

Caderno de exercícios
de
Matemática II

Curso: Biologia Marinha e Pescas

Ano Lectivo: 2002/2003

11 de Março de 2003

(versão 1.0)

ÍNDICE

Notas Prévias	ii
Notações e terminologia	iv
1 Introdução	1
1.1 Noções elementares sobre conjuntos	1
1.2 Noções elementares sobre aplicações	2
1.3 Noções elementares sobre estruturas algébricas. Grupo e Corpo	4
1.4 Noções elementares sobre polinómios	5
2 Espaços Vectoriais	6
2.1 Espaços vectoriais	6
2.2 Dependência e Independência linear	7
2.3 Subespaços vectoriais	9
2.4 Soma directa interna	11
3 Aplicações Lineares	13
3.1 Aplicações lineares	13
3.2 Núcleo e Imagem	14
3.3 O espaço $\text{Hom}(V, W)$	16
4 Matrizes	17
4.1 Operações fundamentais sobre matrizes	17
4.2 Matriz de uma aplicação linear	19
4.3 Característica de uma matriz	22
4.4 Matriz de mudança de base e mudanças de base	24
5 Sistemas de Equações Lineares. Determinantes	25
5.1 Sistemas de equações lineares	25
5.2 Determinantes	27
6 Espaços com Produto Interno	29
6.1 Produtos internos. Normas	29
6.2 Bases ortonormadas. Processo de ortonormalização	31
6.3 Produto externo e produto misto de vectores	32
Bibliografia	33

Notas Prévias

Este caderno de exercícios juntamente com a matéria leccionada nas aulas teóricas formam um todo, i.e., são uma parte integrante do programa da disciplina e não meramente um conjunto de exercícios soltos, ou exercícios “apanhados” aqui e acolá para formar um caderno.

Em relação à resolução dos exercícios que constam neste caderno, chama-se a atenção de que, só tem sentido tentar resolvê-los, após um estudo, cuidadoso, da matéria leccionada nas aulas teóricas, tudo o resto, será uma mera tentativa de resolução mecânica dos exercícios, sem qualquer fundamentação. Será sempre de evitar o tipo de pensamento - e que muitas vezes se ouve - “faço assim, porque é assim que se faz”. Existe também, na maior parte das vezes, mas felizmente nem sempre, a tentação de se reduzir determinados conhecimentos a um único. Para melhor se entender aquilo que se pretende transmitir, nada melhor que uma anedota, que me foi contada por um colega:

«A dada altura da sua vida académica um estudante universitário foi submetido a um exame Oral sobre Fisiologia Animal. O Professor tinha um conjunto de fichas sobre a sua secretária, cada uma com o nome de um determinado animal. O aluno deveria escolher uma dessas fichas fazendo uma caracterização da fisiologia do animal que constasse na ficha. Ao retirar a primeira ficha, calhou-lhe o cavalo. O estudante algo constrangido responde o seguinte:

Aluno: Bem, o cavalo é um animal de quatro patas, é um mamífero, coberto por pêlos e portanto tem parasitas, de entre os quais se destaca a pulga, que como se sabe, é um insecto que se alimenta de sangue e que se desloca dando grandes saltos e

(o aluno falou durante quase 10 minutos sobre características da pulga, após os quais, o Professor interrompe-o)

Prof.: Muito bem. Pode retirar outra ficha.

(Desta vez saiu-lhe o cão)

Aluno: O cão é um animal de quatro patas, é também um mamífero, coberto por pêlos e portanto tem parasitas, de entre os quais se destaca a pulga, que como se sabe, é um insecto que se alimenta de sangue e que se desloca dando grandes saltos e.....

(desta vez o Professor interrompe-o imediatamente e solicita o seguinte)

Prof.: Gostaria que fizesse a caracterização fisiológica do peixe.

(O aluno fica um pouco atrapalhado e após alguns minutos de meditação responde o seguinte)

Aluno: Bem, o peixe é um animal de sangue frio, coberto por escamas, que não tem pêlos, mas se tivesse, teria necessariamente parasitas, de entre os quais se destaca a pulga, que como se sabe, é um insecto que se alimenta de sangue e que se desloca dando grandes saltos e.....»

O material contido neste caderno de exercícios, foi elaborado com base nas referências [1] e [2] e, de um conjunto de exercícios elaborados pelo próprio. De salientar, que alguns destes exercícios, foram revistos por alguns dos meus colegas da Área Departamental de Matemática, nomeadamente, o Prof. Dr. Juan Rodríguez e outros com quem tenho trabalhado ao longo dos anos. A todos eles, os meus sinceros e profundos agradecimentos.

N.B.: Na elaboração deste caderno, e dentro do possível, houve o cuidado de se usar uma escrita matemática rigorosa e uma simbologia o mais actualizada possível, no entanto, este caderno pode não estar isento de - apesar de involuntárias - omissões e incorrecções¹.

¹apesar de se encontrar em permanente actualização, aceitam-se e agradecem-se correcções e comentários, de preferência, enviados para psemiao@ualg.pt.

Notações e terminologia

Faremos uso dos seguintes símbolos para representar os conjuntos usuais:

\emptyset	o conjunto vazio
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$	o conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$	o conjunto dos números inteiros
$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{x}{y} \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{Z} \wedge y \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$	o conjunto dos números racionais
\mathbb{R}	o conjunto dos números reais
\mathbb{C}	o conjunto dos números complexos

De um modo geral, o símbolo \mathbb{K} representa um corpo qualquer e o símbolo ‘:=’ quer designar a igualdade de duas entidades por definição.

O símbolo ‘ \sqsubseteq ’ representa uma subestrutura de uma dada estrutura algébrica. Por exemplo, sendo V um espaço vectorial e F um subconjunto de V , para abreviar a expressão ‘ F é um subespaço vectorial de V ’, usamos o simbolismo $F \sqsubseteq V$.

Sendo $X \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, representaremos por $X_{>0}$, $X_{\geq 0}$ e $X_{\neq 0}$ os seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned} X_{>0} &:= \{x \in X : x > 0\} \\ X_{\geq 0} &:= \{x \in X : x \geq 0\} \\ X_{\neq 0} &:= \{x \in X : x \neq 0\} \quad . \end{aligned}$$

Como exemplos, o conjunto

$$\mathbb{R}_{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} = [0, +\infty[,$$

representa o conjunto dos números reais não negativos, enquanto que o conjunto

$$\mathbb{R}_{\neq 0} := \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\} ,$$

representa o conjunto de todos os números reais, excepto o zero.

1. INTRODUÇÃO

1.1. Noções elementares sobre conjuntos

1.1) Considere os conjuntos $A := \{1, 2\}$ e $B := \{a, b, c\}$. Determine $A \times B$.

1.2) Sendo $A := \{a, b\}$ e $B := \{a, b, c\}$, determine:

a) o conjunto das partes de A , i.e., $\mathcal{P}(A)$.

b) o conjunto das partes de B , i.e., $\mathcal{P}(B)$.

1.3) Sendo $A := \{1, 2, 3\}$, $B := \{1, 4, 5, 6, 7\}$ e $C := \{a, b, c\}$.

a) Determine $A \cap B$ e $A \cap C$.

b) Determine $A \cup B$ e $B \cup C$.

1.4) Considere o conjunto $A := \{x, y, z\}$. Diga, justificando, quais das afirmações seguintes:

a) $x \in A$ b) $x \subseteq A$

c) $\{x\} \in A$ d) $\{x\} \subseteq A$

são verdadeiras ou falsas.

1.5) Considere o conjunto $A := \{1, \{2, 3\}, 4\}$. Diga, justificando, quais das afirmações seguintes:

a) $\{2, 3\} \in A$ b) $\{2, 3\} \subseteq A$

c) $\{\{2, 3\}\} \subseteq A$

são verdadeiras ou falsas.

