

Conteúdo

1	Nota prévia	1
2	Introdução à Lógica	1
2.1	Expressões com significado	1
2.2	Valores lógicos das proposições	2
2.3	Princípios Fundamentais da Lógica Matemática	3
2.4	Operações lógicas sobre proposições	3
2.5	Operações lógicas no universo $\{0, 1\}$	5
2.6	Propriedades das operações lógicas:	8
2.7	Argumentos válidos	10
2.8	Quantificadores	12
3	Conjuntos	13
3.1	Relações entre conjuntos	13
3.2	Operações com conjuntos	13
3.3	Propriedades das operações entre conjuntos	14
4	Relações binárias	14
4.1	Relações de equivalência	15
4.2	Relações de ordem	16
5	Aplicações	17
6	Cardinalidade	18
7	Indução Matemática	19
8	Divisibilidade	21
9	Bases de numeração	22
10	Algoritmos para realizar operações aritméticas	23
10.1	Cálculo de restos de divisões inteiras	27

11 Critérios de Divisibilidade	27
11.1 Critérios de divisibilidade na base 10	27
11.2 Critérios de divisibilidade na base β	27
12 Números Primos	28
12.1 Máximo divisor comum e números primos entre si	29
13 Congruências	30
14 Equações Diofantinas Lineares	31
15 Cálculo Combinatório	33
15.1 Propriedades da função C_p^m	34
15.2 Binómio de Newton	35
16 Teoria de Grafos	36
16.1 Introdução	36
16.2 Definições e conceitos básicos	41
16.3 Matrizes de grafos	43
16.4 Graus dos vértices	44
16.5 Sucessores e antecessores	45
16.6 Caminhos e conectividade	47
16.7 Circuitos e caminhos de Euler	55
16.7.1 Algoritmo de Fleury	56
16.8 Grafos e relações binárias	62
16.8.1 Relações de equivalência e componentes fortemente conexas	62
16.8.2 Relações de ordem e grafos	63
16.9 Grafos completos	65
16.10 Grafos bipartidos	66
16.11 Grafos complementares	67
16.12 Árvores	68
16.12.1 Árvores de suporte	70
16.12.2 Árvore de suporte mínima	72
16.13 Planaridade	75
16.14 Caminhos mais curtos	80

1 Nota prévia

Este texto de apoio destina-se, como o nome indica, a apoiar o estudo da teoria indispensável à resolução dos exercícios. Não pretende substituir a frequência das aulas teóricas, nem a consulta da bibliografia indicada.

2 Introdução à Lógica

2.1 Expressões com significado

Em lógica trabalhamos com expressões com significado. Estas dividem-se em:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{nomes termos ou } \mathbf{designações} \\ \text{frases ou } \mathbf{proposições} \end{array} \right.$$

Designações: designam entes (coisas, pessoas, números, ...)

Exemplos de termos:

→ Lisboa

→ copo

→ 3

→ $2 + \sqrt{7}$

Proposições: são expressões a respeito das quais faz sentido dizer que são verdadeiras ou falsas. As proposições afirmam factos ou exprimem juízos que formamos a respeito de entes.

Exemplos de proposições:

→ Lisboa é uma cidade

→ Vasco da Gama descobriu a Austrália

→ $2 + 3 = 7$

→ $\sqrt{8} < 3$

2.2 Valores lógicos das proposições

As proposições podem ser verdadeiras ou falsas

Exemplos de proposições verdadeiras:

→ A Terra é um planeta

→ Pedro Álvares Cabral descobriu o Brasil

→ $3 + 2 = 5$

Exemplos de proposições falsas:

→ A Lua é uma estrela

→ Dante escreveu a Odisseia

→ 9 é um número par

Toda a gente sabe que a Lua é um planeta, que Homero escreveu a Odisseia e que 9 é um número ímpar.

Há, no entanto, proposições a respeito das quais, por ignorância sobre o assunto ou por causa da imprecisão da linguagem, resultante do uso de termos não definidos ou ambíguos, não é fácil dizer se são verdadeiras ou falsas.

Exemplos:

→ No dia 15 de Janeiro de 2010 vai chover

→ A música de Strawinski é bela

→ Não há vida fora da Terra

Ninguém pode dizer exactamente qual o tempo que fará daqui a uns anos. Quanto à beleza da música de Strawinski, tudo depende do gosto e sensibilidade do ouvinte e a respeito de haver ou não vida fora da Terra ninguém sabe o que acontece.

Em lógica matemática não se consideram proposições deste tipo.

2.3 Princípios Fundamentais da Lógica Matemática

Em lógica matemática, adopta-se como regras fundamentais os dois seguintes princípios ou **axiomas**:

Princípio da não contradição:

Uma proposição não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa.

Princípio do terceiro excluído:
--

Uma proposição ou é verdadeira ou é falsa.
--

2.4 Operações lógicas sobre proposições

Quando pensamos efectuamos operações lógicas sobre proposições. Vamos resumir as operações fundamentais:

Negação: Consiste em converter uma proposição numa outra que será verdadeira se a primeira for falsa e falsa se a primeira for verdadeira.

Exemplos:

→ Negar que "O Sol é um planeta" é afirmar que "O Sol não é um planeta";

→ Negar que "Todos os homens são inteligentes" é afirmar que "Nem todos os homens são inteligentes", isto é, afirmar que "Há pelo menos um homem que não é inteligente";

→ Negar que "Nenhum peixe voa" é afirmar que "Há peixes que voam".

Conjunção: Operação que consiste em ligar duas proposições pela conjunção "e".

Exemplos:

→ A lua é um satélite da Terra e o Sol é uma estrela

→ Vénus é uma estrela e a Lua é um planeta

→ A baleia é um peixe e os lobos voam.

A primeira proposição é verdadeira, pois ambas as proposições que estão ligadas pela palavra "e" são verdadeiras, isto é, é verdade que "A lua é um satélite da Terra" e também é verdade que "o Sol é uma estrela". Por outro lado, as proposições seguintes são ambas falsas. Na segunda proposição há um "e" entre uma proposição falsa, "Vénus é uma estrela" e uma proposição verdadeira, "a Lua é um planeta". Quanto à terceira proposição ambas as proposições ligadas pela conjunção "e" são falsas pois, obviamente, as baleias são mamíferos e os lobos não têm asas.

Conclui-se assim intuitivamente que a conjunção de duas proposições só é verdadeira quando ambas o forem.

Disjunção: Operação que consiste em ligar duas proposições pela conjunção "ou".

Exemplos:

→ Carlos é médico ou professor ou ambas as coisas

→ Vamos ao teatro ou ao futebol, mas não ambas as coisas.

Repare-se na diferença entre estes dois exemplos: enquanto que no primeiro caso se admite que Carlos possa ser médico ou professor ou ambas as coisas simultaneamente, no segundo caso só se admite que uma das proposições seja verdadeira. À primeira chama-se **disjunção** e à segunda **disjunção exclusiva**.

Implicação: operação que consiste em ligar duas proposições usando as conjunções "se" e "então".

Exemplos:

→ Se amanhã chover então vou ao cinema

→ Se o João passar de ano então vai de férias para o Brasil

Na nossa linguagem de todos os dias omite-se o "então", mas assume-se o sentido da frase como se a palavra estivesse lá.

Estas frases são falsas sempre que a primeira proposição for verdadeira e a segunda for falsa. Isto é, se amanhã chover e eu não for ao cinema então sou mentirosa. Repare-se que se o João não passar de ano e mesmo assim for de férias para o Brasil então a frase não é falsa, pois só se está a condicionar o que ele fará se passar de ano e não se diz o que acontece se não passar.

2.5 Operações lógicas no universo $\{0, 1\}$

Para simplificar, é costume designar-se por V o valor verdade e por F o valor falso. É porém mais simples representar a verdade por 1 e a falsidade por 0. Quando fazemos operações com proposições estamos, pois, a trabalhar no universo $\{0, 1\}$. Uma operação binária é uma lei de transformação (função) que permite atribuir um valor a um par de valores. Ou seja a um par (a, b) faz-se corresponder um valor $a \circledast b$ a que se chama o resultado da operação \circledast . As operações lógicas podem ser definidas como operações binárias no universo $\{0, 1\}$. Para definir uma operação binária em $\{0, 1\}$ é necessário ter uma lei de transformação que atribua valores a todos os pares possíveis neste universo, ou seja a $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ e $(1, 1)$.

É possível definir 16 operações binárias neste universo de acordo com a seguinte tabela:

p	q	\circledast_1	\circledast_2	\circledast_3	\circledast_4	\circledast_5	\circledast_6	\circledast_7	\circledast_8	\circledast_9	\circledast_{10}	\circledast_{11}	\circledast_{12}	\circledast_{13}	\circledast_{14}	\circledast_{15}	\circledast_{16}
1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0

Cada coluna desta tabela corresponde a uma operação diferente. Algumas são mais importantes e têm direito a nomes e símbolos especiais.

Vejamus a que colunas correspondem as operações que definimos atrás.

- a) Na negação vimos que a proposição resultante é falsa sempre que a proposição inicial é verdadeira e verdadeira se a inicial é falsa. Esta não é uma operação binária pois só actua sobre uma proposição. Representando a proposição inicial por p , representamos a sua negação por $\sim p$. Outras notações aparecem na literatura como \bar{p} ou $\neg p$. Na tabela anterior verificamos que a coluna 8 representa $\sim p$ enquanto que a coluna 6 representa $\sim q$. Pode-se então escrever a tabuada da negação:

p	$\sim p$
1	0
0	1

- b) Na conjunção vimos que a proposição resultante só é verdadeira quando as duas proposições ligadas pelo "e" forem verdadeiras. Na tabela das 16 operações vemos que essa situação corresponde à coluna 11. Representando as proposições iniciais por p e q , representamos a conjunção por $p \wedge q$.

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

- c) Para a disjunção ser verdadeira basta que uma das proposições o seja. Então esta operação corresponde à coluna 9. Representando as proposições iniciais por p e q , representamos a disjunção por $p \vee q$.

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

- d) Para a disjunção exclusiva ser verdadeira é necessário que apenas uma das proposições o seja. Então esta operação corresponde à coluna 10. Representando as proposições iniciais por p e q , representamos a disjunção exclusiva por $p \dot{\vee} q$.

p	q	$p \dot{\vee} q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

- e) A implicação só é falsa quando a primeira proposição é verdadeira e a segunda falsa. Então esta operação corresponde à coluna 3. Representando as proposições iniciais por p e q , representamos a implicação por $p \implies q$.

p	q	$p \implies q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

- f) A equivalência é falsa quando os valores lógicos das duas proposições são diferentes. Isto corresponde à coluna 7 da tabela. Representando as proposições iniciais por p e q , representamos a equivalência por $p \iff q$

p	q	$p \iff q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

- g) A incompatibilidade é falsa se ambas as proposições forem verdadeiras. Corresponde à segunda coluna da tabela inicial. Representando as proposições iniciais por p e q , representamos a incompatibilidade por $p|q$

p	q	$p q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

- h) A negação conexa tem o valor lógico verdade desde que ambas as proposições forem falsas. Corresponde à coluna 8 da tabela. Representando as proposições iniciais por p e q , representamos a negação conexa por $p \downarrow q$

p	q	$p \downarrow q$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

2.6 Propriedades das operações lógicas:

Definição 1 *Duas proposições lógicas são iguais se e só se têm a mesma tabela.*

Trabalhando com esta definição estabelecem-se várias igualdades básicas que têm um certo paralelismo com idênticas propriedades das operações aritméticas

Conjunção	Disjunção	
$a \wedge b = b \wedge a$	$a \vee b = b \vee a$	comutativa
$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$	$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$	associativa
$a \wedge 1 = a$	$a \vee 1 = 1$	elemento neutro
$a \wedge 0 = 0$	$a \vee 0 = a$	elemento absorvente
$a \wedge a = a$	$a \vee a = a$	idempotência

Negação	
$\sim \sim a = a$	Dupla negação

Mistas	
$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$	distributiva
$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$	distributiva
$\sim (a \vee b) = \sim a \wedge \sim b$	lei de De Morgan
$\sim (a \wedge b) = \sim a \vee \sim b$	lei de De Morgan
$\sim a \wedge a = 0$	não contradição
$\sim a \vee a = 1$	terceiro excluído

Todas as 16 operações lógicas podem ser expressas na negação e na conjunção, ou na negação e na disjunção, ou na incompatibilidade ou na negação conexa.

Exemplos:

1. $(a \implies b) = (\sim a \vee b) = \sim (a \wedge \sim b)$
2. $(a \iff b) = (a \implies b) \wedge (b \implies a) = (\sim a \vee b) \wedge (\sim b \vee a) = \sim (a \wedge \sim b) \wedge \sim (b \wedge \sim a)$
3. $a \vee b = \sim (\sim a \wedge \sim b)$
4. $a \wedge b = \sim (\sim a \vee \sim b)$
5. $a \dot{\vee} b = (a \wedge \sim b) \vee (\sim a \wedge b) = \sim [\sim (a \wedge \sim b) \wedge \sim (\sim a \wedge b)]$
6. $\sim a = a \downarrow a$
7. $(a \wedge b) = (a|b) | (a|b)$
8. $(a \wedge b) = (a \downarrow a) \downarrow (b \downarrow b)$
9. $(a \vee b) = (a|a) | (b|b)$
10. $(a \vee b) = (a \downarrow b) \downarrow (a \downarrow b)$

A verificação destas igualdades faz-se facilmente construindo as tabelas de ambos os membros e confirmando que são iguais. Como exemplo vamos verificar a validade da

primeira igualdade:

a	b	$\sim a$	$a \implies b$	$\sim a \vee b$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

As duas últimas colunas desta tabela são iguais, como cada uma corresponde a cada uma das proposições da igualdade 1., de acordo com a definição 1, a igualdade é válida.

Vejam os ainda algumas igualdades importantes que convém saber de cor, pois são de utilização frequente:

1. $(a \implies b) = (\sim b \implies \sim a)$
2. $\sim (a \implies b) = a \wedge \sim b$
3. $(a \iff b) = (a \wedge b) \vee (\sim a \wedge \sim b)$
4. $(a \iff b) = \sim (a \dot{\vee} b)$

Tal como as anteriores, estas igualdades podem ser verificadas por recurso às tabelas. Mas, também se podem verificar por aplicação das propriedades das operações lógicas. Vamos exemplificar com a primeira das igualdades.

$$(a \implies b) = (\sim a \vee b) = (\sim a \vee \sim \sim b) = (\sim \sim b \vee \sim a) = (\sim b \implies \sim a)$$

2.7 Argumentos válidos

Quando se demonstram teoremas utilizam-se raciocínios logicamente correctos. Normalmente, um teorema é traduzido por meio de uma implicação ou de uma equivalência (**se e só se**). Uma das formas de demonstrar teoremas é utilizar um raciocínio dedutivo.

Exemplo:

Se este livro tem a minha assinatura, pertence-me.

Este livro tem a minha assinatura.

Logo este livro pertence-me.

Há, no entanto, outras formas correctas de demonstrar teoremas. São os chamados argumentos válidos ou silogismos e foram muito estudados pelos filósofos e matemáticos gregos. Apresentamos uma lista dos mais usuais, bem como dos nomes por que classicamente são conhecidos.

Argumento	Nome
$[(a \implies b) \wedge a] \implies b$	Modus ponens
$[(a \implies b) \wedge \sim b] \implies \sim a$	Modus tollens
$[(a \vee b) \wedge \sim a] \implies b$	Silogismo disjuntivo
$[(a \implies b) \wedge (b \implies c)] \implies (a \implies c)$	Silogismo Hipotético
$[(a \implies b) \wedge (c \implies d) \wedge (a \vee c)] \implies (b \vee d)$	Dilema construtivo
$[(a \implies b) \wedge (c \implies d) \wedge (\sim b \vee \sim d)] \implies (\sim a \vee \sim c)$	Dilema destrutivo

Como interpretar estes argumentos? Vejamos, por exemplo, o modus ponens: se há uma implicação ($a \implies b$) que se sabe ser verdadeira e se também se sabe que a proposição a é verdadeira então a proposição b também tem que ser verdadeira.

É ainda possível encadear todas estas formas numa cadeia de argumentos válidos.

Exemplo:

Se o ladrão saiu pela porta da rua, foi apanhado.

Se o ladrão saiu pela varanda das traseiras, foi apanhado.

Se o o ladrão foi apanhado está preso.

Se o ladrão não saiu pela porta da rua nem pela varanda das traseiras, está escondido.

Ora o ladrão não está preso.

Logo não saiu pela porta da rua nem pela varanda das traseiras.

Logo o ladrão está escondido.

2.8 Quantificadores

Além das operações lógicas atrás consideradas, apresentam-se ainda duas operações que se aplicam unicamente a expressões proposicionais com variáveis. Estas duas operações desempenham um papel correspondente às palavras "todo" e "algum" da linguagem corrente.

Quantificador universal

Exemplo

$\forall x, x$ é mortal.

