec{r}') \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV'.$$

Usando

$$\vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = (\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}')) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \vec{P}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{(-\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}'))}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\partial V} \frac{(\vec{P}(\vec{r}') \cdot \hat{n}) dS'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{(-\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}'))}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'. \end{aligned}$$

Aqui \hat{n} é um vector unitária normal à fronteira do volume (tal que $d\vec{S}' = \hat{n}dS'$). Comparando com a fórmula geral

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

vimos que o campo de polarização corresponde à densidade da carga equivalente

$$\rho_{pol}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}.$$

Além disso há uma densidade da carga superficial equivalente que reside na fronteira do volume:

$$\sigma_{pol}(\vec{r}) = \vec{P} \cdot \hat{n}.$$

De facto, não é difícil compreender a origem desta última contribuição. Considere um volume V com polarização uniforme \vec{P} . O vector de polarização pode ser escrito como

$$\vec{P} = N\vec{p}$$

(com N igual à densidade numérica atómica). Agora podemos representar o momento dipolar atómica por duas cargas $-q$ e q separadas pelo vector de deslocamento \vec{d} , tal que

$$\vec{p} = q\vec{d}.$$

Como a distribuição dos dipolos é uniforme no volume V , a densidade das cargas positivas $\rho_+ = Nq$ será cancelada pela densidade das cargas negativas $\rho_- = -Nq$ em todo volume, com excepção nas fronteiras.

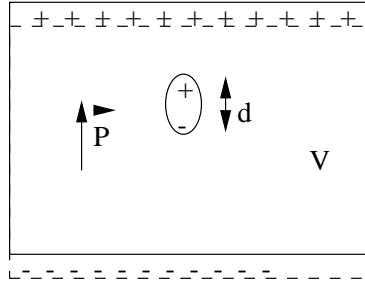


Figura 14: A distribuição de carga equivalente para um volume com polarização uniforme.

Por exemplo, considere uma fronteira normal a \vec{P} . Teremos uma camada com espessura d com somente carga positiva (ver figura 7.2). Se a área da camada é A , a carga superficial nesta camada é

$$\sigma_{pol} = \frac{Q}{A} = \frac{(dA)(Nq)}{A} = Nqd = N|\vec{p}| = |\vec{P}| = \vec{P} \cdot \hat{n}.$$

7.3 O campo de deslocamento

A distribuição de carga que corresponde à polarização do material terá que ser tomada em conta nas equações (macroscópicas) de Maxwell. A densidade de carga que entra na equação de Coulomb é escrita como a soma da densidade de carga de polarização, mais outras contribuições que indicamos por ρ_{livre} :

$$\rho(\vec{r}) = \rho_{pol}(\vec{r}) + \rho_{livre}(\vec{r}).$$

Para a equação de Coulomb (forma local) obtemos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{pol} + \rho_{livre}}{\epsilon_0} = \frac{-\vec{\nabla} \cdot \vec{P} + \rho_{livre}}{\epsilon_0}$$

pelo que

$$\vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \frac{\rho_{livre}}{\epsilon_0}.$$

A combinação

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

é chamada *o campo de deslocamento*. Por construção, a única fonte do campo \vec{D} é a carga livre:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{livre}$$

(forma local) e

$$\int_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{livre,dentro}$$

(forma integral), sendo $Q_{livre,dentro}$ a carga livre dentro do volume V .

7.4 A susceptibilidade eléctrica e a constante dieléctrica

Na maioria dos materiais isoladores, o campo de polarização é determinada pelo campo eléctrico médio. Experimentalmente verifica-se que, para campos eléctricos fracos, o campo de polarização depende linearmente do campo eléctrico. Para materiais isotrópicos a relação é mais simples:

$$\vec{P}(\vec{r}) = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}(\vec{r})$$

com χ_e a *susceptibilidade eléctrica*, que depende do tipo de material; χ_e não tem dimensão física. Materiais para o qual esta relação entre \vec{P} e \vec{E} é verdadeira chamam-se *dieléctricos* (Faraday, 1838). Há materiais com polarização que não são dieléctricos, por exemplo *piezo-eléctricos* (uma polarização é induzida por uma pressão mecânica), ou *crístais ferro-eléctricas* (que têm uma polarização espontânea abaixo de uma temperatura crítica T_c).

Para dieléctricos existe também uma relação linear entre \vec{E} e \vec{D} :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}.$$

a constante $\epsilon_r = 1 + \chi_e$ é chamada *permitividade relativa* ou *a constante dieléctrica*. Normalmente $\epsilon_0 > 1$.