1.6) Dado o conjunto $X := \{\{2, 3\}, 4\}$. Determine o conjunto das partes de X .

1.7) Considere o conjunto $A := \{x, y\}$ e $B := \{z, t\}$. Determine $A \times B$ e verifique se $A \times B = B \times A$.

1.2. Noções elementares sobre aplicações

1.1) Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $x \mapsto x^2$. Determine:

- a) $f(4)$ b) $f(\{1, 2\})$ c) $f^{-1}(\{3\})$
d) $f^{-1}(\{0\})$ e) $f^{-1}(\{4\})$ f) $f^{-1}(\{1, 3, 4, 7\})$

1.2) Considerem-se as funções f e g de domínio $X := \{a, b\} \subseteq \mathbb{R}$ e codomínio \mathbb{R} e definidas por:

$$f(a) = 1, f(b) = 3 \quad \text{e} \quad g(a) = 2, g(b) = -1$$

Determine a lei de transformação das funções nas seguintes alíneas:

- a) $f + g$ b) $5f$ c) $3f - 2g$
d) $g + 3\text{id}$ e) $|f|$ f) $|f| + g$
g) $f \cdot g$ h) $4f \cdot 5g$ i) $(4f \cdot 5g) + (|f| + g)$

1.3) Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções definidas por:

$$f(x) := \begin{cases} 2x - 5 & \text{se } x > 2 \\ x^2 - 2 & \text{se } x \leq 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) := 3x + 1$$

Determine a imagem dos elementos, para cada uma das funções, das alíneas seguintes:

- a) $f(-2)$ b) $g(-3)$ c) $(g \circ f)(1)$
d) $(f \circ g)(2)$ e) $(f \circ f)(3)$

1.4) Considere a aplicação $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $x \mapsto 2x - 5$.

- a) Verifique se f é injectiva e sobrejectiva.
b) Represente graficamente a função e verifique se está em consonância com a alínea anterior.
c) Calcule $f(A)$, sendo $A := \{4, 5, 6, 7\}$.

1.5) Considere as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas, respectivamente, por $x \mapsto x^3$ e $x \mapsto x + 1$. Verifique se:

- a) f é injectiva b) g é injectiva c) f é sobrejectiva
d) g é sobrejectiva e) $g \circ f$ é injectiva f) $g \circ f$ é sobrejectiva
g) f é bijectiva h) g é bijectiva i) $g \circ f$ é bijectiva
j) $f \circ g$ é injectiva k) $f \circ g$ é sobrejectiva l) $f \circ g$ é bijectiva

1.6) Considere as funções $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas, respectivamente, por:

$$x \mapsto 5 - 4x + 3x^2 + 2x^3, \quad x \mapsto 2 + x + 2x^2 - x^3$$

e

$$x \mapsto d + (c + 1)x + (b - c)x^2 + (a + b)x^3$$

a) Determine a lei de transformação da função nas alíneas seguintes:

1) $f - g$

2) $f + 3g$.

b) Resolva, em cada alínea, a equação polinomial:

1) $f(x) + 3g(x) = 11 + x - 3x^2 + 2x^3$.

2) $f(x) - 2g(x) = -x + 4x^3$.

3) $f(x) + g(x) = 1 - 2x + x^3$.

c) Determine os parâmetros a , b , c e d , de modo que, em cada alínea a equação seja possível:

1) $h(x) = 0$.

2) $f(x) + h(x) = 0$.

3) $2g(x) - h(x) = 0$.

4) $f(x) + g(x) + \sqrt{2}h(x) = 0$.

1.3. Noções elementares sobre estruturas algébricas. Grupo e Corpo

1.1) Considere em $\mathbb{R}_{\neq 0} := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ as seguintes relações:

a) $x\theta y := x^2 + y^2 + 5$.

b) $x\theta' y := 2x + y$.

Verifique se são operações binárias em $\mathbb{R}_{\neq 0}$.

1.2) Analise cada uma das estruturas seguintes:

a) $(\mathbb{N}; +)$. b) $(\mathbb{N}; \cdot)$. c) $(\mathbb{Z}; +)$. d) $(\mathbb{Z}; \cdot)$.

e) $(\mathbb{Z}_{\neq 0}; \cdot)$. f) $(\mathbb{Q}; +)$. g) $(\mathbb{Q}; \cdot)$. h) $(\mathbb{Q}_{\neq 0}; \cdot)$.

i) $(\mathbb{R}; +)$. j) $(\mathbb{R}; \cdot)$. k) $(\mathbb{R}_{\neq 0}; \cdot)$. l) $(\mathbb{C}; +)$.

m) $(\mathbb{C}; \cdot)$. n) $(\mathbb{C}_{\neq 0}; \cdot)$.

1.3) Considere o conjunto \mathbb{R}^2 algebrizado com a operação binária $*$ definida por:

$$(a, b) * (c, d) := (a + c - 1, b + d - 3).$$

a) Indique, qual é o elemento neutro de $*$.

b) Calcule o elemento oposto de $(1, 4)$.

c) Determine $2p * (-q)$, sendo $p := (-2, 0)$ e $q := (1, 4)$, onde $-q$ é o simétrico de q e $2p := p * p$.

d) Averigüe, se $(\mathbb{R}^2; *, (1, 3))$ é um grupo comutativo.

e) Resolva a equação $(x, y) * ((2, 1) * 2p) = (0, 1)$.

1.4) Considere em \mathbb{R} as operações binárias θ e $*$ definidas por:

$$x\theta y := x + y \quad \text{e} \quad x * y := 2xy.$$

Mostre que \mathbb{R} , para as operações definidas, tem uma estrutura de corpo.

1.5) Considere o conjunto $A := \{(x, 1) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$ e as operações binárias θ e $*$ definidas por:

$$(x, 1)\theta(y, 1) := (x + y, 1) \quad \text{e} \quad (x, 1) * (y, 1) := (xy, 1).$$

Mostre que o conjunto A , para as operações definidas, possui uma estrutura de corpo.

1.6) Considere em \mathbb{C} as operações binárias $+$ e \cdot definidas por:

$$(x + yi) + (z + ti) := (x + z) + (y + t)i,$$

$$(x + yi) \cdot (z + ti) := (xz - yt) + (xt + yz)i.$$

Mostre que \mathbb{C} , para as operações definidas, possui uma estrutura de corpo.

1.4. Noções elementares sobre polinómios

1.1) Considere as funções $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas, respectivamente, por:

$$x \mapsto 5 - 4x + 3x^2 + 2x^3 \quad , \quad x \mapsto 2 + x + 2x^2 - x^3$$

e

$$x \mapsto d + (c + 1)x + (b - c)x^2 + (a + b)x^3.$$

a) Determine a lei de transformação da função nas alíneas seguintes:

1) $f - g$.

2) $f + 3g$.

b) Resolva, em cada alínea, a equação polinomial:

1) $f(x) + 3g(x) = 11 + x - 3x^2 + 2x^3$.

2) $f(x) - 2g(x) = -x + 4x^3$.

3) $f(x) + g(x) = 1 - 2x + x^3$.

c) Determine os parâmetros a, b, c e d , de modo que, em cada alínea a equação seja possível:

1) $h(x) = 0$.

2) $f(x) + h(x) = 0$.

3) $2g(x) - h(x) = 0$.

4) $f(x) + g(x) + \sqrt{2}h(x) = 0$.