Esta proposição é verdadeira no universo dos seres vivos. É, por isso, necessário especificar qual o universo em que a variável x pode tomar valores. Se, por exemplo, se escrever $\forall x, 2x > x$, esta proposição é verdadeira em \mathbb{N} mas falsa em \mathbb{R} .

Quantificador existencial

Exemplo

$\exists x : x > x^2$. (Algum número é superior ao seu quadrado).

Esta proposição é obviamente verdadeira em \mathbb{R} e falsa em \mathbb{N} . Mais uma vez é necessário indicar o universo em que a variável x pode tomar valores.

Segundas leis de De Morgan

A negação de proposições com quantificadores rege-se por leis conhecidas por segundas leis de De Morgan. Na nossa linguagem de todos os dias sabemos que negar que "todos são" é afirmar que "algum não é" e negar que "algum é" é afirmar que "todos não são". Ou seja, traduzindo simbolicamente:

$$\begin{aligned} \sim [\forall x \in U, p(x)] &= \exists x \in U : \sim p(x) \\ \sim [\exists x \in U : p(x)] &= \forall x \in U : \sim p(x) \end{aligned}$$

(Aqui representa-se por $p(x)$ uma expressão proposicional na variável x)

Estas leis podem ser aplicadas sucessivamente em expressões com vários quantificadores.

Exemplo:

$$\sim [\forall x, \exists y : \forall z, \exists t : p(x, y, z, t)] = \exists x : \forall y, \exists z : \forall t, \sim p(x, y, z, t)$$

Quando uma expressão proposicional é verdadeira para qualquer concretização das variáveis diz-se que é uma **condição universal**.

Quando uma expressão proposicional é falsa para qualquer concretização das variáveis diz-se que é uma **condição impossível**.

3 Conjuntos

Um conjunto pode ser definido em extensão, isto é, nomeando todos os seus elementos, ou em compreensão, ou seja indicando uma propriedade comum a todos os seus elementos, isto é, uma condição que é verificada por todos os seus elementos e só por eles.

Exemplo:

Se a Joana tiver 3 irmãos com 18, 23 e 25 anos, podemos definir o conjunto A de duas maneiras diferentes: $A = \{18, 23, 25\} = \{x : x = \text{idades dos irmãos da Joana}\}$

Se a condição que estiver a definir o conjunto for uma condição universal então o conjunto é todo o universo e, normalmente, representa-se por U . Se o conjunto estiver a ser definido por uma condição impossível então não terá qualquer elemento, diz-se **vazio** e representa-se por ϕ ou por $\{\}$.

3.1 Relações entre conjuntos

Se todos os elementos de um conjunto P forem elementos de um outro conjunto Q , diz-se que o conjunto P está contido no conjunto Q e escreve-se $P \subseteq Q$. Se o conjunto P está contido no conjunto Q também se pode dizer que o conjunto Q contém o conjunto P e escreve-se $Q \supseteq P$. Quando $P \subseteq Q$ diz-se que P é um subconjunto de Q .

Se o conjunto P estiver contido no conjunto Q e o conjunto Q estiver contido num conjunto R , então o conjunto P está contido no conjunto R .

Se o conjunto P estiver contido no conjunto Q e o conjunto Q estiver contido no conjunto P , então os dois conjuntos são iguais.

Todas estas afirmações podem ser traduzidas simbolicamente como se segue:

$$(x \in P \implies x \in Q) \iff (P \subseteq Q)$$

$$(P \subseteq Q \wedge Q \subseteq R) \implies (P \subseteq R)$$

$$(P \subseteq Q \wedge Q \subseteq P) \iff P = Q$$

3.2 Operações com conjuntos

Seja U o universo e considerem-se os conjuntos P e Q definidos por: $P = \{x \in U : p(x)\}$, $Q = \{x \in U : q(x)\}$. Podem-se definir operações com conjuntos que estão relacionadas com as operações lógicas sobre as expressões proposicionais que definem os conjuntos

$U - P = \bar{P} = \{x \in U : \sim p(x)\} = \{x \in U : x \notin P\}$	complementar
$P \cap Q = \{x \in U : p(x) \wedge q(x)\} = \{x \in U : x \in P \wedge x \in Q\}$	intersecção
$P \cup Q = \{x \in U : p(x) \vee q(x)\} = \{x \in U : x \in P \vee x \in Q\}$	reunião
$P - Q = \{x \in U : p(x) \wedge \sim q(x)\} = \{x \in U : x \in P \wedge x \notin Q\} = P \cap \bar{Q}$	diferença
$P \Delta Q = \{x \in U : x \in P \dot{\vee} x \in Q\} = (P \cap \bar{Q}) \cup (\bar{P} \cap Q)$	diferença simétrica
$P \times Q = \{x, y \in U : x \in P \wedge y \in Q\}$	produto cartesiano
$P \times Q \times R = \{x, y, z \in U : x \in P \wedge y \in Q \wedge z \in R\}$	
$P_1 \times P_2 \times \dots \times P_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in P_i\}$	

3.3 Propriedades das operações entre conjuntos

As propriedades das operações deduzem-se sem grande dificuldade das propriedades das operações lógicas entre proposições.

$P \cap Q = Q \cap P$	$P \cup Q = Q \cup P$
$(P \cap Q) \cap R = P \cap (Q \cap R)$	$(P \cup Q) \cup R = P \cup (Q \cup R)$
$P \cap U = P$	$P \cup U = U$
$P \cap \phi = \phi$	$P \cup \phi = P$
$(P \cap Q) \cup R = (P \cup R) \cap (Q \cup R)$	$(P \cup Q) \cap R = (P \cap R) \cup (Q \cap R)$
$P \cap \bar{P} = \phi$	$P \cup \bar{P} = U$
$\overline{P \cap Q} = \bar{P} \cup \bar{Q}$	$\overline{P \cup Q} = \bar{P} \cap \bar{Q}$

4 Relações binárias

Qualquer subconjunto de $P \times Q$ é uma relação binária entre P e Q .

Então se $E \subseteq P \times Q$, E é uma relação binária entre P e Q . Dizer que o par (x, y) verifica a relação E significa que $(x, y) \in E$ e pode-se escrever xEy . Se $(x, y) \notin E$ diz-se que o par (x, y) não verifica a relação E e escreve-se $x \notin E y$.

Considere-se $E \subseteq P \times P$. Diz-se que E é uma relação binária em P . As relações binárias num conjunto classificam-se de acordo com o facto de possuírem ou não as propriedades que a seguir se enunciam.

E é reflexiva	$\forall x \in P, (x, x) \in E$
E é anti-reflexiva	$\forall x, y \in P, (x, y) \in E \implies x \neq y$
E é simétrica	$\forall x, y \in P, (x, y) \in E \implies (y, x) \in E$
E é anti-simétrica	$\forall x, y \in P, (x, y) \in E \implies (y, x) \notin E$
E é anti-simétrica em sentido lato	$\forall x, y \in P, ((x, y) \in E \wedge (y, x) \in E) \implies x = y$
E é transitiva	$\forall x, y, z \in P, ((x, y) \in E \wedge (y, z) \in E) \implies (x, z) \in E$

4.1 Relações de equivalência

Se uma relação E num conjunto P é reflexiva, simétrica e transitiva diz-se que é uma relação de equivalência no conjunto P .

Uma relação de equivalência origina uma partição do conjunto em classes de equivalência. Uma classe de equivalência é formada por todos os elementos do conjunto que tomados 2 a 2 formam pares que pertencem à relação. Todos os elementos de uma classe de equivalência têm uma característica comum.

Exemplo:

Seja P o conjunto de todas as rectas no plano e E a relação definida por $(x, y) \in E$ se e só se a recta x é paralela à recta y .

Esta relação é reflexiva (toda a recta é paralela a si própria), simétrica (se a recta x é paralela à recta y então a recta y é paralela à recta x) e transitiva (se a recta x é paralela à recta y e a recta y é paralela à recta z então a recta x é paralela à recta z). Considerando uma determinada recta no plano todas as rectas que lhe são paralelas formam uma classe de equivalência definida pela direcção dessa recta.

4.2 Relações de ordem

Se uma relação E num conjunto P é anti-simétrica e transitiva diz-se que é uma relação de ordem no conjunto. Conforme a relação for anti-simétrica em sentido estrito ou em sentido lato, assim se diz de ordem estrita ou lata. Uma relação de ordem lata pode ou não ser reflexiva conforme as aplicações que se estiverem a trabalhar.

Se a relação de ordem é tal que dados dois elementos do conjunto eles estão sempre relacionados, de uma maneira ou de outra, isto é se $\forall x, y \in P, (x, y) \in P \vee (y, x) \in P \vee x = y$, a relação de ordem diz-se **total**, caso contrário diz-se **parcial**. Um conjunto P onde está definida uma relação de ordem total diz-se **ordenado**. Um conjunto P onde está definida uma relação de ordem parcial diz-se **parcialmente ordenado**.

Exemplos:

$P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $E = \{(x, y) \in P \times P : x \leq y\}$. Esta é uma relação de ordem (em sentido lato) total. Tomando dois quaisquer elementos do conjunto P há um par na relação formado por eles.

$P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $E = \{(x, y) \in P \times P : x < y\}$. Esta é uma relação de ordem (em sentido restrito) total. Tomando dois quaisquer elementos diferentes do conjunto P há um par na relação formado por eles.

$P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $E = \{(x, y) \in P \times P : x \text{ é divisor de } y\}$. Esta é uma relação de ordem (em sentido lato) parcial. Com efeito, é uma relação transitiva (se x é divisor de y e y é divisor de z então x é divisor de z) e anti-simétrica em sentido lato (se x é divisor de y e y é divisor de x então x é igual a y). Tomando dois quaisquer elementos do conjunto P eles podem não estar relacionados. Por exemplo, tomando os elementos 2 e 5, nem 2 é divisor de 5 nem 5 é divisor de 2, ou seja $(2, 5) \notin E$ e $(5, 2) \notin E$.

Um elemento $\bar{x} \in P$ diz-se **elemento mínimo** de P para uma relação de ordem E , se $\forall y \in P, (\bar{x}, y) \in E$.

Um elemento $\bar{x} \in P$ diz-se **elemento máximo** de P para uma relação de ordem E , se $\forall y \in P, (y, \bar{x}) \in E$.

Se num conjunto finito estiver definida uma relação de ordem total, há sempre um elemento máximo e um elemento mínimo.

Se num conjunto estiver definida uma relação de ordem parcial, pode não haver elemento máximo ou elemento mínimo.

Exemplo

$P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $E = \{(x, y) \in P \times P : x \text{ é divisor de } y\}$. Para esta relação de ordem 1 é elemento mínimo e não há elemento máximo.

5 Aplicações

Dados dois conjuntos não vazios A e B , chama-se aplicação de A em B a toda a correspondência unívoca entre A e B . Isto é, sendo f uma aplicação de A em B , f fornece um processo qualquer de a cada elemento x de A fazer corresponder **um e um só** elemento y de B . Diz-se que y é a imagem de x por f e escreve-se $y = f(x)$. Repare-se que se pode encarar uma aplicação f de A em B como uma relação E entre A e B , tal que $(x, y) \in E \implies y = f(x)$.

Exemplos

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, B = \{h, k, m, g\} \text{ e } E = \{(1, g), (2, k), (3, k), (4, h), (5, m), (6, m)\}.$$

E é uma aplicação entre A e B .

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, B = \{h, k, m, g\} \text{ e } E = \{(1, g), (1, k), (2, m), (3, k), (4, h), (5, m), (6, m)\}.$$

E é uma relação entre A e B mas não é uma aplicação entre A e B . Ao elemento 1 de A correspondem dois elementos em B , o que é contrário à definição de aplicação.

Ao conjunto A é chama-se **domínio** de f . Normalmente designa-se o domínio de uma aplicação f por D_f .

Quando uma aplicação é definida por meio de uma expressão designatória, sem mais indicações, subentende-se que o domínio da aplicação é o domínio de existência da expressão no universo adoptado.

Diz-se que duas aplicações f e g são **iguais** se tiverem o mesmo domínio e transformarem cada elemento do seu domínio comum da mesma maneira, isto é

$$[D_f = D_g \wedge \forall x \in D_f, f(x) = g(x)] \implies f = g.$$

Considere-se uma aplicação f de A em B e $D \subseteq A$. Considere-se uma aplicação g de D em B que satisfaz a condição $f(x) = g(x), \forall x \in D$, isto é, as duas aplicações coincidem no conjunto D . Diz-se que g é uma **restrição** de f a D e diz-se que f é uma **extensão** de g a A .

Exemplo:

A o conjunto dos números reais; D o conjunto dos números reais positivos ($D \subset A$); B o conjunto dos números reais.

$$g : D \rightarrow B \text{ definido por } g(x) = \sqrt{x}$$

$$f : A \rightarrow B \text{ definido por } f(x) = \sqrt{|x|}$$

As funções têm o mesmo valor para os elementos do domínio de g e o domínio de g está contido no domínio de f . Então g é uma restrição de f a D ou f é uma extensão de g a A .

Considere-se uma aplicação f de A em B e D um subconjunto de A . Chama-se **imagem** de D por f ao conjunto $f(D) = \{y \in B : \exists x \in D : y = f(x)\}$. Ao conjunto $f(A)$ chama-se **contradomínio** da aplicação f .

Diz-se que uma aplicação f de A em B é **sobrejectiva** se $B = f(A)$, isto é,

$$\forall y \in B, \exists x \in A : y = f(x).$$

Diz-se que uma aplicação f de A em B é **biunívoca** ou **injectiva** se

$$\forall x, y \in A, x \neq y \implies f(x) \neq f(y),$$

isto é, se diferentes elementos têm imagens diferentes.

Uma aplicação diz-se **bijectiva** se for **injectiva** e **sobrejectiva**.

Se f é uma aplicação biunívoca de A em B e se considerarmos B' o contradomínio de f , isto é, $B' = f(A)$, a cada elemento x de B' corresponde um e um só elemento y de A tal que $f(y) = x$. Deste modo é possível definir uma aplicação de B' em A , chamada **aplicação inversa** de f e representada por f^{-1} . Assim, f^{-1} é a aplicação que tem por domínio o contradomínio de f e tal que

$$\forall x \in B', \forall y \in A, [y = f^{-1}(x) \iff x = f(y)]$$

6 Cardinalidade

Definição 2 *Dados dois conjuntos A e B , diz-se que A é **equipotente** a B , se e só se for possível estabelecer uma correspondência bijectiva entre A e B .*

A relação de equipotência é uma relação de equivalência.

Definição 3 *Um conjunto A diz-se **infinito** se for equipotente a pelo menos uma sua parte estrita.*

Definição 4 *Um conjunto A diz-se **finito** se não for infinito.*

Definição 5 *Diz-se que dois conjuntos finitos têm o mesmo número de elementos se são equipotentes.*

Então, o número de elementos ou cardinal ($\#$) de um conjunto A é a propriedade que esse conjunto tem de comum com todos os conjuntos que lhe são equipotentes.

O cardinal do conjunto vazio é 0.

Seguidamente apresentam-se algumas propriedades da função cardinal para conjuntos finitos.

$$A \subseteq B \implies \#A \leq \#B$$

$$[A \subseteq B \wedge A \neq B] \implies \#A < \#B$$

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$$

$$\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C)$$

$$\# \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \sum_{i=1}^n \#A_i - \sum_{1 \leq i < j} \#(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k} \#(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots \\ + (-1)^{n-1} \#(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$$

$$\#(A \times B) = \#A \cdot \#B$$

$$\#(P_1 \times P_2 \times \dots \times P_n) = \prod_{i=1}^n \#P_i$$

$$\#(P(A)) = 2^{\#A}$$

$(P(A))$ é o conjunto das partes de A

7 Indução Matemática

Teorema 1 *Princípio da Indução Matemática:* *Seja S um conjunto de inteiros positivos. Se $1 \in S$ e $(n \in S \implies (n+1) \in S)$, então $S = \mathbb{N}$.*

Demonstração. Seja S um conjunto de inteiros positivos tal que

$$1 \in S, (n \in S \implies (n+1) \in S) \text{ e } S \neq \mathbb{N}$$

Isto é, há inteiros positivos que não pertencem a S . Seja $T = \mathbb{N} - S$. T é não vazio e, pelo princípio da boa ordem, tem um elemento mínimo. Seja n esse elemento. Como $1 \in S$, terá que ser $n \neq 1$, ou seja $n > 1$. Assim, $(n-1)$ é um inteiro e não é elemento de T , logo é elemento de S . Mas, de acordo com as características de S , se $(n-1) \in S$ então $(n-1+1) \in S$, ou seja $n \in S$, o que é uma contradição, pois n é o menor inteiro que não pertence a S . Portanto tem que ser $S = \mathbb{N}$. ■

Exemplo 1 *Mostrar que $n! \leq n^n$.*

Procede-se por indução matemática.