7.5 A superfície de um isolador

Na secção 7.2 vimos que na superfície de um isolador há uma distribuição de carga superficial. A presença desta carga implicará uma descontinuidade do campo eléctrico. Utilizando o método da secção 2.9 (lei de Gauss) obtemos

$$\vec{E}_2 \cdot \hat{n} - \vec{E}_1 \cdot \hat{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0},$$

sendo \vec{E}_1 o campo eléctrico justamente dentro do material, e \vec{E}_2 o campo justamente fora da superfície do material (\hat{n} é um vector unitário normal à superfície que aponta para fora).

Utilizando o mesmo método para o campo de deslocamento, obtem-se

$$\vec{D}_2 \cdot \hat{n} - \vec{D}_1 \cdot \hat{n} = \sigma_{livre}.$$

Consequentemente, se não houver carga livre, o componente de \vec{D} normal à superfície é contínuo. Lembremos que o componente tangencial de \vec{E} é também contínuo.

No caso de não haver carga livre, temos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{\epsilon_0}.$$

No caso de um dielétrico uniforme, χ_e não depende do ponto, e então

$$(1 + \chi_e^{-1})\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0,$$

o que implica $\rho_{pol} = 0$. Consequentemente, para dielétricos uniformes, não há carga de polarização no interior, só na superfície.

7.6 Dielétricos em condensadores

Considere um condensador com placas paralelas em que o espaço entre as placas é totalmente preenchido com um meio dielétrico uniforme. Se as placas forem carregadas, haverá uma densidade de carga superficial $\pm\sigma$ nas placas. Devido ao campo eléctrico resultante, o dielétrico será polarizado, com a direcção de \vec{P} normal às placas. Logo haverá uma densidade de carga superficial de polarização

$$\sigma_{pol} = \vec{P} \cdot \hat{n} = \pm P;$$

o sinal + aplica-se na superfície junto à placa com carga negativa, o sinal - na superfície junto à placa com carga positiva. Por isto, a carga total junto à fronteira entre as placas e o dielétrico será

$$\sigma_{tot} = \pm(\sigma - P)$$

e, consequentemente, o campo eléctrico no dielétrico será igual a

$$E = \frac{\sigma_{tot}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma - P}{\epsilon_0}.$$

No dielétrico, $P = \epsilon_0\chi_e E$, pelo que

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} - \chi_e E,$$

ou

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0\epsilon_r}.$$

Este resultado pode ser obtido mais rapidamente usando o campo de deslocamento. Da secção anterior temos que o valor de D será igual densidade de carga livre, ou

$$D = \sigma.$$

Consequentemente,

$$E = \frac{D}{\epsilon_0\epsilon_r} = \frac{\sigma}{\epsilon_0\epsilon_r}.$$

Supondo que a distância entre as placas é d e a área das placas A , a diferença de potencial V entre as placas será

$$V = E \cdot d = \frac{\sigma d}{\epsilon_0\epsilon_r}.$$

Para a capacidade do condensador obtemos

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{d},$$

que difere do resultado em vácuo por um factor ϵ_r .

7.7 A energia electrostática em matéria

Na presença de matéria, a derivação da energia electrostática feita em secção 2.5 para vácuo tem que ser revista.

Considere um condensador que consiste de (pelo menos) dois condutores, com o espaço intermediário preenchido com matéria que pode ser polarizada. Se transferirmos uma carga δq de um dos condutores a $\Phi = 0$ para o condutor com $\Phi = V$, a energia potencial será aumentada por

$$\delta U = V \delta q$$

que pode ser reescrita como

$$\delta U = \int \Phi \delta \sigma dS = \int \Phi \delta \vec{D} \cdot d\vec{S}.$$

O integral é sobre a superfície do condutor a $\Phi = V$, mas pode ser extendido para incluir as superfícies a $\Phi = 0$ (sendo aquelas contribuições igual a zero). Aqui foi usada a lei de Gauss para o campo \vec{D} , que tem como fonte a carga livre σ nas superfícies dos condutores.

Podemos transformar o integral sobre as superfícies para um integral sobre o volume V entre os condutores, utilizando o teorema de Gauss (note que a direcção de $d\vec{S}$ acima é *para dentro* do volume V):

$$\begin{aligned} \delta U &= - \int_V \vec{\nabla} \cdot (\Phi \delta \vec{D}) dV \\ &= - \int_V \vec{\nabla} \Phi \cdot \delta \vec{D} dV - \int_V \Phi (\vec{\nabla} \cdot \delta \vec{D}) dV \\ &= \int_V \vec{E} \cdot \delta \vec{D} dV. \end{aligned}$$

Note que, não havendo carga livre em V , $\vec{\nabla} \cdot \delta \vec{D} = 0$.