1.2) Determine x e y de forma que seja verdadeira a seguinte equação:

$$(1 + 2x) + (-2 + 3y)i = 1 + 4i.$$

1.3) Efectue as operações indicadas, sobre números complexos:

a) $(-2 + i) + \frac{(3 - 5i)}{(2 - 3i)} + (2 - 3i)$. b) $(2 - 5i) - (2 + 3i) - (5 - 3i)$.

c) $\left(\frac{3}{2} - \frac{5}{3}i\right) + \overline{\left(2 - \frac{1}{2}i\right)}$. d) $(-2 - i)(3 + 5i)$.

e) $\left(\frac{1}{2} - 3i\right)\left(2 + \frac{1}{3}i\right)$. f) $(\sqrt{3} - 2i)\left(2 + \frac{1}{3}i\right)$.

g) $\frac{2+i}{3-2i}$. h) $\frac{1+i+\frac{2-i}{1-i}}{2-i} + \bar{i}$.

i) $\frac{2-3i}{1+i} - \overline{(2-i)}(1+3i)$.

1.4) Mostre que sendo $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, então tem-se que:

a) $\bar{\bar{z}} = z$. b) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$. c) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.

d) $|z| = |\bar{z}|$. e) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$. f) $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$.

g) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

1.5) Mostre que sendo $x, y, b \in \mathbb{C}$ e $a, ac - |b|^2 \in \mathbb{R}_{>0}$, então:

$$a|x|^2 + 2 \operatorname{Re}(bx\bar{y}) + c|y|^2 = a \left| x + \frac{b}{a}y \right|^2 + (ac - |b|^2)|y|^2,$$

onde Re designa a parte real do número complexo.

2. ESPAÇOS VECTORIAIS

2.1. Espaços vectoriais

- 2.1) Mostre que qualquer corpo \mathbb{K} é espaço vectorial sobre si próprio. Conclua que \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} são espaços vectoriais sobre, respectivamente, \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} .
- 2.2) Mostre que \mathbb{C} é espaço vectorial sobre \mathbb{R} para a adição usual de números complexos e a multiplicação de um real por um complexo. Podemos considerar \mathbb{R} um espaço vectorial sobre \mathbb{C} ?
- 2.3) Mostre que o conjunto \mathbb{R}^3 , com as operações de adição e multiplicação por escalar definidas por:

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$
$$\alpha(x_1, x_2, x_3) := (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3),$$

constitui um espaço vectorial real.

- 2.4) Sejam V_1, V_2, \dots, V_n espaços vectoriais sobre o mesmo corpo \mathbb{K} . Considere o produto cartesiano $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$ munido das operações:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$
$$\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) := (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n),$$

onde (x_1, x_2, \dots, x_n) e (y_1, y_2, \dots, y_n) designam elementos quaisquer de $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$ e α um elemento qualquer de \mathbb{K} .

- a) Prove que estas operações conferem ao conjunto $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$ uma estrutura de espaço vectorial sobre \mathbb{K} (a que se chama espaço vectorial produto dos espaços vectoriais V_1, V_2, \dots, V_n).
- b) Utilize a alínea anterior, para provar que \mathbb{K}^n é espaço vectorial sobre \mathbb{K} (sendo \mathbb{K} um corpo qualquer) e que em particular \mathbb{R}^n (respectivamente, \mathbb{C}^n) é espaço vectorial sobre \mathbb{R} (respectivamente, \mathbb{C}).
- 2.5) Verifique se cada um dos seguintes conjuntos de polinómios numa variável e com coeficientes reais é um espaço vectorial real (complexo) em relação às operações ordinárias de adição de polinómios e multiplicação de um polinómio por um número real (complexo):
- a) Conjunto dos polinómios de grau menor ou igual a n ,
- b) Conjunto dos polinómios de grau n (n fixo).

2.2. Dependência e Independência linear

2.1) Indique quais dos seguintes sistemas de vetores de \mathbb{R}^3 sobre \mathbb{R} são linearmente independentes:

- | | |
|---|---|
| 1) $((1, 1, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 1))$. | 2) $((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$. |
| 3) $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$. | 4) $((0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 0))$. |
| 5) $((1, 2, 3), (0, 2, 3), (0, 0, 3))$. | 6) $((1, 2, 3), (-1, 3, 4), (5, 5, -6))$. |
| 7) $((1, 2, 3), (-1, 3, 4), (5, -5, -6))$. | 8) $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 2, 3))$. |
| 9) $((1, 0, 0), (0, 1, 0))$. | 10) $((1, -2, 3), (-2, 4, -6))$. |
| 11) $((1, -2, 3))$. | 12) $((0, 0, 0))$. |

2.2) Indique quais dos seguintes sistemas de vetores de $\mathbb{R}_3[x]$ sobre \mathbb{R} são linearmente independentes:

- 1) $(1, x, x^2, x^3)$.
- 2) $(1 + x + x^2 + x^3, x + x^2 + x^3, x^2 + x^3, x^3)$.
- 3) $(1, x + x^2, x^3, 2 - 3x - 3x^2 + 4x^3)$.
- 4) $(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3, -2 - x^3, 4x^2)$.
- 5) $(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3, -2 - x^3, -7 + 2x + 3x^2)$.
- 6) $(7 - x^2, 4x^3)$.

2.3) Relativamente ao espaço vectorial real \mathbb{R}^3 :

a) Escreva o vector $u := (3, 4, -2)$ como combinação linear dos vetores:

- 1) $v := (1, 2, 0)$, $w := (0, 1, 2)$ e $z := (1, 0, 2)$.
- 2) $v := (6, 0, -4)$, $w := (0, 1, 0)$ e $z := (3, 2, -2)$.

b) Determine o valor de k , tal que $u := (1, -2, k)$ possa ser escrito como combinação linear de $v := (3, 0, -2)$ e $w := (2, -1, -5)$.

2.4) Determine os valores de a , para os quais os sistemas de vetores seguintes, são sistemas de vetores linearmente independentes nos espaços considerados:

- a) $((a, 1, 0), (1, a, 1), (1, 0, 0))$ em \mathbb{R}^3 sobre \mathbb{R} .
- b) $(a + t, 1 + at - t^2, 2 + t^2)$ em $\mathbb{R}_2[t]$ sobre \mathbb{R} .

2.5) Mostre que $((1 - i, i), (2, -1 + i))$ é um sistema de vetores linearmente independente em \mathbb{C}^2 sobre \mathbb{R} e linearmente dependente em \mathbb{C}^2 sobre \mathbb{C} .

2.6) No espaço vectorial real \mathbb{R}^3 :

- a) Mostre que o sistema de vetores $((0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 0))$ é linearmente dependente.
- b) Considere o vector $u := (1, -2, 3)$ e os sistemas de vetores (u, v, w) com:

1. $v := (0, 1, -2)$ e $w := (0, 0, 1)$.
 2. $v := (0, 1, -2)$ e $w := (1, -1, 1)$.
- 1) Estude quanto à dependência linear os dois sistemas de vetores.
 - 2) Verifique que o vector u só poderá ser expresso como combinação linear de v e w , quando o sistema de vetores (u, v, w) for linearmente dependente.
- 2.7) Considere o sistema de vetores $((1, 0, 0), (0, 1, 0))$ linearmente independente. Verifique que $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (2, 2, 0))$ é um sistema de vetores linearmente dependente, e que consequentemente, $(2, 2, 0)$ pode ser expresso como combinação linear de $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$.
- 2.8) Verifique que qualquer subsistema de vetores obtido a partir do sistema de vetores $((1, -1, 2), (1, 2, -1), (2, 1, -1))$ (sistema de vetores linearmente independente) é linearmente independente.
- 2.9) Verifique que o sistema de vetores $((1, 1, -1), (-2, -2, 2), (a, b, c))$ é linearmente dependente, para todo o vector $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
- 2.10) Verifique que o vector $(1, -4, 5)$ pode ser obtido por uma única combinação linear dos vetores:
- a) $u := (1, -1, 2)$ e $v := (1, 2, -1)$ (note que (u, v) é linearmente independente)
 - b) Considere o sistema de vetores linearmente independente (u, v, w) com