Deveríamos definir $S = \{n \in \mathbb{N} : n! \leq n^n\}$. Mostrar que $1 \in S$, admitir que $n \in S$ e concluir a partir daí que $(n+1) \in S$. Na prática omite-se o conjunto S e procede-se como se segue:

$$n = 1 \quad 1! = 1 \leq 1^1 = 1 \quad \text{então a proposição é válida para } n = 1$$

Hipótese de indução: $n! \leq n^n$

Deve-se agora, assumindo que a hipótese de indução é verdadeira, mostrar que

$$(n+1)! \leq (n+1)^{n+1}$$

$$(n+1)! = (n+1)n! \leq (n+1)n^n < (n+1)(n+1)n \leq (n+1)^{n+1}$$

Exemplo 2 Pretende-se encontrar uma expressão que permita calcular, rapidamente, a soma dos primeiros n números ímpares.

Começa-se por fazer algumas contas:

$$1 = 1 = 1^2$$

$$1 + 3 = 4 = 2^2$$

$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36 = 6^2$$

Destes valores, pode-se conjecturar que a soma dos n primeiros números inteiros ímpares é n^2 . Esta conjectura pode ser validada recorrendo a uma demonstração por indução.

Pretende-se, então, mostrar que $\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$.

$$n = 1 \quad \sum_{k=1}^1 (2k-1) = 2 \times 1 - 1 = 1 = 1^2$$

Hipótese de indução: $\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = 2 \times (n+1) - 1 + \sum_{k=1}^n (2k-1) = 2 \times n + 1 + n^2 = (n+1)^2$$

Definição 6 Dados números reais a e r , os números reais a, ar, ar^2, ar^3, \dots formam uma progressão geométrica. a chama-se termo inicial e a r chama-se razão.

Exemplo 3 Mostrar que $\sum_{k=0}^n ar^k = \frac{ar^{n+1} - a}{r-1} = a \frac{r^{n+1} - 1}{r-1}$, com $r \neq 1$.

$$n = 1 \quad \sum_{k=0}^1 ar^k = a + ar = a(r+1) = a \frac{(r+1)(r-1)}{r-1} = \frac{ar^2 - a}{r-1}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Hipótese de indução : } \sum_{k=0}^n ar^k &= \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1} \\
 \sum_{k=0}^{n+1} ar^k &= ar^{n+1} + \sum_{k=0}^n ar^k = ar^{n+1} + \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1} = \\
 &= \frac{(r - 1)ar^{n+1} + ar^{n+1} - a}{r - 1} = \frac{ar^{n+2} - a}{r - 1}
 \end{aligned}$$

Teorema 2 Segundo Princípio da Indução Matemática: *Seja S um conjunto de inteiros positivos. Se $1 \in S$ e se, para todo o inteiro positivo n , se S contém todos os inteiros positivos menores que n , então S também contém $n + 1$, então $S = \mathbb{N}$.*

Demonstração. Seja T um conjunto de inteiros positivos tal que $1 \in T$ e para todo o inteiro positivo n , se $\{1, 2, \dots, n\} \in T$ então $n + 1 \in T$. Seja S o conjunto de inteiros positivos n tal que todos os inteiros positivos inferiores ou iguais a n estão em T , é claro que $S \subset T$. Então $1 \in S$ e, pela hipótese, $n + 1 \in S$. Então, pelo princípio da indução matemática, $S = \mathbb{N}$. Mas, como $S \subset T$, também $T = \mathbb{N}$. ■

Exemplo 4 *Mostrar que é possível selar uma carta cuja franquia seja superior a 1 u.m., usando só selos de 2 e 3 u.m.*

É claro que se a franquia for de 2 u.m. usa-se um selo de 2 u.m. e se for de 3 u.m. usa-se um selo de 3 u.m. Como hipótese de indução assume-se que é possível selar qualquer carta cuja franquia não exceda n u.m. ($n \geq 3$) usando exclusivamente selos de 2 e 3 u.m. Então, para selar uma carta com $(n + 1)$ u.m. procede-se como para selar uma carta cuja franquia seja $(n - 1)$ u.m. (possível por hipótese de indução) e acrescenta-se um selo de 2 u.m..

8 Divisibilidade

Definição 7 *Se a e b são inteiros com $a \neq 0$, diz-se que a **divide** b , e escreve-se $a|b$, se existe um inteiro k tal que $b = ak$. Se a divide b também se diz que a é um divisor de b ou um factor de b . Caso contrário diz-se que a não divide b e escreve-se $a \nmid b$.*

Da definição dada resulta imediato que se a **divide** b , então b é **múltiplo** de a .

Se a , b e c são inteiros tais que $a|b$ e $b|c$, então $a|c$, ou seja a relação "ser divisor de" é transitiva. Com efeito, usando a definição, se a é um divisor de b e b é um divisor de c então existem inteiros k_1 e k_2 que satisfazem as igualdades $b = k_1a$ e $c = k_2b$. Substituindo

b na segunda igualdade, obtém-se $c = k_1 k_2 a$. Como $k_1 k_2$ é um inteiro, usando a definição, conclui-se que a é um divisor de c .

Se a, b, c, m e n são inteiros e $c|a$ e $c|b$, então $c|(ma+nb)$. A $ma+nb$ chama-se combinação linear de coeficientes inteiros de a e de b . Traduzindo este resultado em palavras, podemos dizer que se um número divide outros dois então divide qualquer combinação linear de coeficientes inteiros desses dois. Vejamos porquê: $c|a \iff \exists k_1 : a = k_1 c$ e $c|b \iff \exists k_2 : b = k_2 c$. Então $ma + nb = mk_1 c + nk_2 c = (mk_1 + nk_2) c$.

Apresentam-se seguidamente vários resultados sobre a divisão inteira de números inteiros:

Teorema 3 *Se a e b são inteiros e $b > 0$ então existem inteiros q e r com $0 \leq r < b$, tais que $a = bq + r$ e esses inteiros são únicos ($a =$ dividendo, $b =$ divisor, $q =$ quociente, $r =$ resto)*

Teorema 4 *Se a, b e c são inteiros, $c \neq 0$ e $b|a$ então $bc|ac$.*

Teorema 5 *Se a, b e c são inteiros, $c \neq 0$ e $bc|ac$ então $b|a$.*

Teorema 6 *Se a, b, c, d são inteiros e $a|b$ e $c|d$ então $ac|bd$.*

Teorema 7 *Todo o número que divide o divisor e o resto divide o dividendo.*

Teorema 8 *Todo o número que divide o dividendo e o divisor divide o resto.*

Teorema 9 *Se um número divide uma das parcelas de uma soma, então a outra parcela e a soma divididas por esse número dão restos iguais.*

9 Bases de numeração

Qualquer número inteiro a pode ser expresso numa base de numeração $\beta > 1$ e inteiro por uma sequência de algarismos $a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0^{(\beta)}$ com o significado

$$a_{(\beta)} = a_n \times \beta^n + \cdots + a_1 \times \beta^1 + a_0.$$

Na base β os algarismos são inteiros do conjunto $\{0, 1, \cdots, \beta - 1\}$

Exemplo 5 $12321_{(4)} = 1 \times 4^4 + 2 \times 4^3 + 3 \times 4^2 + 2 \times 4^1 + 1 \times 4^0 = 256 + 2 \times 64 + 3 \times 16 + 2 \times 4 + 1 \times 1 = 441_{(10)}$

Exemplo 6 Para converter $(A35B0F)_{16}$ para notação decimal escreve-se:

$$(A35B0F)_{16} = 10 \times 16^5 + 3 \times 16^4 + 5 \times 16^3 + 11 \times 16^2 + 0 \times 16^1 + 15 = (10705679)_{10}$$

Exemplo 7 Para converter $(2FB3)_{16}$ para binário, observa-se que $16 = 2^4 = (10000)_2$.

$$(2FB3)_{16} = 2 \times 16^3 + 15 \times 16^2 + 11 \times 16^1 + 3 = 2 \times 2^{12} + 15 \times 2^8 + 11 \times 2^4 + 3 = 2 \times 2^{12} + (2^3 + 2^2 + 2^1 + 1) \times 2^8 + (2^3 + 2^1 + 1) \times 2^4 + (2 + 1) = (10111110110011)_2.$$

Assim, basta converter cada algarismo para binário e escrever a sua sequência.

De modo análogo se pode converter de binário para hexadecimal, bastando agrupar os dígitos em grupos de 4 a partir da direita e escrever cada bloco como um algarismo hexadecimal.

Exemplo 8 $(11110111101001)_2 \longrightarrow 0011, 1101, 1110, 1001 \longrightarrow 3, 13, 14, 9 \longrightarrow (3DE9)_{16}$.

É, por isso, conveniente construir uma tabela de equivalências entre algarismos hexadecimais e blocos de 4 dígitos:

Hexadecimal	Binário	Hexadecimal	Binário
0	0000	8	1000
1	0001	9	1001
2	0010	A	1010
3	0011	B	1011
4	0100	C	1100
5	0101	D	1101
6	0110	E	1110
7	0111	F	1111

10 Algoritmos para realizar operações aritméticas

Definição 8 Um algoritmo é um conjunto de regras que permitem obter um certo resultado a partir de dados iniciais.

$$\begin{array}{r}
 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \\
 \times \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \\
 \hline
 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \\
 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\
 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\
 + \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \\
 \hline
 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1
 \end{array}$$

DIVISÃO

Considere-se a, b, q, r inteiros na base β , com $\beta > 1$ e $b \neq 0$. A divisão inteira de a por b consiste em determinar inteiros q e r tais que:

$$a = bq + r \quad \text{com} \quad 0 \leq r < b$$

Começa-se por determinar o número de algarismos de q :

Se $b\beta^{n-1} < a < b\beta^n$ então q tem n algarismos. Com efeito, se $a < b\beta^n$ então

$bq + r < b\beta^n$ como $r \geq 0$ é $bq + r \geq bq$. Então $bq \leq bq + r < b\beta^n$ ou seja $q < \beta^n$. Por outro lado, $b\beta^{n-1} < a \implies a - b > b\beta^{n-1} - b \implies a - b > b(\beta^{n-1} - 1)$. Como $r < b$, $a - r > a - b$, donde $a - r > b(\beta^{n-1} - 1)$, mas como $a - r = bq$ vem, finalmente, $bq > b(\beta^{n-1} - 1)$. Então será $\beta^{n-1} - 1 < q < \beta^n$. Pode-se daqui concluir que q tem n algarismos.

Exemplo 11 em base 10 pretende-se dividir 10247 por 251, ou seja determinar q e r tais que $10247 = 251q + r$

$$2510 < 10247 < 25100 \implies q \text{ tem } 2 \text{ algarismos.}$$

$$(10247 = 251 \times 40 + 207)$$

Tendo encontrado o número de algarismos de q , procede-se à sua determinação como se segue:

Se $q = (q_{n-1}q_{n-2} \cdots q_0)_\beta$ virá: $a = b \sum_{j=0}^{n-1} q_j \beta^j + r = bq_{n-1} \beta^{n-1} + b \sum_{j=0}^{n-2} q_j \beta^j + r$, ou seja

$$a - bq_{n-1} \beta^{n-1} = b \sum_{j=0}^{n-2} q_j \beta^j + r$$

Ora $\sum_{j=0}^{n-2} q_j \beta^j \leq \sum_{j=0}^{n-2} (\beta - 1) \beta^j = \sum_{j=0}^{n-2} (\beta^{j+1} - \beta^j) = \sum_{j=1}^{n-1} \beta^j - \sum_{j=0}^{n-2} \beta^j = \frac{\beta^n - \beta}{\beta - 1} - \frac{\beta^{n-1} - 1}{\beta - 1} = \beta^{n-1} - 1$ e $r < b$, donde $a - bq_{n-1}\beta^{n-1} = b \sum_{j=0}^{n-2} q_j \beta^j + r \leq b(\beta^{n-1} - 1) + b = b\beta^{n-1}$. Ora, como $a - bq_{n-1}\beta^{n-1} \leq b\beta^{n-1}$, esta quantidade representa o resto da divisão de a por $b\beta^{n-1}$. Assim, vem $q_{n-1} = \left\lfloor \frac{a}{b\beta^{n-1}} \right\rfloor$. Determinado o primeiro algarismo, repete-se o processo para a divisão de $a - bq_{n-1}\beta^{n-1}$ por b .

10.1 Cálculo de restos de divisões inteiras

$a = bq + r \implies a^n = bq^n + r^n$. Se $r^n \geq b$, torna-se a dividir r^n por b e obtém-se o resto.

$a = bq + r \wedge c = bq' + r' \implies ac = bq' + rr'$. Se $rr' \geq b$, torna-se a dividir rr' por b e obtém-se o resto.

$a = bq + r \wedge c = bq' + r' \implies a + c = b(q + q') + (r + r')$. Se $r + r' \geq b$, torna-se a dividir $r + r'$ por b e obtém-se o resto.

$a = bq + r \wedge c = bq' + r' \implies a - c = b(q - q') + (r - r')$. Se $r - r' < 0$ então analisa-se $r - r' + b$ pois a divisão passará a escrever-se $a - c = b(q - q' - 1) + (r - r' + b)$

11 Critérios de Divisibilidade

11.1 Critérios de divisibilidade na base 10

O resto da divisão de a por 2 ou por 5 é igual ao resto da divisão do algarismo das unidades de a por 2 ou por 5.

O resto da divisão de a por 3 ou por 9 é igual ao resto da divisão por 3 ou por 9 da soma dos algarismos de a .

O resto da divisão de a por 4 é igual ao resto da divisão por 4 da soma do dobro do algarismo das dezenas com o algarismo das unidades de a .

O resto da divisão de a por 11 é o resto da divisão por 11 do número que se obtém somando os algarismos de ordem par e subtraindo os algarismos de ordem ímpar de a .

11.2 Critérios de divisibilidade na base β

Têm que ser deduzidos caso a caso tendo em atenção que

$a_{(b)} = a_n \times \beta^n + \dots + a_1 \times \beta^1 + a_0$, e o resto da divisão de a por b é o resto da divisão por b da soma dos restos das parcelas.

12 Números Primos

Definição 9 $p \in \mathbb{N}$ é um número primo se p só é divisível por 1 e por p

Teorema 10 O conjunto dos números primos é numerável.

Teorema 11 (fundamental) Qualquer número inteiro tem pelo menos um divisor primo.

São vários os resultados que se podem obter acerca de números primos e de divisores primos. Destacam-se os mais importantes.

- É impossível obter um múltiplo de um número primo p multiplicando dois inteiros positivos menores que p .
- Se dois números não são múltiplos de um primo p o seu produto também não o é.
- Se um número primo divide um produto então divide pelo menos um dos factores.
- Se um inteiro a não tem nenhum divisor ($\neq 1$) inferior ou igual a $[\sqrt{a}]$, então a é um número primo.
- Qualquer inteiro $n \geq 2$ ou é primo ou pode escrever-se como produto de números primos.
- **A factorização em factores primos é única.**
- Se a é divisível por b então todos os factores primos da decomposição de b existem na decomposição de a pelo menos o mesmo número de vezes.
- Se a decomposição em factores primos de a for $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, então o número total de divisores de a é $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$

12.1 Máximo divisor comum e números primos entre si

Definição 10 *Sejam a e b números inteiros. Diz-se que c é o **máximo divisor comum** de a e b , $c = \text{mdc}(a, b)$, se $c|a$ e $c|b$ e, se existe um inteiro tal que $d|a$ e $d|b$, então $d < c$.*

Definição 11 *Dois inteiros a e b dizem-se **primos entre si** se $\text{mdc}(a, b) = 1$.*

A determinação do máximo divisor comum de dois inteiros pode ser feita com recurso ao **algoritmo de Euclides** tendo em atenção o seguinte resultado:

Teorema 12 *Se a e b são inteiros tais que $a = bq + r$ então $\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(b, r)$*

Definição 12 *Sejam a e b números inteiros. Diz-se que c é o **mínimo múltiplo comum** de a e b , $c = \text{mmc}(a, b)$, se c é múltiplo de a e de b e, se existe um inteiro d que também seja múltiplo de a e de b então $d > c$.*

Enunciam-se seguidamente alguns resultados referentes ao máximo divisor comum e ao mínimo múltiplo comum:

$$\rightarrow \text{mdc}(a, b) = d \implies \text{mdc}(ak, bk) = dk$$

$$\rightarrow [\text{mdc}(a, b) = d \wedge q = \frac{a}{d} \wedge q' = \frac{b}{d}] \implies \text{mdc}(q, q') = 1$$

→ Se dois números são primos entre si então a sua soma e o seu produto também o são

→ Se um número dividir o produto de dois factores e for primo com um deles então divide o outro.

→ Se um inteiro é divisível por a e por b e se a e b forem primos entre si então esse inteiro é divisível por ab .

→ Se $\text{mdc}(a, b) = d$ então $\exists p, q \in \mathbb{Z}$ tais que $pa + qb = d$.

$$\rightarrow \text{Sejam } a \text{ e } b \text{ inteiros, } \text{mmc}(a, b) = \frac{ab}{\text{mdc}(a, b)}$$

→ Sejam a e b inteiros. $\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(a + b, \text{mmc}(a, b))$

→ O máximo divisor comum de vários inteiros é igual ao produto dos factores primos comuns com menor expoente.