No caso de dieléctricos temos a relação $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$, de modo que

$$\vec{E} \cdot \delta \vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \cdot \delta \vec{E} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{2} \delta(\vec{E} \cdot \vec{E}) = \frac{1}{2} \delta(\vec{E} \cdot \vec{D}).$$

Uma vez que $U = 0$ se $\vec{E} = \vec{0}$, concluímos que

$$U = \frac{1}{2} \int_V \vec{E} \cdot \vec{D} dV.$$

Note que o resultado derivado em secção 2.13 para a energia de um condensador ($U = QV/2 = CV^2/2 = Q^2/(2C)$) continua a ser válido na presença de matéria.

8 Propriedades magnéticas da matéria

Nesta secção, consideramos os mecanismos físicos que ocasionam as propriedades magnéticas da matéria.

8.1 Materiais magnéticas

O movimento orbital dos electrões num átomo pode resultar num momento magnético do átomo (igual à corrente vezes a área da órbita). Além disso, os electrões têm um momento magnético intrínscio. Muitas vezes, o momento magnético total do átomo (igual à soma das contribuições de todos os electrões no átomo) é zero. No entanto, há átomos (e moléculas) em que o momento total não é zero, de modo que ficam com um momento magnético permanente. Num gás que consiste destes átomos, as orientações dos momentos magnéticos serão aleatorizadas pelo movimento térmico, não havendo direcção preferida. Caso que haja um campo magnético externo \vec{B} , os momentos tendem a alinhar-se com aquele campo (uma vez que, assim, a sua energia potencial é minimizada). Este efeito chama-se *paramagnetismo*. Um cálculo estatístico clássico para dipolos com magnitude μ dá para o momento magnético médio:

$$\bar{\vec{\mu}} \approx \mu \left(\frac{\mu \vec{B}}{3kT} \right)$$

(supondo que $\mu|\vec{B}| \ll kT$).

No efeito de paramagnetismo o momento magnético médio é proporcional com o campo externo; logo o momento magnético médio é zero na ausência de um campo externo, devido ao efeito aleatorizando do movimento térmico. Para temperaturas suficientemente baixas, o movimento térmico dos átomos diminui. Em muitos cristais com átomos com momentos magnéticos permanentes existe uma temperatura crítica (*a temperatura de Curie*) abaixo do qual os momentos magnéticos se alinham entre eles, mesmo na ausência de um campo magnético externo. Isto é devido à interacção magnética entre momentos magnéticos vizinhos, que é tal que a energia potencial é mínima com os momentos magnéticos vizinhos alinhados. Este efeito chama-se *ferromagnetismo*. A temperatura de Curie depende do material, e pode ser mais alta que a temperatura ambiente (por exemplo, para ferro).

Expostos à introdução de um campo magnético externo num material, os electrões reagem no seu movimento orbital de acordo com a lei de Lenz, produzindo um momento magnético alinhado contrário ao campo magnético. Este *diamagnetismo* existe em todos os átomos e moléculas, mas é normalmente muito mais fraco que paramagnetismo, se este estiver presente. Logo, normalmente, material que não exhibe paramagnetismo (ou ferromagnetismo) é diamagnético.

8.2 Magnetização

Para qualquer tipo de matéria define-se o *campo de magnetização* $\vec{M}(\vec{r})$ macroscópico (sobre muitas distâncias atômicas), de modo que o momento magnético total num volume macroscópico V é dado por

$$\int_V \vec{M}(\vec{r}) dV.$$

Note a analogia com a definição do campo da polarização.

8.3 A distribuição de corrente equivalente

Com cada distribuição macroscópica de magnetização $\vec{M}(\vec{r})$ corresponde uma distribuição macroscópica de corrente $\vec{J}_{mag}(\vec{r})$. Para determinar $\vec{J}_{mag}(\vec{r})$, lembremos que o vector potencial que resulta da presença de um momento magnético \vec{m} colocado na origem é

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}.$$

Identificando \vec{m} com o momento magnético de um elemento de volume dV colocado em \vec{r}' , obtemos, utilizando o princípio de sobreposição,

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{M}(\vec{r}') \times \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV'. \end{aligned}$$

Utilizando a identidade

$$\vec{\nabla}' \times \left(\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} (\vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{r}')) + \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \times \vec{M}(\vec{r}')$$

obtemos

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{\nabla}' \times \left(\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'.$$

Agora é possível mostrar a seguinte variação do teorema da divergência

$$\int_V (\vec{\nabla} \times \vec{F}) dV = - \int_{\partial V} \vec{F} \times d\vec{S}$$

que permite reescrever

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\partial V} \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times d\vec{S}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'.$$

Comparando com a solução que derivámos no gauge de Coulomb

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV',$$

podemos identificar a seguinte densidade de corrente de magnetização:

$$\vec{J}_{mag} = \vec{\nabla} \times \vec{M}$$

(que vem do segundo termo) bem como uma corrente de magnetização superficial

$$\vec{M} \times \hat{n}$$

(aqui \hat{n} é um vector unitária normal à superfície do volume, direccionado para fora, segundo $d\vec{S} = \hat{n} dS$) que vem do primeiro termo.