$$u := (1, 2, 3), \quad v := (-1, 3, 4) \quad \text{e} \quad w := (0, 0, 2).$$
 Verifique que os sistemas $(u, v + w, w)$, $(u, \alpha v, w)$ com $\alpha \neq 0$, $(u, v + \alpha w, w)$ são ainda sistemas linearmente independentes.
 - c) Considere o sistema de vetores linearmente dependente (u, v, w) com

$$u := (1, 2, 3), \quad v := (1, 2, 5) \quad \text{e} \quad w := (0, 0, 2).$$
 Verifique que os sistemas $(u, v + w, w)$, $(u, \alpha v, w)$ e $(u, v + \alpha w, w)$ são sistemas linearmente dependentes.
- 2.11) No espaço vectorial real \mathbb{R}^4 , considere os vetores
- $$a := (1, 0, 1, 0), \quad b := (1, 0, 0, 1) \quad \text{e} \quad c := (1, 1, 1, 1).$$
- a) Mostre que (a, b, c) é um sistema linearmente independente.
 - b) Será que (a, b) é um sistema linearmente independente? Justifique.
 - c) Indique todos os subsistemas de vetores linearmente independentes do sistema (a, b, c) .
 - d) Dê um exemplo de um vector $d \neq 0$, tal que (a, b, c, d) seja linearmente dependente.

2.3. Subespaços vectoriais

2.1) Dos seguintes subconjuntos, determine quais são subespaços do respectivo espaço vectorial real, indicando para esses, uma base.

a) $A := \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y = z + w = 0\}$.

b) $B := \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : w = 1\}$.

c) $C := \{(2a + 3b, 2a - b, 3a, 4b) \in \mathbb{R}^4 : a, b \in \mathbb{R}\}$.

d) $D := \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : y \geq 0\}$.

e) $E := \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x \cdot y = 0\}$.

f) $F := \{(2a + 3b, 2a - b, 0, 0) \in \mathbb{R}^4 : a, b \in \mathbb{R}\}$.

g) $G := \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : |x| > 2\}$.

h) $H := \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : \log(x) \geq 0\}$.

i) $I := \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : ax + by + cz + dw = 0 \text{ com } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ (fixos)}\}$.

j) $J := \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : ax + by + cz + dw = k \text{ com } a, b, c, d, k \in \mathbb{R} \wedge k \neq 0\}$.

k) $K := \{a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x] : a - b = 0\}$.

l) $L := \{a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{R}_3[x] : a - b = 0 \wedge c = \sqrt{2}d\}$.

m) $M := \{a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \in \mathbb{R}_4[x] : b = c \wedge d = 2a - e\}$.

2.2) Determine o subespaço do espaço vectorial real \mathbb{R}^3 gerado por:

a) $\{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (-2, 1, -2)\}$.

b) $\{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (-2, 1, -2), (-3, 4, -3)\}$.

c) $\{(0, 1, 0), (-2, 1, -2)\}$.

2.3) Determine o subespaço do espaço vectorial real $\mathbb{R}_2[x]$ gerado por:

a) $\{-1 + x, 1 + x^2\}$.

b) $\{x, 1 + x, 2 + 3x + 4x^2\}$.

c) $\{-1 + 2x, 2 + 3x^2\}$.

2.4) Sejam $L := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ e $M := \{(x, x, x) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\}$ subespaços do espaço vectorial \mathbb{R}^3 e sejam $A := L \cup M$, $B := L \cap M$ e $C := L + M$.

a) Determine A , B e C .

b) Dos subconjuntos A , B e C de \mathbb{R}^3 , qual(is) é(são) subespaço(s) do espaço vectorial \mathbb{R}^3 ?

2.5) No espaço vectorial real \mathbb{R}^3 .

- a) Mostre que $F := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 3y + 3z = 0\}$ é um subespaço vectorial real.
- b) Caracterize o subespaço G do espaço vectorial real \mathbb{R}^3 gerado pelo conjunto $\{u_1, u_2\}$, sendo $u_1 := (1, 0, 2)$ e $u_2 := (0, 1, 1)$.
- c) Caracterize o subespaço $F \cap G$ e indique a sua dimensão.
- d) Verifique que o sistema (u_1, u_2, u_3) constitui uma base de \mathbb{R}^3 , sendo u_3 um vector de \mathbb{R}^3 não pertencente a G .

2.4. Soma directa interna

2.1) Sejam A , B e C subespaços vectoriais de \mathbb{R}^3 , sendo

$$A := \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a + b + c = 0\}, \quad B := \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a = c\} \text{ e} \\ C := \{(0, 0, c) \in \mathbb{R}^3 : c \in \mathbb{R}\}.$$

- Mostre que $\mathbb{R}^3 = A + C$.
- Mostre que $\mathbb{R}^3 = A + B$.
- Determine $A \cup B$ e $B \cap C$ e verifique se são subespaços vectoriais de \mathbb{R}^3 .

2.2) No espaço vectorial \mathbb{R}^3 , considere os subespaços:

$$A := \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in \mathbb{R}\} \text{ e } B := \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : x, z \in \mathbb{R}\}.$$

- Represente-os graficamente.
- Determine graficamente, $A \cap B$. Determine algebricamente o mesmo conjunto e confirme a sua igualdade, pelos dois processos de cálculo.
- Verifique se $A \cap B$ é subespaço de \mathbb{R}^3 .

2.3) No espaço vectorial real \mathbb{R}^3 , considerem-se os subespaços:

$$A := \{(a, b, 0) \in \mathbb{R}^3 : a, b \in \mathbb{R}\} \quad B := \{(0, b, c) \in \mathbb{R}^3 : b, c \in \mathbb{R}\} \\ C := \{(0, 0, c) \in \mathbb{R}^3 : c \in \mathbb{R}\} \quad D := \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a = b = c\}.$$

- Mostre que $\mathbb{R}^3 = A + B$.
- Mostre que \mathbb{R}^3 não é soma directa de A e B .
- Mostre que $\mathbb{R}^3 = A \oplus C$ e $\mathbb{R}^3 = B \oplus D$.
- Determine a $\dim(A)$, $\dim(B)$, $\dim(C)$, $\dim(D)$. Verifique que em qualquer dos casos $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(A) + \dim(C) = \dim(B) + \dim(D)$.

2.4) No espaço vectorial real $\mathbb{R}_2[x]$, considerem-se os subespaços:

$$A := \{a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x] : a + b + c = 0\}, \\ B := \{a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x] : a = c\}, \\ C := \{a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x] : a = b\}.$$

- Mostre que:
 - $\mathbb{R}_2[x] = A + B$.
 - $\mathbb{R}_2[x] = A + C$.
 - $\mathbb{R}_2[x] = B + C$.
- Quais das somas anteriores são somas directas internas? Justifique.

2.5) No espaço vectorial real \mathbb{R}^4 , determine dois subespaços F e G distintos e tais que:

$$\mathbb{R}^4 = \langle A \rangle \oplus F = \langle A \rangle \oplus G,$$

sendo $A := \{(1, 3, 0, -1), (2, 5, 1, 2), (1, 2, 1, 3)\}$.

2.6) No espaço vectorial real $\mathbb{R}_2[x]$, determine dois subespaços F e G distintos e tais que:

$$\mathbb{R}_2[x] = \langle A \rangle \oplus F = \langle A \rangle \oplus G,$$

sendo $A := \{1, 1 + x + x^2\}$.