→ O menor múltiplo comum de vários inteiros é igual ao produto dos factores primos comuns e não comuns com maior expoente.

13 Congruências

Definição 13 *Sejam a e b dois inteiros quaisquer e seja m um inteiro positivo fixo. Diz-se que a é **congruente com b módulo m** , $a \equiv b \pmod{m}$, se m divide a diferença entre a e b .*

Isto é, $a \equiv b \pmod{m} \iff \exists k \in \mathbb{Z} : a - b = km$, em particular: $a \equiv 0 \pmod{m} \iff m|a$.

Seguem-se alguns resultados básicos sobre congruências que podem facilmente ser deduzidos a partir das propriedades dos divisores.

→ Se $a \equiv b \pmod{m}$ então a e b divididos por m dão o mesmo resto.

→ A relação de congruência (para um inteiro positivo m fixo) é uma relação de equivalência em \mathbb{Z} . Cada classe de equivalência contém todos os inteiros que dão o mesmo resto na divisão por m . Há, portanto; m classes de equivalência para cada m .

→ Seja m um inteiro positivo fixo e sejam a, b, c, d, n inteiros quaisquer. Então:

1. $[a \equiv b \pmod{m} \wedge n|m \wedge n > 0] \implies a \equiv b \pmod{n}$
2. $[a \equiv b \pmod{m} \wedge c > 0] \implies ac \equiv bc \pmod{mc}$
3. $[a \equiv b \pmod{m} \wedge d > 0 \wedge d|a \wedge d|b \wedge d|m] \implies \frac{a}{d} \equiv \frac{b}{d} \pmod{\frac{m}{d}}$
4. $[a \equiv b \pmod{m} \wedge c \equiv d \pmod{m}] \implies a + c \equiv b + d \pmod{m}$
5. $[a \equiv b \pmod{m} \wedge c \equiv d \pmod{m}] \implies ac \equiv bd \pmod{m}$
6. $a \equiv b \pmod{m} \implies a^n \equiv b^n \pmod{m}$
7. $[ac \equiv bc \pmod{m} \wedge \text{mdc}(c, m) = d] \implies a \equiv b \pmod{\frac{m}{d}}$

Definição 14 $S = \{r_1, \dots, r_m\}$ diz-se um **sistema completo de restos módulo m** se qualquer inteiro a é congruente módulo m com um único elemento de S .

Exemplos

$S = \{0, 1, 2, \dots, m - 1\}$ é um sistema completo de restos módulo m .

$S = \{0, 4, 8\}$ é um sistema completo de restos módulo 3.

14 Equações Diofantinas Lineares

Uma equação diofantina linear é da forma $ax + by = c$, com a, b e c inteiros. Pretende-se determinar as soluções inteiras da equação.

Teorema 13 *O máximo divisor comum entre 2 inteiros não nulos a e b é o menor inteiro positivo que se pode escrever como combinação linear de a e de b .*

Demonstração. Seja $D = \{x : x = ap + bq, p \text{ e } q \text{ inteiros e } x > 0\}$ e $d = \min D$. (Note-se que D é não vazio, pois ou $x = 1a + 0b$ ou $x = (-1)a + 0b$ é um elemento de D , conforme a for positivo ou negativo). Seja $d = ma + nb$. Vamos mostrar que $d|a$ e que $d|b$. Pelo algoritmo da divisão: $a = dq + r$ com $0 \leq r < d$. Substituindo d por $ma + nb$ vem : $a = (ma + nb)q + r$, ou seja $r = (1 - qm)a - qnb$. Mas como $r < d$, e d é o menor inteiro positivo que pode ser escrito como combinação linear de a e de b conclui-se que tem que ser $r = 0$, logo $d|a$. De modo análogo se demonstra que $d|b$. Falta agora mostrar que d é o maior dos divisores comuns. Basta considerar que, se $d = ma + nb$, qualquer divisor de a e de b também é divisor de d . ■

Uma vez demonstrado que se $d = \text{mdc}(a, b)$ então $d = ma + nb$, resta saber como encontrar os inteiros m e n . Para tal basta aplicar o algoritmo de Euclides à determinação do máximo divisor comum e proceder por substituição para trás.

Exemplo 12 *Escrever o máximo divisor comum de 252 e 198 como combinação linear de 252 e 198.*

$$252 = 1 \times 198 + 54$$

$$198 = 3 \times 54 + 36$$

$$54 = 1 \times 36 + 18$$

$$36 = 2 \times 18$$

Conclui-se assim que $18 = \text{mdc}(252, 198)$.

Pretende-se, pois, escrever $18 = 252m + 198n$.

$$18 = 1 \times 54 - 1 \times 36$$

$$18 = 1 \times (252 - 1 \times 198) - 1 \times (198 - 3 \times 54) = 1 \times 252 - 2 \times 198 + 3 \times 54$$

$$18 = 1 \times 252 - 2 \times 198 + 3 \times (252 - 1 \times 198)$$

$$18 = 4 \times 252 - 5 \times 198$$

Teorema 14 *Sejam a e b inteiros e $d = \text{mdc}(a, b)$. A equação $ax + by = c$ admite soluções inteiras se e só se $d|c$, tendo nesse caso uma infinidade de soluções inteiras. Além disso,*

se x_0 e y_0 é uma solução da equação então todas as soluções são da forma $x = x_0 + n\frac{b}{d}$ e $y = y_0 - n\frac{a}{d}$, com n um qualquer inteiro.

Demonstração. Sejam x e y inteiros tais que $ax + by = c$. Se $d = \text{mdc}(a, b)$ então $d|a$ e $d|b$ e, portanto, $d|c$. Então, se d não é divisor de c , a equação não terá soluções inteiras.

Suponhamos agora que $d|c$. Sabe-se que é possível exprimir o máximo divisor comum de 2 números como combinação linear desses números. Assim, existem inteiros s e t tais que $d = as + bt$. Como $d|c$, existe um inteiro p tal que $c = dp$. Multiplicando ambos os membros da igualdade por p obtém-se: $c = dp = (as + bt)p = a(sp) + b(tp)$. Assim, foi encontrada uma solução da equação, dada por $x_0 = sp$ e $y_0 = tp$.

Para mostrar que há um número infinito de soluções, considere-se $x = x_0 + n\frac{b}{d}$ e $y = y_0 - n\frac{a}{d}$, com n um qualquer inteiro. Então: $ax + by = a(x_0 + n\frac{b}{d}) + b(y_0 - n\frac{a}{d}) = ax_0 + by_0 = c$.

Finalmente, é necessário mostrar que todas as soluções são desta forma. Para isso suponhamos que x e y são soluções, então: $ax_0 + by_0 = c$ e $ax + by = c$. Subtraindo ambas as equações temos que $(ax + by) - (ax_0 + by_0) = 0$ ou seja, $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$, ou ainda $a(x - x_0) = b(y_0 - y)$. Dividindo ambos os membros desta igualdade por d vem: $u(x - x_0) = v(y_0 - y)$, com u e v primos entre si. Desta última igualdade e do facto de u e v serem primos entre si, conclui-se que $u|(y_0 - y)$. Isto é, pode-se afirmar que há um inteiro n tal que $un = (y_0 - y)$, ou seja que $y = y_0 - \frac{a}{d}n$. Substituindo este valor de y na igualdade $a(x - x_0) = b(y_0 - y)$ conclui-se finalmente que $x = x_0 + \frac{b}{d}n$ ■

Exemplo 13 Resolver a equação: $21x \equiv 15 \pmod{39}$.

Pretende-se encontrar um inteiro x tal que o resto da divisão de $21x$ por 39 seja 15, isto é, resolver a equação $21x = 39y + 15$, com x e y inteiros. Ou seja resolver a equação diofantina linear $21x - 39y = 15$. Como $\text{mdc}(21, -39) = 3$ e $3|15$ então a equação tem solução. Pelo algoritmo de Euclides temos:

$$39 = 1 \times 21 + 18$$

$$21 = 1 \times 18 + 3$$

$$18 = 3 \times 6$$

donde: $3 = 21 - 18 = 21 - (39 - 21) = 2 \times 21 - 1 \times 39$ e, multiplicando por 5 vem

$$15 = 10 \times 21 - 5 \times 39$$

Isto é o par de inteiros $x = 10$ e $y = 5$ é uma solução particular da equação diofantina.

De acordo com o teorema demonstrado todas as outras soluções podem ser obtidas de $x = 10 - 13n$ e $y = 5 - 7n$, com $n \in \mathbb{Z}$

15 Cálculo Combinatório

O cálculo combinatório tem por objectivo estudar as diferentes maneiras de formar e ordenar conjuntos, a partir dos elementos de um conjunto dado.

Consideremos o seguinte problema: Com panos de 5 cores - amarelo, verde, preto, encarnado e branco - quantas bandeiras tricolores diferentes se podem obter, supondo que os panos são colocados em tiras verticais?

É claro que, dadas as condições do problema, 2 bandeiras são diferentes quando tiverem tiras de cores diferentes, ou quando tiverem tiras das mesmas cores mas em ordem diferente. Vamos representar as cores pelas suas iniciais: a, v, p, e, b . Assim, cada bandeira será representada pela sequência das suas cores, por exemplo: $avp, apv, peb, pvb, pbv, eav, \dots$ Isto é, as bandeiras tricolores são representadas por ternos ordenados de elementos distintos do conjunto $\{a, v, p, e, b\}$.

Definição 15 *Dados m elementos distintos, chamam-se arranjos dos m elementos p a p aos conjuntos ordenados que é possível obter com p elementos distintos.*

O número de todos esses conjuntos é representado pela notação A_p^m . Não é difícil deduzir que: $A_p^m = A_{p-1}^m(m - p + 1)$. A partir desta última expressão conclui-se que é

$$A_p^m = \frac{m!}{(m-p)!}$$

Se se considerar um arranjo com todos os elementos do conjunto tem-se uma permutação dos m elementos. O número de permutações é facilmente encontrado a partir de:

$$P_m = A_m^m = \frac{m!}{(m-m)!} = m!$$

Quando se pretendem tomar subconjuntos de p elementos de um conjunto de m elementos, a ordem pela qual os elementos aparecem não interessa. A esses conjuntos chamam-se

combinações de m elementos p a p . O número de tais subconjuntos é determinado a partir de

$$C_p^m = \frac{A_p^m}{p!} = \frac{m!}{(m-p)!p!}$$

Finalmente, formar sucessões ordenadas de p elementos quaisquer (não necessariamente distintos) escolhidos de entre um conjunto de m elementos, é a mesma coisa que obter o produto cartesiano do conjunto de m elementos por si próprio p vezes. A essas sucessões chamam-se arranjos com repetição ou arranjos completos e o seu número é dado por:

$$A_p^m = m^p$$

15.1 Propriedades da função C_p^m

a) $C_p^m = C_{m-p}^m$

b) $C_p^m = C_p^{m-1} + C_{p-1}^{m-1}$

Estes dois resultados são facilmente verificáveis a partir da fórmula de cálculo e, a partir deles, é possível justificar a construção do chamado triângulo de Pascal:

$$\begin{array}{cccc} & & & C_0^0 \\ & & & \\ & & C_0^1 & C_1^1 \\ & & & \\ & C_0^2 & C_1^2 & C_2^2 \\ & & & \\ C_0^3 & C_1^3 & C_2^3 & C_3^3 \end{array}$$

Cujas linhas se obtêm umas das outras, bastando para tal somar os dois elementos que se encontram por cima de cada elemento:

$$\begin{array}{cccccc} & & & & & 1 \\ & & & & & \\ & & & & 1 & 1 \\ & & & 1 & 2 & 1 \\ & & 1 & 3 & 3 & 1 \\ & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{array}$$

15.2 Binómio de Newton

Uma das aplicações mais importantes do triângulo de Pascal e das suas propriedades é na dedução e aplicação da fórmula do binómio de Newton:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_k^n x^k$$

Demonstração. (por indução)

1) A propriedade é válida para $n = 1$

$$(1+x)^1 = \sum_{k=0}^1 C_k^1 x^k = C_0^1 x^0 + C_1^1 x^1 = 1+x$$

2) A propriedade é hereditária

Hipótese de indução: A propriedade é válida para $p \leq n$, isto é,

$$(1+x)^p = \sum_{k=0}^p C_k^p x^k \text{ para } p \leq n.$$

É necessário mostrar que, então, a propriedade é válida para $p = n + 1$:

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x)^n (1+x) = \left(\sum_{k=0}^n C_k^n x^k \right) (1+x) = \sum_{k=0}^n C_k^n x^k + \sum_{k=0}^n C_k^n x^{k+1} = \\ &= C_0^n + \sum_{k=1}^n (C_{k-1}^n + C_k^n) x^k + C_n^n x^{n+1} \end{aligned}$$

Vamos agora usar as igualdades $C_k^{n+1} = C_{k-1}^n + C_k^n$ e $C_0^n = C_n^n = 1$ para obter:

$$(1+x)^{n+1} = C_0^{n+1} + \sum_{k=1}^n C_k^{n+1} x^k + C_{n+1}^{n+1} x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_k^{n+1} x^k$$

o que termina a demonstração.

■

Esta fórmula é facilmente generalizada para obter o desenvolvimento de $(a+b)^n$. Com efeito, uma vez que $(a+b)^n = a^n \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n$, pode-se agora usar a fórmula anterior fazendo

$x = \frac{b}{a}$ para obter: $\left(1 + \frac{b}{a}\right)^n = \sum_{k=0}^n C_k^n \left(\frac{b}{a}\right)^k$ e, substituindo, obter, finalmente

$$(a+b)^n = a^n \sum_{k=0}^n C_k^n \left(\frac{b}{a}\right)^k = \sum_{k=0}^n C_k^n a^{n-k} b^k.$$

Exemplo 14 Calcular o termo em x^4 do desenvolvimento de $\left(x + \frac{1}{2x}\right)^{10}$.

$\left(x + \frac{1}{2x}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_k^{10} x^{10-k} \left(\frac{1}{2x}\right)^k = \sum_{k=0}^{10} C_k^{10} x^{10-2k} 2^{-k}$. Então, o termo procurado corresponde a $10 - 2k = 4$, ou seja $k = 3$. Assim, o termo pretendido é

$$C_3^{10} 2^{-3} x^4 = \frac{10!}{7!3!} \frac{1}{8} x^4 = 15x^4.$$

16 Teoria de Grafos

16.1 Introdução

Era uma vez uma cidade no reino da Prússia. A cidade chamava-se Königsberg e espalhava-se por ambas as margens de um rio e por duas ilhas bem no meio do rio. Estávamos no início do século XVIII. Não havia telenovelas, nem futebol, nem telemóveis nem se mandavam e-mails nem SMS. Ao Domingo, quando fazia bom tempo, as famílias, depois de saírem da igreja, passeavam nos seus melhores trajes. A cidade não era muito grande, mas tinha a particularidade interessante de ter sete pontes a ligar as margens do rio e as duas ilhas como se mostra esquematicamente na figura 1.

Havia uma espécie de jogo com que as famílias se divertiam, que consistia em sair de uma zona da cidade (A, B, C ou D) e tentar regressar ao mesmo sítio depois de ter atravessado todas as sete pontes uma única vez. Depois de muitos Domingos e de muitos passeios nunca nenhuma família tinha conseguido esse objectivo e começava-se a pensar na cidade se tal seria de facto possível.

Só alguns anos mais tarde é que Leonard Euler demonstrou que efectivamente tal passeio era impossível. A demonstração apareceu num artigo de 1736 chamado *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, o que quer dizer qualquer coisa como: "Solução de um problema relacionado com a geometria da posição". Este artigo apareceu no número 8 dos *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*. A linguagem utilizada não era a actualmente empregue quando se fala de grafos, mas as ideias estavam todas lá.