É necessário incluir a corrente de magnetização na lei de Ampère, junto com qualquer corrente adicional \vec{J}_{livre} devido ao movimento de cargas livres que possa haver. Assim, obtemos (numa situação estacionária)

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0(\vec{J}_{livre} + \vec{J}_{mag}) = \mu_0(\vec{J}_{livre} + \vec{\nabla} \times \vec{M}).$$

Introduzindo o campo auxiliar

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

ficamos com a equação

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_{livre}$$

que inclui só a corrente livre no membro direito.

Comentário: Historicamente, o campo \vec{H} chama-se “campo magnético”, e o campo \vec{B} “campo de indução magnética”. Mesmo agora estes nomes são utilizados frequentemente na literatura. Eles originam de um período em que a natureza da magnetização em matéria era desconhecida.

8.4 A susceptibilidade magnética e a permeabilidade relativa

Nos casos de para- e diamagnetismo, verifica-se, para campos magnéticos fracos, uma relação linear entre a magnetização \vec{M} e o campo magnético. Se a matéria é uniforme e isotrópica, escrevemos

$$\vec{M}(\vec{r}) = \chi_m \vec{H}(\vec{r})$$

em que χ (sem dimensão) é chamada a *susceptibilidade magnética* da matéria. A utilização de \vec{H} em vez de \vec{B} no lado direito tem razões históricas. Assim, obtemos

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0\mu_r \vec{H}$$

com

$$\mu_r = 1 + \chi_m$$

a susceptibilidade relativa.

Em materiais sólidos sem iões paramagnéticos, a susceptibilidade é tipicamente da ordem -10^{-5} . Em sistemas com iões paramagnéticos a temperatura suficientemente alta é normalmente uma boa aproximação o resultado clássico

$$\chi_m \approx \frac{C}{T}$$

com T a temperatura absoluta e $C = N\mu_0\mu^2/3k$, a lei de Curie. Para um sólido com $N \approx 10^{28} \text{ m}^{-3}$ obtemos $\chi_m \sim 10^{-3}$ para temperatura de ambiente.

Vimos que, para materiais não-ferromagnéticos, é uma boa aproximação tomar $\mu_r \approx 1$.

8.5 A energia magnética em matéria

Na presença de matéria, a derivação da energia magnética feita em secção 6.4 para vácuo tem que ser revista.

Considere, então, um sistema de circuitos com correntes livres na presença de matéria magnética. Temos outra vez para a variação da energia magnética

$$\delta U_m = \sum_i I_i \delta \mathcal{F}_i,$$

sendo I_i a corrente livre nos circuito i , e o fluxo \mathcal{F}_i através do circuito. A variação do último é igual a

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{F}_i &= \int_{S_i} \delta \vec{B} \cdot d\vec{S} \\ &= \int_{S_i} (\vec{\nabla} \times \delta \vec{A}) \cdot d\vec{S} \\ &= \oint_{C_i} \delta \vec{A} \cdot d\vec{l} \end{aligned}$$

de modo que

$$\delta U_m = \sum_i \oint_{C_i} I_i \delta \vec{A} \cdot d\vec{l}.$$

Com as substituições $I d\vec{l} \rightarrow \vec{J} dV$ e $\sum_i \oint_{C_i} \rightarrow \int_V$ obtén-se

$$\delta U_m = \int_V \vec{J} \cdot \delta \vec{A} dV.$$

Utilizando a lei de Ampère (considerando casos semi-estáticos) $\vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{H}$ e a identidade

$$\vec{\nabla} \cdot (\delta \vec{A} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \delta \vec{A}) - \delta \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H})$$

obtemos

$$\delta U_m = \int_V \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \delta \vec{A}) dV - \int_{S=\partial V} (\delta \vec{A} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S}.$$

Tomando V igual a uma esfera com raio R , temos $|\vec{A}| \propto r^{-1}$ e $|\vec{H}| \propto r^{-2}$, de modo que o segundo termo tende para zero se $R \rightarrow \infty$. Assim, obtemos

$$\delta U_m = \int_{\text{todo espaço}} \vec{H} \cdot \delta \vec{B} dV.$$

No caso em que $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$, podemos integrar esta relação, obtendo

$$U_m = \frac{1}{2} \int \vec{H} \cdot \vec{B} dV.$$

Bibliografia

- [1] W. N. Cottingham e D. A. Greenwood, *Electricity and Magnetism*, Cambridge University Press, 1991.
- [2] J. R. Reitz e F. J. Milford, *Foundations of Electromagnetic Theory*, 2nd Ed., AddisonWesley Publishing Company, 1966.
- [3] L. Brito, M. Fiolhais, C. Providência, *Campo electromagnético*, McGrawHill, 1999.