3. APLICAÇÕES LINEARES

3.1. Aplicações lineares

3.1) Relativamente aos espaços vectoriais reais das alíneas seguintes, indique quais das aplicações são lineares:

- a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f((x_1, x_2)) = (x_2, x_1)$.
- b) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f((x, y)) = (k_1, k_2)$ com k_1 e k_2 elementos reais fixos.
- c) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f((x, y)) = (\text{sen}(x), y)$.
- d) $f : \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}_n[x]$ definida por $f(p) = p'$, onde p' é o polinómio obtido por derivação do polinómio p .
- e) $f : \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}_n[x]$ definida por $f(p_x) = p_{x+1}$, onde p_x é o polinómio na indeterminada x .
- f) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ definida por $f((a, b, c)) = a + bx + cx^2$.
- g) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ definida por $f(x) = e^x$, onde $\mathbb{R}_{>0}$ é o espaço vectorial real, cuja operação binária nele definida é o produto de números reais e a multiplicação por escalar é dada pela potenciação.
- h) $f : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(a + bx + cx^2 + dx^3) = \int_0^2 -(c + d)x + (a + b)x^3 \, dx.$$

3.2) Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \bar{z}$, onde \bar{z} é o conjugado de z .

Mostre que:

- a) f é linear, se \mathbb{C} é considerado espaço vectorial real.
- b) f não é linear, se \mathbb{C} é considerado espaço vectorial complexo.

3.2. Núcleo e Imagem

3.1) Considere a aplicação $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_2 + x_3).$$

Prove que se trata de uma aplicação linear. Determine o respectivo núcleo e diga se f é um monomorfismo.

3.2) Considere a aplicação $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2, -2x_1 - x_3 + 2x_4).$$

- Mostre que é uma aplicação linear. Determine o respectivo núcleo e diga se f é um monomorfismo.
- Determine ainda, as imagens inversas dos vectores $(1, 0)$ e $(-1, 3)$ de \mathbb{R}^2 .

3.3) Considere a aplicação $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por:

$$f(x, y, z) = (x - y + z, x + y + 2z).$$

- Mostre que f é uma aplicação linear.
- Determine $\text{Ker}(f)$ e diga se f é um monomorfismo.
- Determine a imagem de f , ou seja, $\text{Im}(f)$ e diga se f é um isomorfismo.
- Dado o vector $v = (1, -2)$, determine $f^{-1}(\{v\})$.
- Determine $\text{Ker}(2f)$.

3.4) Considere uma aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que:

$$f(1, 1, 0) = (0, 1, 1), \quad f(1, 0, 1) = (1, 1, 1) \quad \text{e} \quad f(0, 1, 1) = (2, 1, -1).$$

- Determine a aplicação linear f .
- Determine $\text{Ker}(f)$. Diga se f é um automorfismo.
- Determine $f^{-1}(\{(2, 1, -1)\})$.

3.5) Considere duas aplicações lineares $f, g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tais que:

$$\begin{aligned} f(1, 0, 0, 0) &= (1, 0, 0, 1), & f(1, 1, 0, 0) &= (0, 1, 0, 1), \\ f(1, 1, 1, 0) &= (1, 0, 1, 0), & f(1, 1, 1, 1) &= (0, 1, 1, 0) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g(1, 0, 0, 0) &= (1, 0, -1, 0), & g(0, 1, 0, 0) &= (0, 1, -1, 0), \\ g(0, 0, 1, 0) &= (1, 0, -1, 1), & g(0, 0, 0, 1) &= (1, -1, 1, -1). \end{aligned}$$

Determine:

- a) f e g .
- b) $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(g)$.
- c) $\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g)$.
- d) $\text{Ker}(f + g)$.
- e) $\text{Ker}(f \circ g)$.

3.6) Seja f um endomorfismo em \mathbb{R}^3 e tal que:

$$f(1, 1, 0) = (0, 1, 0), f(0, 1, 0) = (0, 1, 0) \text{ e } f(0, 0, 1) = (1, 0, 0).$$

- a) Determine $f(1, -1, 1)$ e $f^{-1}(\{(0, -1, 1)\})$.
- b) Diga se f é um epimorfismo.
- c) Determine $\text{Ker}(f)$ e $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$.

3.7) Considere a aplicação $f : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_1[x]$ definida por:

$$f(a + bx + cx^2) = b + (a - c)x.$$

- a) Mostre que f é uma aplicação linear.
- b) Determine $\text{Ker}(f)$ e uma sua base e, a sua dimensão.

3.3. O espaço $\text{Hom}(V, W)$

3.1) Sejam $f, g \in \text{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. Mostre que para todo o $x \in \mathbb{R}^3$, a aplicação

$$h(x) = (f(x), g(x))$$

é uma aplicação linear de \mathbb{R}^3 em \mathbb{R}^2 , ou seja, $h \in \text{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$.

3.2) Seja $f : V \rightarrow W$ uma aplicação entre os espaços vectoriais V e W de bases (e_1, e_2, e_3) e (e'_1, e'_2) , respectivamente. Considere-se f definida por:

$$f(xe_1 + ye_2 + ze_3) = (x + k)e'_1 + (y + z)e'_2, \text{ com } k \in \mathbb{R}.$$

- Para que valores de k é f uma aplicação linear.
- Para os valores de k determinados na alínea anterior, determine o $\text{Ker}(f)$ e uma sua base.

3.3) Sejam $f, g \in \text{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ e $h \in \text{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ definidas, respectivamente, por:

$$f(x, y, z) = (2x - y, z) \quad , \quad g(x, y, z) = (x - z, 2y) \quad \text{e} \quad h(x, y) = x + 3y.$$

- Determine a lei de transformação de $f + g$.
- Determine a lei de transformação de $h \circ (f + g)$.
- Verifique que se tem $h \circ (f + g) = (h \circ f) + (h \circ g)$.
- Calcule $\text{Ker}(h \circ (f + g))$.

3.4) Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ um escalar arbitrário e $f, g \in \text{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ definidas, respectivamente, por:

$$f(x, y) = (2x, 0, -y) \quad \text{e} \quad g(x, y) = (y - x, 2x).$$

- Determine a lei de transformação de αf .
- Determine a lei de transformação de $g \circ (\alpha f)$.
- Verifique que se tem $\alpha(g \circ f) = (\alpha g) \circ f = g \circ (\alpha f)$.
- Determine $\text{Im}(\alpha(g \circ f))$.

4. MATRIZES

4.1. Operações fundamentais sobre matrizes

4.1) Considere as seguintes matrizes sobre o corpo \mathbb{R} :

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad B := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad C := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Verifique quais das seguintes operações estão definidas e, para essas determine o seu valor:

- a) $(5A)(4C)$. b) $A + B$. c) $B + C$.
d) $C^t B$. e) BC^t . f) AC .
g) CA . h) $(AC)^2$. i) $(AC)B$.
j) $A(CB)$. k) $(CB)^3 + I_3$.

4.2) Considere o espaço vectorial $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$:

a) Mostre que os seguintes sistemas de vectores:

- 1) $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$.
2) $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$.

constituem bases nesse espaço.

- b) Escreva o vector $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ como combinação linear das bases das alíneas anteriores.

4.3) Considere as seguintes matrizes de ordem 2×2 sobre \mathbb{R} :

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mostre que $AB \neq BA$. O que conclui quanto à comutatividade de matrizes?

4.4) Dadas duas matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ elas comutam se $AB = BA$. Determine a expressão geral das matrizes de 2×2 que comutam com a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

4.5) Considere as seguintes matrizes de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$:

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}, B := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } C := \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Mostre que $AB = AC$ e no entanto $B \neq C$, ou seja, a lei do corte não é válida para o produto de matrizes.

4.6) Considere as seguintes matrizes sobre \mathbb{R} :

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Resolva as seguintes equações matriciais:

- a) $2A + 3X = 4B$. b) $BA + 5X = A$. c) $3B + 2X = A$.
d) $3B^2 + 2X = 2A + \sqrt{2}B$. e) $B^t A + X = -X + A$. f) $2X + AX + B = O_{3 \times 3}$.