Na simbologia actualmente utilizada, pode-se representar este problema esquematicamente, fazendo corresponder a cada região da cidade um ponto e a cada ponte entre essas

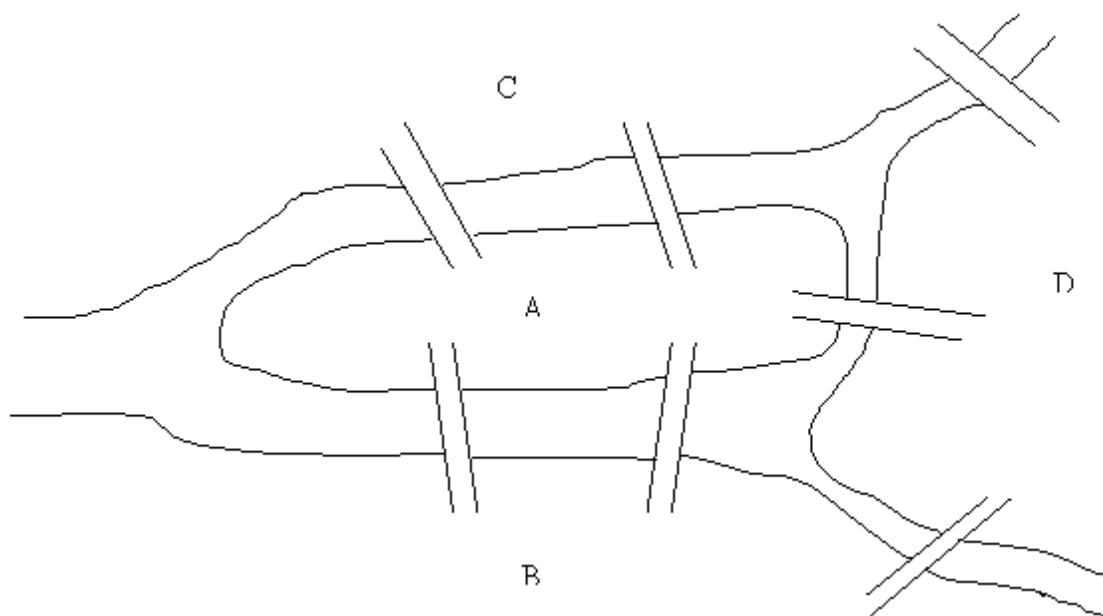


Figura 1: Esquema das pontes de Königsberg

regiões um segmento, recto ou curvo como der mais jeito ao desenho, unindo os pontos correspondentes às regiões ligadas pelas pontes que os segmentos representam. Deste modo, obtém-se o esquema da figura 2.

A cada ponto chamamos vértice e a cada segmento chamamos aresta. E o que acabou de se representar é um grafo.

A ideia da demonstração de que o passeio pretendido é impossível é muito simples: Sempre que se atravessa para uma parte da cidade é preciso sair de lá. Isto é, sempre que se chega a um vértice do grafo usando uma aresta é preciso que haja outra aresta para sair de lá, ou seja, o número de arestas que chegam a cada vértice tem que ser par. Portanto, como no grafo que representa a cidade há vértices onde chega um número ímpar de arestas, tal passeio não é possível.

Mas os grafos não têm utilidade só para encontrar a solução de jogos. Problemas desde a colocação de sinais de sentido proibido e o estabelecimento de percursos alternativos, a regulação da temporização dos semáforos nos cruzamentos, a sequência de ruas que um carteiro deve percorrer para entregar a correspondência, os percursos a efectuar pelos carros que lavam as ruas das cidades, as rondas dos polícias e muitos outros podem ter uma solução mais eficiente usando conceitos de grafos. Até as agências de casamentos teriam

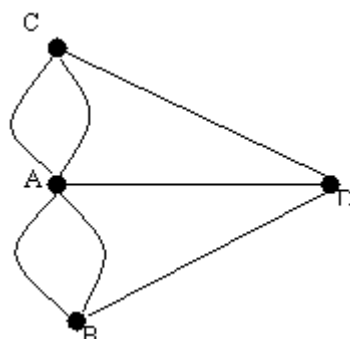


Figura 2: Esquema de Euler

muito a ganhar em eficiência se tivessem especialistas em grafos no seu pessoal.

Antes de definirmos com todo o rigor matemático o que é um grafo, vejamos mais o seguinte exemplo: Cinco turistas de diferentes nacionalidades encontram-se num aeroporto onde passam longas horas à espera de um avião de ligação que os levará para um destino comum. O conhecimento de línguas destes cinco personagens é grande, mas não há uma língua que todos falem, pelo que a conversa não se generaliza. Na tabela seguinte listam-se os idiomas falados pelas cinco pessoas:

Turista \ Língua	Inglês	Alemão	Francês	Espanhol
p	*	*	*	-
q	-	*	-	*
r	*	-	-	*
s	-	*	*	-
t	*	-	*	*

Quem é que fala com quem?

Vamos representar cada turista por um vértice. Unimos dois vértices por uma aresta sempre que esses dois turistas tenham uma língua em comum:

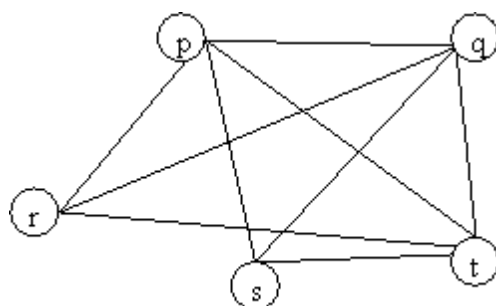


Figura 3: Quem fala com quem?

Por uma simples observação do grafo concluímos que só os turistas r e s não conseguem falar um com outro, visto não haver nenhuma aresta entre estes dois vértices, todos os outros estão ligados directamente, pelo que todos podem falar entre si.

Repare-se que se quiséssemos saber quem é que fala com quem e em quantas línguas, teríamos que usar uma aresta para cada língua, obtendo-se o grafo da figura 4.

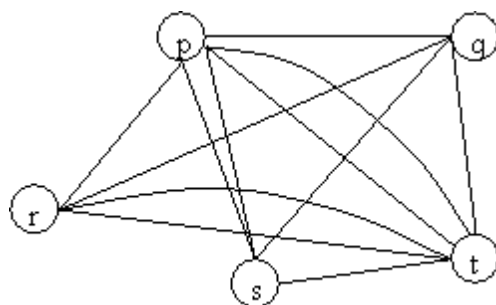


Figura 4: Em quantas línguas?

A representação gráfica começa a ficar muito complicada e é já óbvio que é necessário encontrar um processo mais eficiente de fazer a representação das interligações existentes entre os vértices.

Além do mais, se o tratamento tiver que ser feito informaticamente, o que será inevitável a partir de certo número de vértices e/ou arestas, o desenho não é a forma mais conveniente. Surgiu assim a ideia de se representar as ligações entre os vértices usando uma matriz quadrada, de dimensão igual ao número de vértices. Cada linha/coluna corresponde a

um vértice. A entrada da matriz na linha i e coluna j representa o número de arestas que unem os vértices i e j . Repare-se que nos exemplos até agora apresentados a matriz correspondente é simétrica, mas não é difícil encontrar exemplos em que a matriz não seja simétrica. Pensemos por exemplo num mapa representando as ruas de uma cidade. Neste caso, os vértices representam cruzamentos ou rotundas e as arestas representam as ruas entre esses cruzamentos e essas rotundas. Como é inevitável que numa cidade haja ruas de sentido único, temos aqui um exemplo em que a matriz não é simétrica, pois se há uma rua de sentido único entre os vértices i e j , não há aresta ligando directamente j a i . Um problema interessante (e útil) é saber qual a forma de ir de j para i , uma vez que não se pode circular em ruas no sentido proibido. Para representar no grafo situações em que uma aresta só pode ser percorrida num determinado sentido usa-se uma seta para indicar qual o sentido de circulação sobre a aresta, que, neste caso se passa a chamar arco. Se todos os arcos puderem ser percorridos em ambos os sentidos dizemos que temos um grafo não orientado e não há necessidade de usar qualquer seta sobre as arestas. Desde que pelo menos um dos arcos possa ser percorrido num único sentido é necessário indicar qual recorrendo a setas e dizemos que temos um grafo orientado.

Vejamos qual o aspecto das matrizes correspondentes aos grafos representados nas figuras 3 e 4 respectivamente:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Vejamos agora uma representação esquemática das ruas da baixa de uma cidade. Os vértices representam cruzamentos e os arcos representam ruas entre esses cruzamentos. Nesta cidade todas as ruas são de sentido único:

A matriz associada a este grafo é obviamente não simétrica:

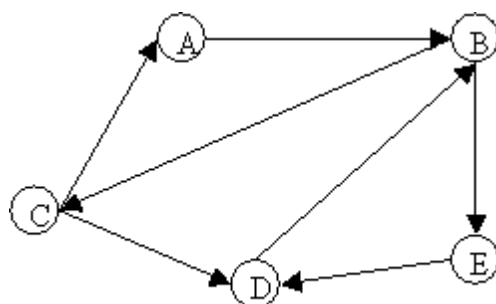


Figura 5: Baixa de uma cidade

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Quando se trata de ruas de sentido único, um problema premente é o de saber se cada cruzamento pode ser alcançado a partir de todos os outros. A este problema chama-se *conexidade do grafo*. Antes de o resolver é porém necessário saber mais alguma coisa sobre grafos.

16.2 Definições e conceitos básicos

Agora que já sabemos representar grafos de duas maneiras diferentes e que já falámos em dois tipos diferentes de grafos, está na altura de definirmos rigorosamente o que é um grafo.

Definição 16 *Chama-se grafo orientado a um par ordenado $G = (X, \Gamma)$, em que X é um conjunto e $\Gamma \subseteq X \times X$. A X chama-se conjunto de vértices e a Γ chama-se conjunto de arcos. Se G for um conjunto de subconjuntos de X com 2 elementos (isto é, pares não ordenados) o grafo diz-se não orientado. Neste caso aos elementos de G chamam-se arestas.*

A fim de melhor estudar certos fenómenos que se passam num grafo é, muitas vezes, vantajoso estudar o que se passa em partes desse mesmo grafo. Surgem assim as seguintes definições:

Definição 17 *Seja $G = (X, \Gamma)$ um grafo e seja $G_Y = (Y, \Gamma_Y)$ outro grafo tal que $Y \subseteq X$ e $\Gamma_Y = \Gamma \cap (Y \times Y)$. A G_Y chama-se um subgrafo de G .*

Definição 18 *Seja $G = (X, \Gamma)$ um grafo e seja $G_\Delta = (X, \Delta)$ outro grafo tal que $\Delta \subseteq \Gamma$. A G_Δ chama-se um grafo parcial de G .*

Repare-se na diferença destes dois conceitos. Enquanto que num subgrafo se escolhe um subconjunto do conjunto de vértices e se mantêm todas as arestas que existiam entre eles, num grafo parcial mantêm-se todos os vértices e suprimem-se algumas arestas. Vejamos um exemplo:

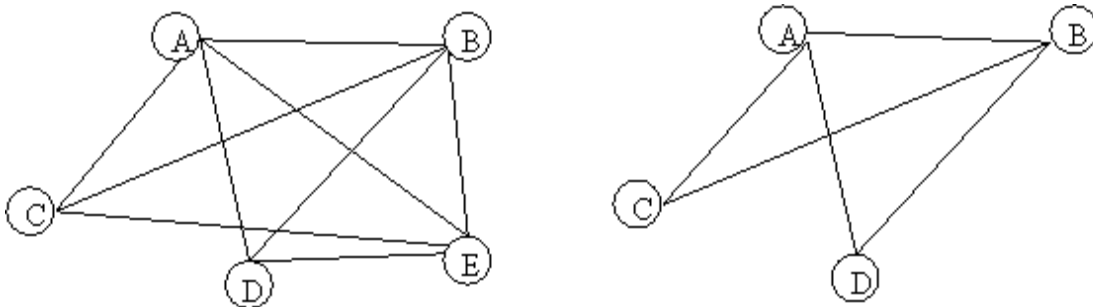


Figura 6: Exemplo de subgrafo

Na figura 6 o grafo da direita resulta do grafo da esquerda por supressão do vértice E e de todas as arestas que partem dele. De acordo com a definição o grafo da direita é um subgrafo do grafo da esquerda.

Na figura 7 no grafo da direita mantiveram-se os mesmos vértices do grafo da esquerda mas retiraram-se algumas arestas. De acordo com a definição, dizemos que o grafo da direita é um grafo parcial do grafo da esquerda.

Repare-se que os grafos não orientados podem ser transformados em grafos orientados se cada aresta não orientada for substituída por dois arcos de sentidos opostos.

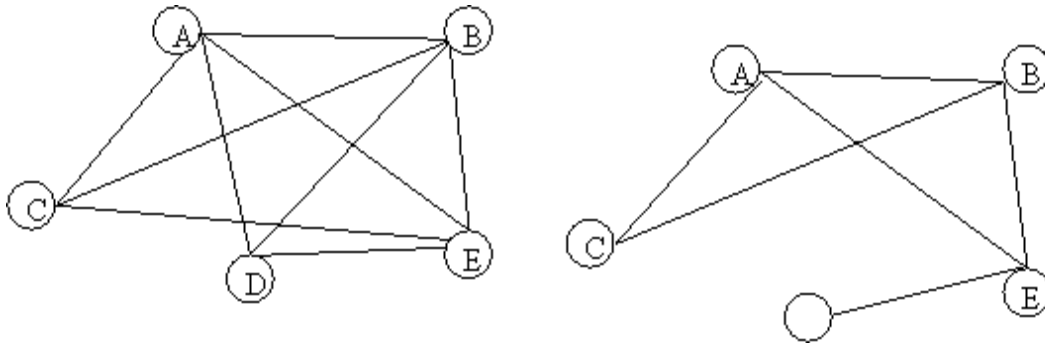


Figura 7: Exemplo de grafo parcial

16.3 Matrizes de grafos

Definição 19 *Seja $G = (X, \Gamma)$ um grafo, tal que $\#X = n$. A matriz de adjacência de G é uma matriz M $n \times n$, tal que*

$$\begin{cases} m_{ij} = 1 & \text{se } (x_i, x_j) \in \Gamma \\ m_{ij} = 0 & \text{se } (x_i, x_j) \notin \Gamma \end{cases}$$

(Estamos a designar os elementos de X por $x_i, i = 1, \dots, n$)

Já se viram atrás alguns exemplos de matrizes de adjacência.

Repare-se que as definições até agora dadas não mencionam o facto de poder haver mais do que uma aresta ou arco entre dois vértices. Se houver mais do que uma aresta ou arco entre dois vértices, isso significa que se admite que o conjunto G possa ter elementos repetidos. Nesse caso, a entrada correspondente na matriz de adjacência em vez de ser 1 será igual ao número de vezes que essa aresta ou arco aparece repetido, como também já se viu atrás. Quando esta situação acontece dizemos que temos arestas múltiplas.

Também pode acontecer haver um arco a ligar um vértice a si próprio, o que corresponde a haver em Γ um par da forma (x_i, x_i) . A um tal arco chama-se laço.

Definição 20 *Um grafo sem laços e sem arestas múltiplas chama-se simples.*

Em termos computacionais, a representação de um grafo depende da situação que se está a modelar e, muitas vezes, do algoritmo que se pretende utilizar. Uma outra representação matricial também muito utilizada é a chamada matriz de incidência.

Definição 21 *Seja $G = (X, \Gamma)$ um grafo, tal que $\#X = n$ e $\#\Gamma = m$. A matriz de incidência de G é uma matriz M $n \times m$, tal que*

$$\left\{ \begin{array}{l} m_{ij} = 1 \quad \text{se } \exists k : u_j = (x_i, x_k) \in \Gamma, x_i \neq x_k \\ m_{ij} = -1 \quad \text{se } \exists k : u_j = (x_k, x_i) \in \Gamma, x_i \neq x_k \\ m_{ij} = 0 \quad \text{nos outros casos} \end{array} \right. \begin{array}{l} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, m \end{array}$$

Vejam os como funciona esta matriz com o grafo da figura 5. Primeiro é preciso começar por ordenar os arcos. A numeração mais usual é a lexicográfica, isto é, começa-se com os arcos que começam no primeiro vértice e numeram-se por ordem do segundo vértice, depois faz-se a mesma coisa para o segundo vértice e assim por diante. Temos então:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = (A, B) \\ u_2 = (B, C) \\ u_3 = (B, E) \\ u_4 = (C, A) \\ u_5 = (C, D) \\ u_6 = (D, B) \\ u_7 = (E, D) \end{array} \right. \quad \text{e } M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Repare-se que em cada coluna há um único elemento igual a 1 e um único igual a -1, sendo todos os outros nulos. O número de elementos iguais a 1 numa linha dá o número de arcos que sai do vértice correspondente a essa linha, enquanto que o número de elementos iguais a -1 dá o número de arcos que chegam ao vértice correspondente a essa linha.

16.4 Graus dos vértices

Definição 22 *Chama-se semigrau exterior do vértice x_i ($gr^+(x_i)$) ao número de arcos que saem de x_i . Chama-se semigrau interior do vértice x_i ($gr^-(x_i)$) ao número de arcos que chegam a x_i . Se o grafo for não orientado, estes dois valores são iguais e designam-se simplesmente por grau de x_i ($gr(x_i)$).*

A partir da definição de grau de um vértice num grafo não orientado conclui-se facilmente que:

Lema 1 *A soma dos graus dos vértices num grafo não orientado é um número par que é igual ao dobro do número de arestas.*

Com efeito, cada aresta é contada duas vezes no cômputo da soma dos graus: uma vez para cada um dos vértices nos seus extremos.

Corolário 1 *Num grafo não orientado o número de vértices com grau ímpar é par.*

Não é difícil estabelecer um resultado análogo para grafos orientados, agora somando os semigraus exteriores e os semigraus interiores de todos os vértices.