4.2. Matriz de uma aplicação linear

4.1) Considerando a aplicação identidade $\text{id}_V : V \rightarrow V$ e fixando em V uma base qualquer, determine a matriz de id_V .

4.2) Determine a matriz da aplicação linear $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$f(x, y) = (x + y, x - y, y - x),$$

com respeito à base canónica de \mathbb{R}^2 e à base $((1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1))$ de \mathbb{R}^3 .

4.3) No espaço vectorial \mathbb{R}^3 , a matriz $A := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ define uma aplicação linear em relação a uma base fixa nesse espaço. Determine essa aplicação linear, quando fixamos no espaço as seguintes bases:

- a) $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$.
- b) $((1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$.
- c) $((1, 0, 0), (0, -1, 1), (1, 0, 1))$.

4.4) Considere a aplicação $f : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$ definida por:

$$f(p) = x^2 \frac{d}{dx}(p),$$

sendo $\frac{d}{dx}$ a derivada em ordem a x .

- a) Mostre que f é uma aplicação linear.
- b) Suponha, fixadas em $\mathbb{R}_2[x]$ e em $\mathbb{R}_3[x]$, respectivamente, as bases

$$(1, 1 + x, 1 + x + x^2)$$

$$\text{e } (1, 1 + x, 1 + x + x^2, 1 + x + x^2 + x^3).$$

Determine a matriz que representa f em relação a essas bases.

- c) Determine $\text{Ker}(f)$ e $\text{Im}(f)$ e, estude f quanto à sua invertibilidade.

4.5) Considere o espaço vectorial $\mathbb{R}_3[x]$. Seja $f : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$ a aplicação linear definida por:

$$f(p) = p'' + 4p' + p,$$

onde p'' e p' representam respectivamente, a segunda e primeira derivada de p .

Determine a matriz da aplicação linear f em relação à base $(x, 1 + x, x + x^2, x^3)$ fixada nos respectivos espaços vectoriais domínio e codomínio de f .

4.6) No espaço vectorial \mathbb{R}^2 , fixe-se a base canónica.

- Determine $f(x, y)$, sendo f a aplicação definida em relação à base canónica pela matriz $A := \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.
- Verifique que f é um automorfismo em \mathbb{R}^2 e, determine a respectiva aplicação inversa.
- Determine a matriz de f^{-1} para a base canónica e verifique que é a inversa da matriz A .

4.7) Seja $A := [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Designa-se por traço de A o escalar definido por:

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

- Mostre que a aplicação $t : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ definida por:

$$t(A) = \text{tr}(A)$$

é uma aplicação linear.

- Considere também a matriz $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Mostre que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
- Considere $n = 2$, e as bases

$$\left(\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{array} \right] \right)$$

e (α) , com $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{K})$ e \mathbb{K} , respectivamente.

Determine a matriz de t relativamente a estas bases.

4.8) Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ aplicações lineares definidas, respectivamente, por:

$$f(x) = (3x, 0) \text{ e } g(x) = (x, -2x).$$

Determine:

- $A := M(f; (1), ((1, 0), (0, 1)))$.
- $B := M(g; (1), ((1, 0), (0, 1)))$.
- $C := M(f + g; (1), ((1, 0), (0, 1)))$.
- Confirme que $A + B = C$.

4.9) Sejam $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ aplicações lineares definidas, respectivamente, por:

$$f(x, y) = (x, y, x + y) \text{ e } g(x, y, z) = x + y + z.$$

Determine:

- a) $A := M(f; ((1, 0), (0, 1)), ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)))$.
- b) $B := M(g; ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)), (1))$.
- c) $C := M(g \circ f, ((1, 0), (0, 1)), (1))$.
- d) Confirme que $BA = C$.

4.10) Considere a aplicação $f : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida por:

$$f(a + bx + cx^2) = \begin{bmatrix} a + b & c \\ b & a \end{bmatrix}$$

- a) Mostre que $(1, x, 1+x^2)$ e $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$ são bases de $\mathbb{R}_2[x]$ e $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, respectivamente.
- b) Mostre que f é uma aplicação linear.
- c) Determine a matriz de f relativamente às bases da alínea anterior.
- d) Determine $\text{Ker}(f)$ e $\text{Im}(f)$.
- e) Diga, justificando, se f é uma aplicação linear invertível.

4.3. Característica de uma matriz

4.1) Determine a característica das seguintes matrizes sobre \mathbb{R} :

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$
$$D := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad E := \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad F := \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

4.2) Determine a característica das seguintes matrizes sobre \mathbb{C} :

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & i & -1 - 2i \\ i & 1 & -1 + i \end{bmatrix} \quad B := \begin{bmatrix} 1 & -i & -i \\ -1 & i & 1 \\ 1 & i & 3i \end{bmatrix}$$
$$C := \begin{bmatrix} i & 1 & 1 \\ 1 & -i & 0 \end{bmatrix} \quad D := \begin{bmatrix} 1 & i & -i & 0 \\ 2 & i & 0 & -1 \\ 2+i & 0 & 1 & -i \\ 1 & -3+2i & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$E := \begin{bmatrix} 1 & i \\ 2i & 1 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \quad F := \begin{bmatrix} i & i \\ 1 & 1 \\ 0 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}.$$

4.3) Verifique se os seguintes sistemas de vectores são linearmente independentes:

- $((2, 0, 1, 0), (4, 1, 0, 1), (1, 2, 1, 0), (6, 1, 1, 1)).$
- $((1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 1), (2, 1, 0, 1), (1, 1, 0, -1)).$
- $((1, 1, 0, 0, -1), (1, 1, 1, 1, 2), (2, 1, 0, 1, -2), (1, 1, 0, -1, 0)).$
- $((1, 1, 0, 0, -1), (1, 1, 1, 1, 2), (2, 1, 0, 1, -2), (1, 1, 0, -1, 0), (1, 0, 1, -1, 1)).$

4.4) Determine os valores reais de α para os quais a característica das seguintes matrizes é máxima:

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B := \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad C := \begin{bmatrix} 1 & -\alpha & 2 \\ 2 & 3 & \alpha \end{bmatrix}$$
$$D := \begin{bmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -\alpha & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

4.5) Discuta, segundo os valores reais de α e β , a característica das seguintes matrizes:

$$A := \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & \beta \\ \beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \alpha \end{bmatrix} \quad B := \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha + \beta & \beta \\ 1 & \beta & \alpha \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad C := \begin{bmatrix} 1 & 2\alpha + \beta & \alpha + \beta \\ 1 & \alpha + \beta & \beta \\ -1 & \alpha & \alpha \end{bmatrix}.$$

4.4. Matriz de mudança de base e mudanças de base

4.1) Considere em \mathbb{R}^3 as bases:

$$\begin{aligned}(v_1, v_2, v_3) &:= ((2, 1, 1), (0, 0, 1), (-1, 1, 1)) \\ (u_1, u_2, u_3) &:= ((1, 1, 0), (-1, 1, 1), (0, 1, 2))\end{aligned}$$

- Determine $M(\text{id}_{\mathbb{R}^3}; (u_j)_j, (v_j)_j)$.
- Escreva o vector $5u_1 + 4u_2 + u_3$ como combinação linear dos vectores v_1, v_2 e v_3 .