Tendo a representação do grafo pela matriz de adjacência, o semigrau exterior de um vértice é igual ao número de elementos iguais a 1 na linha correspondente a esse vértice, enquanto que o semigrau interior é o número de elementos iguais a 1 na coluna correspondente a esse vértice. Se o grafo for não orientado, a matriz é simétrica e esses dois valores são iguais.

Tendo a representação do grafo pela matriz de incidência, o semigrau exterior de um vértice é igual ao número de elementos iguais a 1 na linha correspondente a esse vértice, enquanto que o semigrau interior é igual ao número de elementos iguais a -1 nessa mesma linha. É claro que se o grafo for não orientado estes dois valores são iguais.

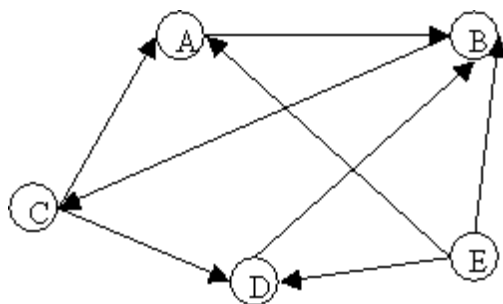
Definição 23 *Um grafo não orientado em que todos os vértices têm o mesmo grau diz-se regular.*

Definição 24 *Um grafo orientado diz-se pseudo-simétrico se para todos os vértices x_i se verifica $gr^+(x_i) = gr^-(x_i)$.*

16.5 Sucessores e antecessores

A representação por matriz de adjacência é das mais simples, mas, para grafos de grandes dimensões é pouco prática, pois ocupa muito espaço e os programas tornam-se muito demorados. A representação por matriz de incidência, normalmente ainda ocupa mais espaço, só sendo por isso utilizada em certos algoritmos que tiram partido da sua estrutura.

Um processo mais económico (em termos de espaço) de representar grafos computacionalmente é o das chamadas listas de sucessores e/ou antecessores.



Definição 25 Um vértice x_i diz-se sucessor do vértice x_j se existir o arco (x_j, x_i) . Neste caso o vértice x_j diz-se antecessor de x_i .

Vamos representar o grafo da figura 16.5 por meio de uma lista de sucessores:

x	A	B	C	D	E
$\Gamma^+(x)$	B	C	A, D	B	A, B, D

De modo análogo se pode definir uma lista de antecessores:

x	A	B	C	D	E
$\Gamma^-(x)$	C, E	A, C, D	B	C, E	\emptyset

Num computador estas listas podem ser representadas de modo muito mais económico, por meio de apontadores, do que através de qualquer uma das matrizes anteriormente definidas.

A noção de sucessor (antecessor) de um vértice pode ser estendida para um conjunto de vértices, como sendo o conjunto de todos os vértices que são sucessores (antecessores) dos vértices do conjunto.

Assim, por exemplo, pode-se escrever

$$\Gamma^+(\{B, C\}) = \{A, C, D\} \quad \text{e} \quad \Gamma^-(\{B, C\}) = \{A, B, C, D\}$$

E agora podemos definir o conjunto sucessor (antecessor) dos sucessores (antecessores) de um conjunto:

$$\Gamma^{+2}(\{B, C\}) = \Gamma^+(\{A, C, D\}) = \{A, B, C, D\} \quad \text{e}$$

$$\Gamma^{-2}(\{B, C\}) = \Gamma^-(\{A, B, C, D\}) = \{A, B, C, D, E\}$$

Continuando a procurar os sucessores dos sucessores e os antecessores dos antecessores, podemos definir recursivamente o conjunto de sucessores e de antecessores de ordem n de um vértice ou de um conjunto de vértices:

$$\Gamma^{+n}(\{x_i\}) = \Gamma(\Gamma^{+(n-1)}(\{x_i\}))$$

e

$$\Gamma^{-n}(\{x_i\}) = \Gamma(\Gamma^{-(n-1)}(\{x_i\}))$$

Fazendo a reunião dos conjuntos de sucessores que se obtêm sucessivamente é possível saber a quais vértices é que se pode chegar partindo de um determinado vértice. Do mesmo modo, fazendo a reunião dos conjuntos de antecessores que se obtêm sucessivamente é possível saber de que vértices é que se pode partir para chegar a um determinado vértice.

16.6 Caminhos e conectividade

Definição 26 *Dados dois vértices distintos x_i e x_j chama-se caminho entre x_i e x_j a uma sucessão de arcos tais que cada arco começa onde o anterior acaba, o primeiro arco da sucessão começa em x_i e o último termina em x_j . Ao número de arcos desse caminho chama-se comprimento do caminho. Se o caminho começar e acabar no mesmo vértice chama-se circuito.*

Para se saber se existe ou não um caminho entre dois vértice é preciso analisar os sucessivos conjuntos de sucessores do vértice x_i .

Definição 27 *Chama-se fecho transitivo do vértice x_i ao conjunto dos vértices para os quais existe um caminho, de qualquer comprimento a partir, de x_i . Este conjunto pode ser determinado por*

$$\widehat{\Gamma}^+(\{x_i\}) = \{x_i\} \cup \Gamma^+(\{x_i\}) \cup \Gamma^{+2}(\{x_i\}) \cup \dots \cup \Gamma^{+n}(\{x_i\}) \cup \dots$$

Definição 28 *Define-se fecho transitivo inverso do vértice x_i como o conjunto dos vértices a partir dos quais existe um caminho, de qualquer comprimento, que chega a x_i . e determina-se através de*

$$\widehat{\Gamma}^-(\{x_i\}) = \{x_i\} \cup \Gamma^-(\{x_i\}) \cup \Gamma^{-2}(\{x_i\}) \cup \dots \cup \Gamma^{-n}(\{x_i\}) \cup \dots$$

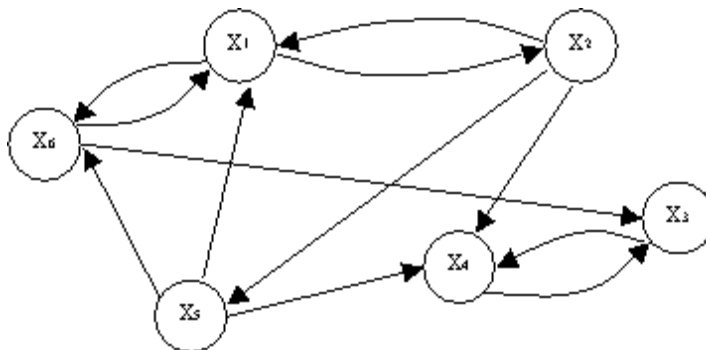


Figura 8: Determinação de caminhos

Vamos exemplificar estes conceitos utilizando o grafo da figura 8.

Começemos por determinar o fecho transitivo do vértice x_1 .

$$\Gamma^+(\{x_1\}) = \{x_2, x_6\}$$

$$\Gamma^{+2}(\{x_1\}) = \Gamma^+(\{x_2, x_6\}) = \{x_1, x_3, x_4, x_5\}$$

$$\Gamma^{+3}(\{x_1\}) = \Gamma^+(\{x_1, x_3, x_4, x_5\}) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_6\}$$

$$\Gamma^{+4}(\{x_1\}) = \Gamma^+(\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_6\}) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$$

Como já chegamos a um conjunto que tem todos os vértices do grafo, não é necessário continuar à procura de sucessores.

$$\text{Temos então: } \widehat{\Gamma}^+(\{x_1\}) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}.$$

Vejam agora qual é o fecho transitivo inverso do mesmo vértice:

$$\Gamma^-(\{x_1\}) = \{x_2, x_5, x_6\}$$

$$\Gamma^{-2}(\{x_1\}) = \Gamma^-(\{x_2, x_5, x_6\}) = \{x_1, x_2, x_5\}$$

$$\Gamma^{-3}(\{x_1\}) = \Gamma^-(\{x_1, x_2, x_5\}) = \{x_2, x_5, x_6\}$$

Também, neste caso, não é preciso continuar à procura de antecessores uma vez que os conjuntos $\{x_2, x_5, x_6\}$ e $\{x_1, x_2, x_5\}$ vão alternar e não se vai obter mais nenhum vértice. Temos assim: $\widehat{\Gamma}^-(\{x_1\}) = \{x_1, x_2, x_5, x_6\}$.

Se fizermos a intersecção dos dois conjuntos $\widehat{\Gamma}^+(\{x_1\})$ e $\widehat{\Gamma}^-(\{x_1\})$ obtemos o conjunto de todos os vértices que estão ligados a x_1 por um caminho de ida e de volta.

Definição 29 *Chama-se componente fortemente conexas de x_i e representa-se por $C(\{x_i\})$, ao conjunto de todos os vértices que estão ligados a x_i por um caminho de ida e volta. Ou seja,*

$$C(\{x_i\}) = \widehat{\Gamma}^+(\{x_1\}) \cap \widehat{\Gamma}^-(\{x_1\})$$

É claro que determinando a componente fortemente conexa de qualquer outro vértice de $C(\{x_1\})$ se obtém exactamente o mesmo conjunto: $C(\{x_1\}) = \{x_1, x_2, x_5, x_6\}$. Os vértices x_3 e x_4 ficaram de fora desta componente. Vamos agora determinar $C(\{x_3\})$.

Começa-se por determinar o fecho transitivo de x_3 :

$$\Gamma^+(\{x_3\}) = \{x_4\}$$

$$\Gamma^{+2}(\{x_3\}) = \Gamma^+(\{x_4\}) = \{x_3\}$$

E não é preciso procurar mais sucessores. Temos assim: $\widehat{\Gamma}^+(\{x_3\}) = \{x_3, x_4\}$.

Vejam agora qual é o fecho transitivo inverso do mesmo vértice:

$$\Gamma^-(\{x_3\}) = \{x_4, x_6\}$$

$$\Gamma^{-2}(\{x_3\}) = \Gamma^-(\{x_4, x_6\}) = \{x_2, x_3, x_5\}$$

$$\Gamma^{-3}(\{x_3\}) = \Gamma^-(\{x_2, x_3, x_5\}) = \{x_1, x_2, x_4, x_6\}$$

E não é preciso procurar mais antecessores: $\widehat{\Gamma}^-(\{x_3\}) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$.

Fazendo agora a intersecção de $\widehat{\Gamma}^+(\{x_3\})$ e $\widehat{\Gamma}^-(\{x_3\})$ obtém-se $C(\{x_3\}) = \{x_3, x_4\}$.

Conclui-se assim que este grafo tem duas componentes fortemente conexas.

Vamos seguidamente estudar o processo de determinar as componentes fortemente conexas de um grafo utilizando a sua matriz de adjacência. Vamo-nos socorrer do grafo da figura 8. Escreve-se, em primeiro lugar, a sua matriz de adjacência:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Começamos por determinar o fecho transitivo do vértice x_1 . Na primeira linha da matriz encontramos elementos iguais a 1 nas posições 2 e 6, isso significa que existe um arco entre o vértice x_1 e os vértices x_2 e x_6 . Seguidamente inspeccionam-se as linhas correspondentes a x_2 e x_6 à procura de elementos iguais a 1. Esses elementos dão-nos a informação dos vértices para aos quais se pode chegar partindo do vértice x_1 usando caminhos de comprimento dois. Prossegue-se inspeccionando as linhas correspondentes a estes novos vértices e assim por diante até que aconteça uma de duas situações: ou já temos

Repare-se que agora inspeccionando as colunas assinaladas com 1 não se conseguem marcar mais colunas, pelo que temos $\widehat{\Gamma}^-(\{x_1\}) = \{x_1, x_2, x_5, x_6\}$.

Após a determinação da componente fortemente conexa que contém x_1 , vamos determinar as componentes fortemente conexas dos vértices que ficaram de fora desta componente. Como é $C(\{x_1\}) = \{x_1, x_2, x_5, x_6\}$, podemos optar por x_3 ou por x_4 . Como já se viu, se formos estudar a componente de qualquer outro vértice já incluído em $C(\{x_1\})$ obter-se-á exactamente o mesmo conjunto. Também se percebe facilmente que as componentes conexas dos vértices que ficaram de fora não vão incluir qualquer dos vértices de $C(\{x_1\})$. Vamos, portanto, estudar só os sucessores e antecessores no subgrafo em que o conjunto de vértices é $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\} - C(\{x_1\})$, ou seja, toma-se para conjunto de vértices do subgrafo $\{x_3, x_4\}$. A matriz de adjacência só tem as linhas e colunas correspondentes a estes vértices e o processo é repetido:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Conclui-se assim que $C(\{x_3\}) = \{x_3, x_4\}$.

Repare-se que cada componente conexa pode ser definida através de uma relação no conjunto dos vértices: x_i e x_j pertencem à mesma componente fortemente conexa se e só se existe uma caminho de ida e volta entre os dois vértices. É fácil verificar que se trata de uma relação de equivalência e que, portanto, as componentes fortemente conexas são, na realidade classes de equivalência que fazem uma partição no conjunto dos vértices.

Definição 30 *Um grafo orientado em que haja uma só componente fortemente conexa diz-se fortemente conexo.*

Nalguns casos é suficiente que haja uma ligação entre os vértices independentemente do sentido. Nesse caso admite-se a construção de caminhos que utilizem arestas em "sentido proibido". Na prática o processo decorre como se todos os arcos se transformassem em arestas. As componentes obtidas deste modo chamam-se componentes conexas.

Definição 31 *Um grafo orientado em que haja uma só componente conexa diz-se conexo.*

Definição 32 *Num grafo conexo a uma aresta cuja retirada transforma o grafo num grafo desconexo chama-se um istmo.*

A determinação das componentes conexas é bastante mais simples, pois, neste caso, o conjunto dos sucessores e dos antecessores é o mesmo. Só é necessário construir, a partir da matriz de adjacência, uma matriz auxiliar, correspondente ao grafo não orientado que se obtém quando se transformam os arcos em arestas. Esta nova matriz é obviamente simétrica e obtém-se do seguinte modo:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } m_{ij} = m_{ji} = 0 \\ 1 & \text{se nos outros casos} \end{cases} \begin{matrix} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, n \end{matrix}$$

No exemplo anteriormente tratado, correspondente ao grafo da figura 8, querendo determinar as componentes conexas, começa-se por construir a matriz auxiliar A como foi descrito e fazer a determinação das componentes sobre a matriz auxiliar. Assim:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Conclui-se assim que o grafo da figura 8 é conexo, pois tem uma única componente conexa. Num grafo não orientado não faz sentido em falar em componentes fortemente conexas, pois os conceitos de conexo e fortemente conexo correspondem à mesma realidade.

A determinação das componentes fortemente conexas permite identificar todos os pares de vértices entre os quais existem caminhos, mas não nos fornece informação completa sobre o número e o comprimento dos caminhos existentes.

Vejam no grafo da figura 9 como determinar todos os caminhos entre os vértices A e E que não passem mais do que uma vez pelo mesmo vértice.

Como o grafo é de muito reduzida dimensão é relativamente fácil, por simples inspeção, determinar todos os caminhos pretendidos:

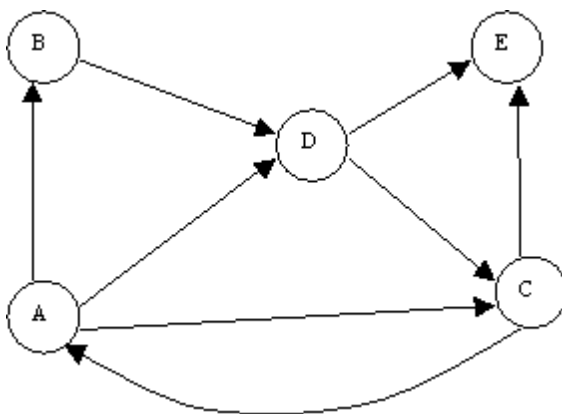


Figura 9: Determinação de caminhos

$$A \longrightarrow C \longrightarrow E;$$

$$A \longrightarrow D \longrightarrow E;$$

$$A \longrightarrow B \longrightarrow D \longrightarrow E;$$

$$A \longrightarrow D \longrightarrow C \longrightarrow E;$$

$$A \longrightarrow B \longrightarrow D \longrightarrow C \longrightarrow E$$

Este grafo só tem 5 vértices e pretendem-se caminhos que não repitam vértices, por isso não se vai além dos caminhos de comprimento 4.

Vejamos um processo de encontrar estes caminhos sem ser por observação do grafo. Começemos por escrever a matriz de adjacência deste grafo:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O elemento m_{15} é nulo, este facto informa-nos que não existe qualquer caminho de comprimento 1 entre os vértices A e E .

Calculando M^2 obtém-se informação sobre os caminhos com dois arcos. Com efeito, se há um caminho de comprimento 2 entre os vértices x_i e x_j , isso significa que existe um vértice x_k tal que há um arco entre x_i e x_k e outro entre x_k e x_j , ou seja $m_{ik} = 1$ e

$m_{kj} = 1$. Como $m_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^n m_{ik}m_{kj}$, facilmente se percebe que este valor dá informação sobre o número de caminhos de comprimento 2 entre os vértices xi e xj .

$$M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Temos $m_{15}^{(2)} = 2$, sabemos assim que há dois caminhos de comprimento 2 entre A e E . Para saber quais são esses caminhos é preciso averiguar quais os produtos que deram origem aquele 2: $m_{15}^{(2)} = m_{13}m_{35} + m_{14}m_{45}$. Temos assim os caminhos: $A \rightarrow C \rightarrow E$ e $A \rightarrow D \rightarrow E$.

De modo análogo, a matriz M^3 dá informação sobre o número de caminhos de comprimento 3:

$$M^3 = MM^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$m_{15}^{(3)} = m_{12}m_{25}^{(2)} + m_{14}m_{45}^{(2)} = m_{12}m_{24}m_{45} + m_{14}m_{43}m_{35}$. Temos assim os caminhos $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow E$ e $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow E$.

Continuando:

$$M^4 = MM^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$m_{15}^{(4)} = m_{12}m_{25}^{(3)} + m_{13}m_{35}^{(3)} = m_{12}m_{24}m_{43}m_{35} + m_{13}m_{31}m_{13}m_{35} + m_{13}m_{31}m_{14}m_{45}$. Temos assim os caminhos $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow E$, $A \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow E$ e $A \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow E$. Como o objectivo era encontrar caminhos que não repetissem vértices, só o primeiro destes caminhos cumpre esse objectivo.

O problema de, num dado grafo, determinar caminhos que não repitam arestas ou não repitam vértices tem inúmeras aplicações práticas, como veremos. Na maior parte dessas aplicações, trabalha-se com grafos não orientados e o objectivo é encontrar um circuito que contenha todos os vértices ou todas as arestas sem repetição.

Definição 33 *Um caminho ou circuito diz-se elementar se todos os vértices por onde passa são distintos. Um circuito elementar que contenha todos os vértices de um grafo não orientado diz-se circuito de Hamilton.*

No exemplo anterior procuravam-se todos os caminhos elementares entre os vértices A e E.

16.7 Circuitos e caminhos de Euler

Definição 34 *Um caminho ou circuito diz-se simples se todos os arcos ou arestas que o constituem são distintas. Um circuito simples que contenha todas as arestas de um grafo não orientado diz-se circuito de Euler.*

O problema das pontes de Königsberg é na realidade o problema de encontrar um circuito de Euler, que já sabemos não existir para aquele grafo.

Teorema 15 *Num grafo não orientado conexo existe um circuito de Euler se e só se todos os vértices tiverem grau par.*

Demonstração. Existe circuito de Euler \implies todos os vértices têm grau par.

Se existe um circuito de Euler, então sempre que se chega a um vértice é preciso sair e, por isso, as arestas incidentes em cada vértice têm que ser em número par.

Todos os vértices têm grau par \implies existe circuito de Euler

Se todos os vértices têm grau par o grafo deve conter pelo menos um circuito. Com efeito, considere-se um grafo G com m arestas e todos os vértices com grau par. Seja C o caminho de maior comprimento que se pode ter em G . Sejam os vértices desse caminho $x_1x_2\dots x_{p-1}x_p$. Como x_p tem grau par então ele não pode estar ligado só a x_{p-1} , mas como C é o caminho de maior comprimento em G , então a outra aresta deve ligar a um dos outros vértices deste caminho, obtendo-se assim o circuito desejado.

Para demonstrar a existência de um circuito de Euler procede-se por indução matemática sobre o número de arestas do grafo.

$$m = 0$$

O único grafo conexo com 0 arestas é um grafo só com um vértice de grau zero, onde claramente há um circuito de Euler.

Por hipótese de indução, considere-se que todos os grafos conexos com número de arestas inferior a m e em que todos os vértices têm grau par possuem um circuito de Euler. Seja agora G um grafo conexo com m arestas e em que todos os vértices têm grau par. G tem um circuito. Seja C esse circuito. Num circuito cada vértice está ligado ao vértice anterior e ao seguinte. Se retirarmos de G as arestas de C , o grafo resultante G' continua a ter todos os vértices com grau par. O grafo G' pode não ser conexo. Cada uma das suas componentes conexas obedece à hipótese de indução e, por isso, possui um circuito de Euler. Estamos em condições de construir um circuito de Euler para G , começando no circuito C , usando cada circuito de Euler das componentes conexas de G' sempre que um vértice de C pertencer a uma dessas componentes, regressando a C exactamente a esse vértice e continuando até voltar ao ponto de partida. ■

Esta demonstração fornece um processo muito pouco prático de encontrar um circuito de Euler. Descreve-se a seguir o algoritmo de Fleury para obtenção de circuitos de Euler. Este é um algoritmo fácil de utilizar em cálculos à mão e também de fácil implementação em computador.

16.7.1 Algoritmo de Fleury

1. Escolher um vértice qualquer para iniciar.

2. Escolher qualquer aresta que saia desse vértice só escolhendo uma aresta que seja um istmo se não houver mais nenhuma.
3. Destruir a aresta utilizada
4. Repetir 2 e 3 até chegar ao vértice inicial.
5. Se não há mais arestas o circuito de Euler está encontrado. Caso ainda haja arestas, recomeçar o circuito a partir de um dos vértices do circuito onde ainda haja arestas incidentes.

Exemplo 15 *Encontrar um circuito de Euler no grafo representado na figura 10.*

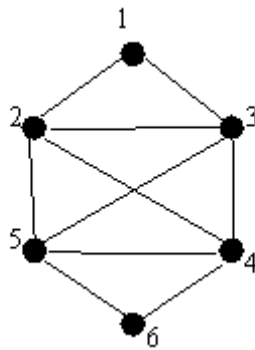


Figura 10: Circuito de Euler

É preciso começar por constatar que realmente existe um tal circuito. Com efeito o grafo é conexo e os graus dos vértices são: 2, 4, 4, 4, 4, 2.

Começa-se com um vértice qualquer, por exemplo o vértice 1, escolhe-se uma aresta que sai de 1, por exemplo (1, 2). Retira-se essa aresta. Escolhe-se uma aresta que sai de 2, por exemplo (2, 3). Retira-se essa aresta. Escolhe-se uma aresta que sai de 3, por exemplo (3, 4). Retira-se essa aresta. Escolhe-se uma aresta que sai de 4, por exemplo (4, 5). Retira-se essa aresta. Neste momento o caminho já construído é $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ e o grafo está com o aspecto que se mostra na figura 11

Continuando o processo, escolhe-se agora uma aresta a sair de 5, por exemplo (5, 6), retira-se a aresta. E repetindo o processo até acabar as arestas obtinha-se o circuito: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 1$

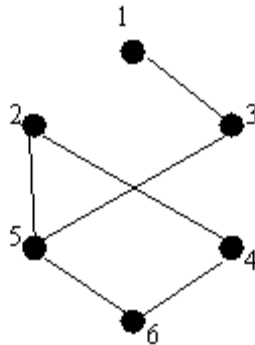


Figura 11: Aplicação do algoritmo de Fleury

Este algoritmo é também de fácil programação em computador, a partir da matriz de adjacência. Vejamos com este mesmo exemplo como poderia funcionar um programa de computador. A matriz de adjacência correspondente ao grafo da figura 10 é

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Um programa de computador tem que fazer uma escolha sistemática. Suponhamos que o programa é construído de modo a que a aresta escolhida em cada passo é a correspondente à primeira entrada não nula da linha correspondente ao vértice que está a ser considerado no momento. Note-se que retirar a aresta do vértice i para o vértice j corresponde a anular as entradas a_{ij} e a_{ji} da matriz.

Começando no vértice 1, inspecciona-se a primeira linha e encontra-se a primeira entrada não nula correspondente à aresta (1, 2). Faz-se $a_{12} = a_{21} = 0$. Agora inspecciona-se a segunda linha. A primeira entrada não nula é a_{23} correspondente à aresta (2, 3). Faz-se $a_{23} = a_{32} = 0$. Inspecciona-se agora a terceira linha. A primeira entrada não nula corresponde à aresta (3, 1). Faz-se $a_{31} = a_{13} = 0$. Neste momento a matriz de adjacência

modificada está com o aspecto:

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e o circuito já construído é $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$. Mas agora a primeira linha já não tem nenhuma entrada não nula. Observa-se o circuito construído e procura-se o primeiro vértice que corresponda a uma linha que ainda tenha alguma entrada não nula. Verifica-se que a segunda linha está nessas condições. Rescreve-se o circuito a acabar no vértice 2: $2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 2$ e continua-se com o processo. Agora a primeira entrada não nula da linha 2 corresponde à aresta $(2, 4)$. Faz-se $a_{24} = a_{42} = 0$. Na linha 4 a primeira entrada não nula corresponde à aresta $(4, 3)$. Faz-se $a_{43} = a_{34} = 0$. Na linha 3 a primeira entrada não nula corresponde à aresta $(3, 5)$. Faz-se $a_{35} = a_{53} = 0$. Na linha 5 a primeira entrada não nula corresponde à aresta $(5, 2)$. Faz-se $a_{52} = a_{25} = 0$. Neste momento a matriz de adjacência modificada está com o aspecto:

$$A'' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e o circuito construído até ao momento é $2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 2$.

Agora a linha correspondente ao vértice 2 já não tem nenhuma entrada não nula. Como se fez antes, percorre-se o circuito de modo a terminar num vértice correspondente a uma

linha que ainda tenha elementos não nulos: $4 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$. Continuando o processo, escolhia-se agora a aresta $(4, 5)$, depois a $(5, 6)$ e, finalmente a $(6, 4)$, obtendo-se o circuito de Euler $4 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 4$. De notar que no fim do processo a matriz A fica nula.

Suponhamos agora que os habitantes de Königsberg não se importavam de começar e acabar o seu passeio em partes diferentes da cidade, desde que atravessassem todas as pontes sem repetição. Isto é, por outras palavras, será possível encontrar no grafo da figura 10 um caminho (já não um circuito) que use todas as arestas sem repetição? A resposta mais uma vez é negativa.

Teorema 16 *Num grafo conexo não orientado existe um caminho de Euler se e só se houver exactamente duas arestas com grau ímpar.*

Demonstração. Unindo os dois vértices de grau ímpar por uma aresta teremos um grafo conexo em que todas as arestas têm grau par. Estamos, assim, em condições de encontrar um circuito de Euler. Basta escrever o circuito de tal modo que a aresta introduzida seja a primeira ou a última e depois retirá-la para obter um caminho de Euler, que vai começar e acabar nos dois vértices de grau ímpar. ■

Também é possível formular resultados sobre a existência de circuitos e caminhos de Euler em grafos orientados.

Teorema 17 *Num grafo orientado fortemente conexo existe um circuito de Euler se e só se o grafo for pseudo-simétrico.*

Teorema 18 *Num grafo orientado fortemente conexo existe um caminho de Euler se e só se existirem dois vértices x_p e x_f tais que $gr^+(x_p) - gr^-(x_p) = 1$ e $gr^-(x_f) - gr^+(x_f) = 1$ e para todos os outros vértices x_j com $j \neq p$ e $j \neq f$ for $gr^+(x_j) = gr^-(x_j)$.*

A demonstração destes teoremas é semelhante à já apresentada para o caso não orientado.

Vejamos o exemplo da figura 12:

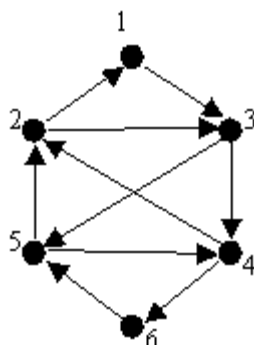


Figura 12: Circuito de Euler

$$\left. \begin{aligned}
 gr^+(1) &= gr^-(1) = 1 \\
 gr^+(2) &= gr^-(2) = 2 \\
 gr^+(3) &= gr^-(3) = 2 \\
 gr^+(4) &= gr^-(4) = 2 \\
 gr^+(5) &= gr^-(5) = 2 \\
 gr^+(6) &= gr^-(6) = 1
 \end{aligned} \right\} \text{Ent\~{a}o o grafo \u00e9 pseudo-sim\u00e9trico.}$$

Tamb\u00e9m n\u00e3o \u00e9 dif\u00edcil constatar que o grafo \u00e9 fortemente conexo. Basta determinar a componente fortemente conexa de um dos seus v\u00e9rtices, para concluir que o grafo tem uma \u00fanica componente fortemente conexa.

$$\begin{bmatrix}
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 3 \\
 1 \\
 2 \\
 2 \\
 3
 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
 0 & 1 & 3 & 2 & 2 & 3
 \end{bmatrix}$$

O processo para encontrar um circuito de Euler é semelhante ao descrito para o caso não orientado. Uma possível solução é o circuito $4 \rightarrow 6 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 4$.

16.8 Grafos e relações binárias

Um grafo orientado sem arestas múltiplas está associado a uma relação binária definida no conjunto dos seus vértices. As propriedades da relação traduzem-se em propriedades do grafo.

Uma relação binária definida no conjunto X é identificada com um subconjunto Γ do produto cartesiano $X \times X$.

As relações binárias podem ter ou não alguma das seguintes propriedades:

1. reflexiva $\longleftrightarrow \forall x \in X, (x, x) \in \Gamma$
2. simétrica $\longleftrightarrow \forall x, y \in X, (x, y) \in \Gamma \implies (y, x) \in \Gamma$
3. anti-simétrica $\longleftrightarrow \forall x, y \in X, (x, y) \in \Gamma \implies (y, x) \notin \Gamma$
4. anti-simétrica em sentido lato $\longleftrightarrow \forall x, y \in X, (x, y) \in \Gamma \wedge (y, x) \in \Gamma \implies x = y$
5. transitiva $\longleftrightarrow \forall x, y, z \in X, (x, y) \in \Gamma \wedge (y, z) \in \Gamma \implies (x, z) \in \Gamma$

A uma relação reflexiva corresponde um grafo em que todos os vértices têm laços.

A uma relação simétrica corresponde um grafo não orientado

Numa relação anti-simétrica só há arcos de um único sentido e não há laços. Se a relação for anti-simétrica em sentido lato pode ou não haver laços.

16.8.1 Relações de equivalência e componentes fortemente conexas

Uma relação de equivalência satisfaz as propriedades 1, 2 e 5. As classes de equivalência dessa relação vão corresponder às componentes conexas do grafo.

Exemplo 16 *Considere-se a relação binária definida no conjunto $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ através de $\Gamma \subseteq X \times X$ dado por $\Gamma = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 5), (6, 6), (7, 7)\}$. O grafo correspondente a esta relação está representado na figura 13.*

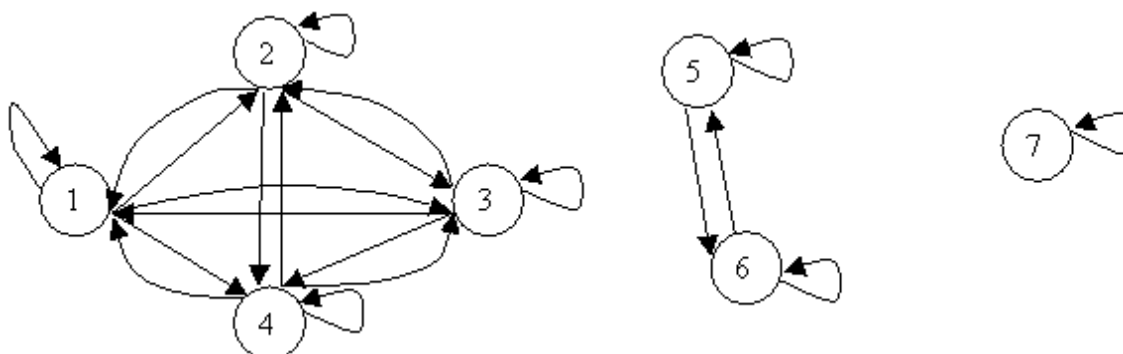


Figura 13: Relação de equivalência

Como todos os vértices têm laços e todos os arcos de ida têm um correspondente arco de volta, convencionou-se representar grafos deste tipo sem os laços e usando arestas em vez de arcos, isto é, usando um grafo não orientado sem laços, como se mostra na figura 14.

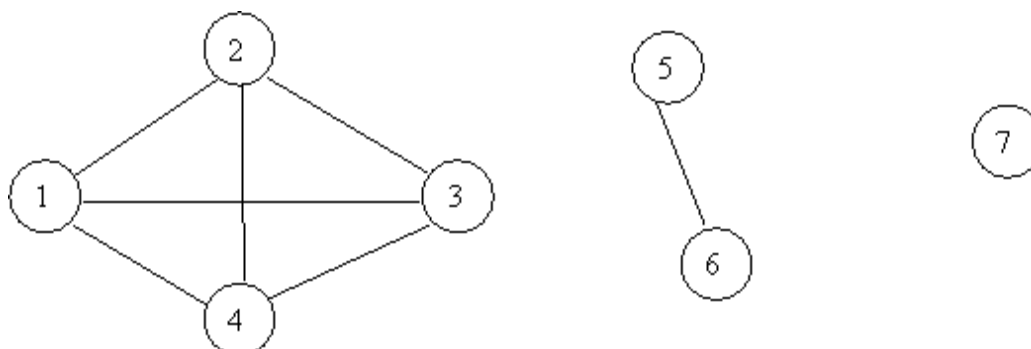


Figura 14: Relação de equivalência

O grafo é formado por componentes conexas, correspondentes às classes de equivalência da relação. Dentro de cada componente cada vértice é adjacente a todos os outros. Quando tal acontece as componentes têm o nome de cliques.