4.2) Considere as seguintes bases de \mathbb{R}^3 e \mathbb{R}^2 , respectivamente:

$$(v_i)_i := ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)) \quad , \quad (u_i)_i := ((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$$

e

$$(v'_1, v'_2) := ((1, 0), (0, 1)) \quad , \quad (u'_1, u'_2) := ((1, 1), (1, 0)).$$

Considere também a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por:

$$f(x, y, z) = (x + y, y + z).$$

Determine:

- $A := M(f; (v_i)_i, (v'_j)_j)$.
 - $B := M(f; (u_i)_i, (u'_j)_j)$.
 - As matrizes invertíveis P e Q que verificam a igualdade $B = Q^{-1}AP$.
- 4.3) Seja $f : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear cuja matriz em relação às bases

$$(v_1, v_2, v_3) := (1, x, x^2) \quad \text{e} \quad (u_1, u_2, u_3) := ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$$

de $\mathbb{R}_2[x]$ e \mathbb{R}^3 , respectivamente, é $A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Determine $M(f; (v'_j)_j, (u'_i)_i)$ em que:

- $(v'_j)_j := (2, 1 + x, x^2)$ e $(u'_i)_i := ((1, 1, 0), (1, 1, 1), (0, 1, 1))$.
 - $(v'_j)_j := (1 + x, 2x, x^2)$ e $(u'_i)_i := ((1, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 2))$.
- 4.4) Sejam V e W espaços vectoriais reais e (v_1, v_2, v_3) e (w_1, w_2) bases de V e W , respectivamente. Seja $f : V \rightarrow W$ uma aplicação linear tal que:

$$M(f; (v_j)_j, (w_i)_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Mostre usando matrizes que $(v_1 - v_2, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3)$ e $(w_1 + 2w_2, -w_2)$ são bases de V e W , respectivamente.
- Determine a matriz de f em relação às bases da alínea anterior.

5. SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES. DETERMINANTES

5.1. Sistemas de equações lineares

5.1) Resolva, caso seja possível, os seguintes sistemas de equações lineares:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a)} \begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ x + 5y - z = 1 \\ x + y + z = 3 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x + 2y + 3z + 3w = 10 \\ x + 3y + 2z + 4w = 8 \\ 2x + 5y + 4z + 7w = 8 \\ 2x + 5y + 8z + 6w = 21 \end{cases} \\
 \text{c)} \begin{cases} 2x + 3y + z = y + 3x \\ x - 3z = 2y + 1 \\ 3y + z = 2 - 2x \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} -x - y + z = 1 \\ 3x + 2y + z = 2 \\ x + y + z = 3 \end{cases} \\
 \text{e)} \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - y + 3z = 2 \\ 4x + y + z = 4 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ 2x - z + 2w = 1 \\ 2x + y - 2z - w = -1 \\ 3x - y + 8z = 5 \end{cases} \\
 \text{g)} \begin{cases} x - 2y + 3z + w = 1 \\ 3x + 15y + 18z + 14w = 12 \\ 2x + y - z - w = -2 \\ x - 6y + 11z + 7w = 9 \end{cases} & \text{h)} \begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ 2x - y + z - w = 0 \\ 5x - y + z - w = 0 \\ -x + 5y + z + 2w = 0 \end{cases}
 \end{array}$$

5.2) Discuta, segundo os valores dos parâmetros $a, b, \lambda \in \mathbb{R}$, os sistemas:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a)} \begin{cases} x + y + z = \lambda + 1 \\ x + \lambda y + z = 1 \\ \lambda x + y = \lambda + 2\lambda^2 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x + y + (1 - \lambda)z = \lambda + 1 \\ (1 + \lambda)x - y + 2z = 0 \\ 2x - \lambda y + 3z = \lambda + 2 \end{cases} \\
 \text{c)} \begin{cases} \lambda x + y + z - w = 0 \\ x + \lambda y + z - \lambda w = 0 \\ x + y + \lambda z + \lambda^2 w = 0 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} x + \lambda y + z = 0 \\ \lambda x + y + \lambda z = 1 \\ x + \lambda y = \lambda \end{cases} \\
 \text{e)} \begin{cases} 2x + y + w = 2 \\ 3x + 3y + az + 5w = 3 \\ 3x - 3z - 2w = b \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} x + 3y + 4z + 2t = 1 \\ 3x + 4y - z + 3t = 3 \\ 2x + y + az + t = b \end{cases}
 \end{array}$$

5.3) Averigüe se existe una matriz columna X , tal que $AX = BX$ com:

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B := \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}.$$

5.4) Determine as matrizes inversas de:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}. \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}. \quad \text{c) } \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & -9 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{d) } \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}. \quad \text{e) } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}. \quad \text{f) } \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

5.2. Determinantes

5.1) Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{6 \times 6}(\mathbb{K})$. No desenvolvimento do $\det(A)$, quais os sinais dos termos:

a) $a_{13}a_{21}a_{32}a_{46}a_{55}a_{64}$.

b) $a_{23}a_{12}a_{45}a_{34}a_{56}a_{61}$.

5.2) Calcule o determinante das seguintes matrizes:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$. b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

d) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. e) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. f) $\begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 10 & 10 & 15 & 10 \\ 5 & 10 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 9 & 15 & 5 & 5 \\ 5 & 10 & 40 & 35 & 5 \end{bmatrix}$.

5.3) Verifique que são nulos os determinantes das seguintes matrizes:

a) $\begin{bmatrix} x & x' & ax + bx' \\ y & y' & ay + by' \\ z & z' & az + bz' \end{bmatrix}$. b) $\begin{bmatrix} a + b & c & 1 \\ b + c & a & 1 \\ c + a & b & 1 \end{bmatrix}$.

5.4) Sem calcular os determinantes, prove as seguintes igualdades:

a) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x + b_1y + c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x + b_2y + c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x + b_3y + c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

b) $\begin{vmatrix} a_1 + b_1x & a_1 - b_1x & c_1 \\ a_2 + b_2x & a_2 - b_2x & c_2 \\ a_3 + b_3x & a_3 - b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

5.5) Calcule o determinante das seguintes matrizes:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$. b) $B := [b_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} := \begin{cases} 2 & \text{se } i \neq j \\ i & \text{se } i = j \end{cases}$.

5.6) Resolva as seguintes equações:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = 0. \qquad \text{b) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 2 & 1 \\ -1 & 1 & x & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\text{c) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n-x \end{vmatrix} = 0.$$

5.7) Seja $A := \begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -3 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.

- a) Calcule $\det(A)$. b) Calcule \widehat{A} .
c) Calcule $\text{adj}(A)$. d) Determine A^{-1} .

5.8) Seja $A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$.

- a) Calcule $\det(A)$. b) Calcule $\text{adj}(A)$.
c) Verifique se $A\widehat{A} = \det(A)I_{3 \times 3}$. d) Determine A^{-1} .

- 5.9) Considere a função $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z))$, onde para cada $i = 1, 2, 3$ as funções $f_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ são definidas, respectivamente, por:

$$f_1(x, y, z) := 2x^2 + y^2 + 3z \quad , \quad f_2(x, y, z) := x + \cos(z) \quad \text{e} \quad f_3(x, y, z) := 2x + \text{tg}(y).$$

- a) Verifique que f não é uma aplicação linear.
b) Calcule o jacobiano da função f .

- 5.10) Utilizando a regra de Cramer, resolva os seguintes sistemas de equações:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - 5y + 2z = -7 \\ x + 2y - 4z = 3 \\ 3x - 4y - 6z = 5 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x - y + z + t = 1 \\ 2x - y + z - 3t = 2 \\ x - 3y + 2z - 6t = 1 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + 2y + 3z + 4w = 5 \\ 2x + y + 2z + 3w = 1 \\ 3x + 2y + z + 2w = 1 \\ 4x + 3y + 2z + w = -5 \end{cases}.$$

6. ESPAÇOS COM PRODUTO INTERNO

6.1. Produtos internos. Normas

6.1) Verifique se as seguintes igualdades definem ou não produtos internos em \mathbb{R}^3 :

a) $\langle u, v \rangle := u_1v_1 + 2u_2v_2 + u_1v_2 + u_2v_1 + u_3v_3$.

b) $\langle u, v \rangle := 3u_1v_1 - u_1v_2 - u_2v_1 + 2u_2v_2 + 5u_3v_3$.

6.2) Relativamente aos produtos internos definidos no exercício anterior, determine $\langle u, v \rangle$, onde:

a) $u := (1, 1, 1)$ e $v := (1, 2, 3)$.

b) $u := (-1, 0, 1)$ e $v := (-1, -2, 0)$.

6.3) Em $\mathbb{R}_2[x]$, verifique se são produtos internos:

a) $\langle p, q \rangle := a_2b_2 + a_1b_1 + a_0b_0$.

b) $\langle p, q \rangle := \frac{1}{4}a_0b_0 + \frac{1}{9}a_1b_1 + 2a_2b_2$.

6.4) Verifique se as igualdades seguintes definem ou não produtos internos:

a) $\langle x, y \rangle := \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)$, no espaço vectorial \mathbb{R}^n .

b) $\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i$, no espaço vectorial \mathbb{R}^n .

c) $\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$, no espaço vectorial \mathbb{C}^n .

d) $\langle A, B \rangle := \sum_{i,j=1}^n a_{ij} b_{ij}$, no espaço vectorial $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$.

6.5) Considere as matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$:

a) Prove que $\langle A, B \rangle := \text{tr}(A^t B)$ é um produto interno, onde tr é o traço da matriz.

b) Mostre que $|\text{tr}(A^t B)|^2 \leq \text{tr}(A^t A) \text{tr}(B^t B)$.

6.6) Sejam u, v e w vectores de um espaço euclidiano satisfazendo:

$$\begin{aligned}\langle u, v \rangle &= 2, & \langle v, w \rangle &= -3 & \text{e} & \langle u, w \rangle = 5 \\ \|u\| &= 1, & \|v\| &= 2 & \text{e} & \|w\| = 7.\end{aligned}$$

Calcule:

- $\langle u + v, w + v \rangle$.
- $\langle 2v - w, 3u + 2w \rangle$.
- $\|u + v\|$.
- $\|u - 2v + 4w\|$.

6.7) Sejam u, v e w vectores de um espaço unitário satisfazendo:

$$\begin{aligned}\langle u, v \rangle &= 2 + 3i, & \langle v, w \rangle &= -3 - i & \text{e} & \langle u, w \rangle = 5 - 2i \\ \|u\| &= 1, & \|v\| &= 2 & \text{e} & \|w\| = 7.\end{aligned}$$

Calcule:

- $\langle u + v, w + v \rangle$.
- $\langle 2v - w, 3iu + 2w \rangle$.
- $\|u + v\|$.
- $\|u - 2v + 4iw\|$.

6.8) Considere o espaço euclidiano \mathbb{R}^3 com o produto interno canónico. Determine um vector normado e perpendicular ao vector $(1, 0, 2)$.

6.9) Considere no espaço vectorial \mathbb{R}^3 a base canónica (fixa) e o produto interno canónico. Dados os vectores:

$$u := e_1 - e_2 + 2e_3, \quad v := e_2 - 2e_3 \quad \text{e} \quad w := 2e_1 + e_2.$$

- Determine um vector perpendicular a u e a v e de norma igual a $\sqrt{10}$.
- Determine um vector perpendicular a v e a w e de norma igual a $\sqrt{15}$.

6.10) Determine para o produto interno canónico de \mathbb{R}^3 , o seno e o coseno do ângulo formado pelos seguintes vectores:

- $a := \alpha e_1 + e_2 - e_3$ e $b := 6e_1 - 3e_2 + e_3$.
- $a := e_1 - e_2 + 2e_3$ e $b := 2e_1 + 2e_2 - 5e_3$.

6.11) Determine para que valores de α , são perpendiculares os seguintes vectores, para o produto interno canónico de \mathbb{R}^3 :

- $a := 2e_1 + \alpha e_2 + e_3$ e $b := 4e_1 - 2e_2 - 2e_3$.
- $a := -1e_1 + 2e_2 + \alpha e_3$ e $b := -5e_1 - 2\alpha e_2 - 2e_3$.

6.2. Bases ortonormadas. Processo de ortonormalização

6.1) Considere definido em \mathbb{R}^3 o produto interno canónico. Aplique o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt aos seguintes sistemas de vectores linearmente independentes:

a) $((1, -2, 2), (-1, 0, 1), (5, -3, -7))$.

b) $((1, 0, 2), (-1, 1, 1), (1, -3, 0))$.

6.2) Considere definido em $\mathbb{R}_2[x]$ o produto interno canónico. Aplique o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt aos seguintes sistemas de vectores linearmente independentes:

a) $(1, x, x^2)$.

b) $(1, 2x + x^2, 3x^2)$.

6.3) Considere o espaço vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ com o seguinte produto interno:

$$\langle p, q \rangle := \int_{-1}^1 pq dx,$$

em relação à base canónica $(1, x, x^2)$.

Determine uma base ortonormada para o produto interno dado.

6.4) Considere o espaço vectorial $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ com o seguinte produto interno:

$$\langle A, B \rangle := \text{tr}(A^t B),$$

em relação à base canónica $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ desse espaço.

Determine uma base ortonormada para o produto interno dado.

6.3. Produto externo e produto misto de vectores

- 6.1) Considere no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 uma base ortonormada (fixa) (e_1, e_2, e_3) . Dados os vectores:

$$u := e_1 - e_2 + 2e_3 \quad , \quad v := e_2 + 2e_3 \quad \text{e} \quad w := e_1 + e_2.$$

Determine:

- a) $u \wedge v$. b) $v \wedge w$. c) $w \wedge w$. d) $u \wedge (v \wedge w)$.
e) $(u \wedge v) \wedge w$. f) $(u \wedge u) \wedge w$. g) $(u + v) \wedge w$. h) $u \wedge (v + w)$.
- 6.2) No espaço euclidiano \mathbb{R}^3 , considere fixa a base (e_1, e_2, e_3) formada por vectores normados e que fazem entre si ângulos no valor de $\frac{\pi}{3}$. Dados os vectores:

$$x := e_1 - e_3 \quad , \quad y := -e_1 + e_2 \quad \text{e} \quad z := -e_1 + 2e_3.$$

Determine:

- a) a) $x \wedge y$. b) $\langle x \wedge y, z \rangle$. c) $(x \wedge y) \wedge z$.

- 6.3) Considere o espaço vectorial real \mathbb{R}^3 .

- a) Verifique se as seguintes bases são bases directas:

- 1) $((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$.
- 2) $((1, 1, 0), (1, 1, 1), (1, 0, 0))$.
- 3) $((1, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 1, 0))$.

- b) Verifique se as seguintes bases são bases inversas:

- 1) $((1, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 1))$.
- 2) $((1, 0, 0), (1, 1, 1), (1, 1, 0))$.
- 3) $((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$.

- 6.4) Sejam u e v vectores linearmente independentes, num espaço euclidiano de dimensão 3. Considere o vector $w := (v \wedge u) - v$ nesse espaço.

- a) Verifique se $u \perp (v + w)$.
- b) Mostre que $\frac{\pi}{2} \leq \angle(v, w) \leq \pi$.
- c) Se $\|v\| = 1$ e $\|u \wedge v\| = 2$, calcule $\|w\|$.

- 6.5) Considere-se o espaço euclidiano \mathbb{R}^3 e a base ortonormada (fixa) (e_1, e_2, e_3) e ainda a aplicação $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $x \mapsto x \wedge (e_1 + e_2 + e_3)$.

- a) Verifique se f é um endomorfismo no espaço \mathbb{R}^3 .
- b) Determine a matriz de f , em relação à base considerada.

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. Monteiro. *Álgebra Linear e Geometria Analítica - Problemas e Exercícios*. McGraw-Hill, 1997.
- [2] S. Lipschutz. *Álgebra Linear*. McGraw-Hill, 1981.