16.8.2 Relações de ordem e grafos

Uma relação de ordem lata satisfaz as propriedades 1, 4 e 5, enquanto uma relação de ordem estrita satisfaz as propriedades 3 e 5.

Quando se representa uma relação de ordem através de um grafo, para simplificar

as notações, convencionou-se que a orientação dos arco é de baixo para cima e não se representam as arestas que decorrem da transitividade.

Exemplo 17 *Considere-se o grafo definido por: $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ e $\Gamma = \{(a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (a, f), (b, d), (b, f), (c, e), (c, f), (d, f)\}$*

Como o vértice a está relacionado com todos os outros deve ser o que fica colocado na parte inferior do desenho. Repare-se que a existência dos pares (a, b) e (b, d) , num relação transitiva, obriga à existência do par (a, d) . Então, para simplificar notações, omite-se o arco correspondente a este último arco, estando subentendida a sua existência. Com estas convenções, o grafo desenha-se como se mostra na figura 15.

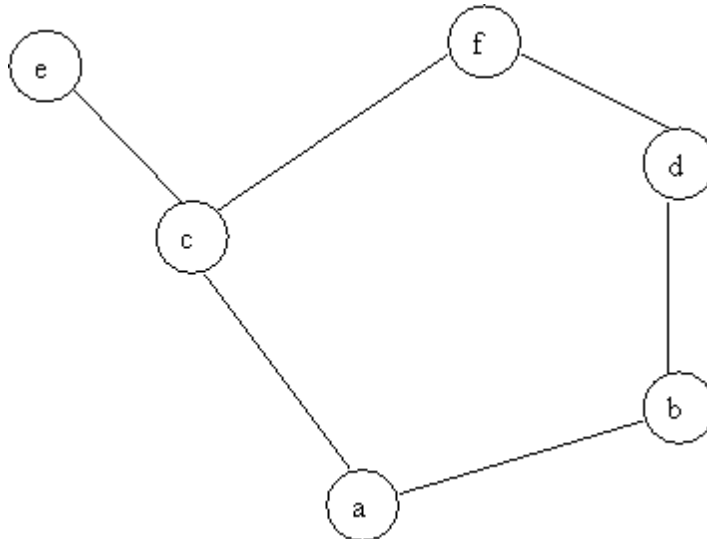


Figura 15: Relação de ordem

Como a orientação dos arcos é de baixo para cima, pode-se dizer que um vértice está relacionado com outro sempre que houver um caminho entre os dois, composto exclusivamente de arcos dirigidos de baixo para cima.

Assim, pode-se concluir que existe o par (a, e) mas não existe o par (b, e) .

Se o grafo de uma relação de ordem é tal que

$$\forall x, y \in X, (x, y) \in \Gamma \vee (y, x) \in \Gamma \vee x = y,$$

isto é, se todos os elementos estão relacionados, a relação diz-se de ordem total. É fácil ver que o grafo correspondente é uma cadeia de baixo para cima.

Diz-se que um conjunto onde está definida uma relação de ordem parcial tem um elemento mínimo z se $\forall x \in X, (z, x) \in \Gamma$. De modo semelhante diz-se que o conjunto tem um elemento máximo w se $\forall x \in X, (x, w) \in \Gamma$. No grafo da figura 15 há um elemento mínimo a , mas não há elemento máximo.

16.9 Grafos completos

Definição 35 *Seja $G = (X, \Gamma)$ um grafo orientado. Se $\forall x, y \in X, (x, y) \notin \Gamma \implies (y, x) \in \Gamma$, o grafo diz-se completo.*

Não se deve confundir este conceito com o de relação anti-simétrica. Num grafo orientado completo a não existência de um arco entre dois vértices implica a existência do arco simétrico desse, enquanto que nas relações anti-simétricas a existência de um arco impede a existência do arco simétrico, mas pode não haver qualquer arco entre dois vértices, quer num sentido quer noutro.

A figura 16 apresenta um exemplo de um grafo orientado completo.

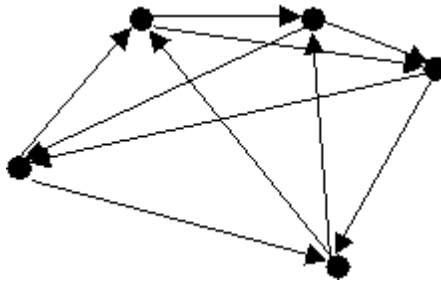


Figura 16: Grafo orientado completo

No caso dos grafos não orientados, os grafos completos são chamados cliques como já se viu. Para cada número de vértices n existe uma única clique que se representa por K_n .

A determinação de subgrafos de um grafo que formem cliques é um problema de grande interesse teórico e que tem inúmeras de aplicações como veremos mais tarde.

Na figura 17 apresenta-se os grafos completos correspondentes a $n = 2, n = 3, n = 4$ e $n = 5$.

De notar que um grafo não orientado completo é regular, isto é, todos os vértices têm o mesmo grau. É, assim, imediato concluir que K_n tem n vértices e $\frac{n \times (n - 1)}{2}$ arestas.

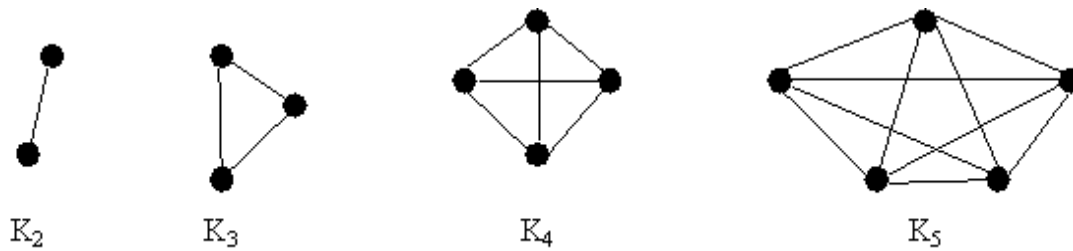


Figura 17: Alguns grafos completos

16.10 Grafos bipartidos

Definição 36 *Se num grafo não orientado for possível encontrar uma partição do conjunto dos vértices $X = Y \cup Z$, ($Y \cap Z = \emptyset$) tal que cada aresta do grafo une um vértice do conjunto Y a um vértice do conjunto Z e não há arestas entre os vértices de Y , nem há arestas entre os vértices de Z , diz-se que o grafo é bipartido. Se todos os vértices de Y estiverem ligadas a todos os vértices de Z o grafo diz-se bipartido completo.*

Os grafos bipartidos completos são completamente determinados pelo número de vértices nos dois conjuntos de índices. Designa-se por $K_{r,s}$ o grafo bipartido completo em que um dos conjuntos de vértices tem r elementos e o outro tem s . Nas figuras 18 e 19 apresentam-se alguns exemplos de grafos bipartidos completos para diferentes valores de r e de s . Para melhor compreensão os vértices de um conjunto são pretos e os do outro conjunto são brancos. Na figura 18 representa-se $K_{2,4}$ de duas maneiras diferentes. O grafo é o mesmo, o que mudou foi a posição relativa dos vértices. Na figura 19 apresentam-se representações de $K_{1,3}$, $K_{2,2}$ e $K_{3,3}$.

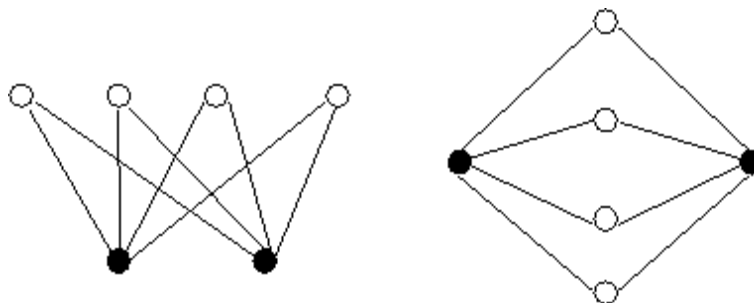


Figura 18: Duas representações de $K_{2,4}$

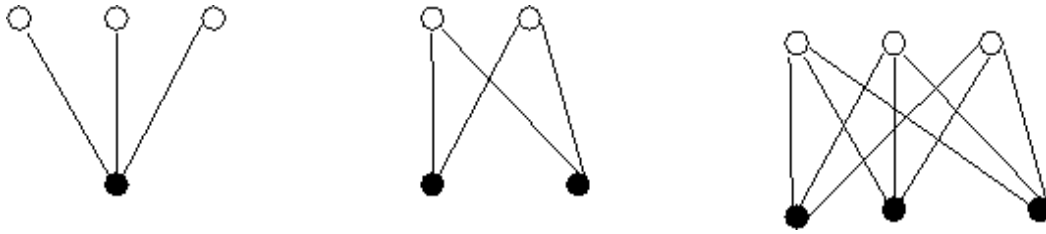


Figura 19: Representações de $K_{1,3}, K_{2,2}, K_{3,3}$

O grafo $K_{r,s}$ tem $r + s$ vértices e $r \times s$ arestas. Cada um dos r vértices do primeiro conjunto tem grau s e cada um dos s vértices do segundo conjunto tem grau r . Note-se também que os grafos $K_{r,s}$ e $K_{s,r}$ são iguais. Por convenção escreve-se sempre primeiro o menor dos valores de s e r .

De modo análogo se pode definir grafo tripartido e grafo tripartido completo, usando agora três conjuntos disjuntos de vértices em lugar de dois.

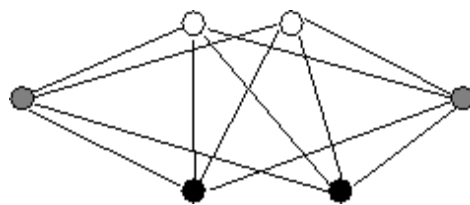
Definição 37 *Se num grafo não orientado for possível encontrar uma partição do conjunto dos vértices $X = Y \cup Z \cup W$, ($Y \cap Z = \emptyset, Y \cap W = \emptyset, W \cap Z = \emptyset$) tal que cada aresta do grafo une um vértice de um dos conjuntos Y, Z ou W a um vértice de outro conjunto e não há arestas entre os vértices de um mesmo conjunto, diz-se que o grafo é tripartido. Se todos os vértices de cada conjunto estiverem ligados a todos os vértices dos outros conjuntos, o grafo diz-se tripartido completo.*

Os grafos tripartidos completos, tal como os bipartidos completos, são completamente determinados pelo número de vértices nos dois conjuntos de índices. Designa-se por $K_{r,s,t}$ o grafo tripartido completo em que um dos conjuntos de vértices tem r elementos, outro tem s elementos e o terceiro tem t elementos. Na figura 20 apresenta-se, a título de exemplo o grafo tripartido completo $K_{2,2,2}$.

16.11 Grafos complementares

Quando uma grafo não é completo é muitas vezes interessante conhecer o grafo que tem as arestas que lhe faltam para ser completo. Surge assim o conceito de grafo complementar.

Definição 38 *Dado o grafo $G = (X, \Gamma)$, chama-se grafo complementar de G e representa-se por \overline{G} o grafo que tem X como conjunto de vértices e $X \times X - \Gamma$ como conjunto de arestas.*

Figura 20: Grafo $K_{2,2,2}$

Exemplo 18 Na figura 21 representa-se um grafo e o seu complementar.

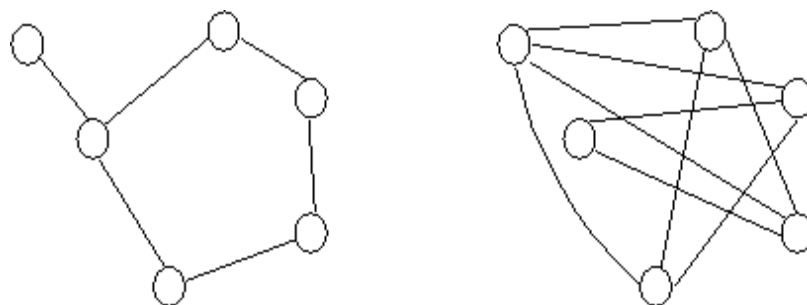


Figura 21: Grafos complementares

Facilmente se constata que o complementar de um grafo completo não tem arestas (todos os vértices têm grau zero) e que o complementar do grafo bipartido completo $K_{r,s}$ é o grafo desconexo composto de duas componentes conexas K_r e K_s .

16.12 Árvores

Um outro tipo de grafos que tem muitas aplicações é conhecido por árvore.

Definição 39 Uma árvore é um grafo não orientado conexo sem circuitos

Definição 40 Uma floresta é um grafo não orientado cujas componentes conexas são árvores.

As árvores têm várias propriedades sendo as mais importantes resumidas no seguinte teorema:

Teorema 19 *Seja $G = (X, \Gamma)$ uma árvore com $n > 2$ vértices. As seguintes proposições são equivalentes:*

- a) G é conexo e não tem circuitos.
- b) G não tem circuitos e tem $n - 1$ arestas.
- c) G é conexo e tem $n - 1$ arestas.
- d) G não tem circuitos e acrescentando uma aresta cria-se um único circuito.
- e) G é conexo e a supressão de uma única aresta torna-o desconexo.
- f) Qualquer que seja o par de vértices de X há um único caminho simples que os une.

Demonstração. $a) \implies b)$

Sendo G conexo e sem circuitos, retirando uma aresta fica não conexo e terá duas componentes conexas. Continuando a retirar arestas, por cada aresta retirada cria-se mais uma componente conexa. Quando se tiverem retirado $n - 1$ arestas obtiveram-se n componentes conexas. Como o grafo tem n vértices, cada componente conexa corresponde a um único vértice e o grafo ficou sem arestas. Então o grafo tinha exactamente $n - 1$ arestas.

$b) \implies c)$

Por absurdo suponha-se que o grafo não era conexo. Existem dois vértices em G tais que não existe nenhum caminho entre eles. Unem-se esses vértices por uma aresta. O novo grafo continua a não ter circuitos, porque se se tivesse criado um circuito era porque havia um caminho entre os dois vértices. Se o grafo continua a não ser conexo repete-se o processo de adicionar arestas até que o grafo fique conexo e continuará sem circuitos. Suponhamos que o processo tinha sido repetido k vezes. Então o novo grafo é conexo e sem circuitos e terá $(n - 1 + k)$ arestas. Mas para não haver circuitos o grafo tem que ter $n - 1$ arestas. Então tem que ser $k = 0$, concluindo-se assim que o grafo original já era conexo.

$c) \implies d)$

Por absurdo, supor que o grafo possui pelo menos um circuito. Retirando uma aresta desse circuito obtém-se um grafo com $n - 2$ arestas, que, como tem n vértices, não poderá ser conexo. Sendo o grafo conexo e sem circuitos, há um caminho entre cada par de vértices, acrescentando uma aresta entre um determinado par de vértices cria-se um circuito formado pelo caminho que já existia e por essa nova aresta.

$d) \implies e)$

Por absurdo supor que o grafo não é conexo. Então, há pelo menos um par de vértices entre os quais não existe qualquer caminho. Acrescentando ao grafo a aresta entre esses dois vértices cria-se um circuito. Mas isso significa que os dois vértices estavam ligados por um caminho. Então o grafo tem que ser conexo.

$e) \implies f)$

Por absurdo, suponha-se que há um par de vértices unidos por mais do que um caminho simples. Então o grafo tem pelo menos um circuito. Suprimindo uma aresta desse circuito o grafo continua a ser conexo, o que contraria o facto de o grafo deixar de ser conexo quando uma aresta é suprimida.

$f) \implies a)$

Se cada par de vértices está unido por um caminho o grafo é conexo. Além disso, como esse caminho é único não pode haver circuitos ■

Teorema 20 *Numa árvore há sempre pelo menos dois vértices de grau 1.*

Demonstração. Seja G um grafo com n vértices e m arestas que é uma árvore. Então $m = n - 1$. Como a soma dos graus dos vértices é o dobro do número de arestas, essa soma é $2n - 2$. Se todos os vértices tivessem grau igual ou superior a 2, essa soma seria igual ou superior a $2n$. Então, pelo menos um dos vértices deve ter grau 1. Se somente um dos vértices tivesse grau 1 e todos os outros grau 2 ou mais, a soma dos graus seria igual ou superior a $2n - 1$. Por isso tem que haver pelo menos dois vértices com grau 1. ■

16.12.1 Árvores de suporte

Um problema muito comum é o de tentar chegar a todos os vértices de um grafo usando o menor número de arestas possível. Ora, para se chegar a todos os vértices de um grafo será necessário usar um grafo parcial conexo e querendo usar o menor número possível de arestas não se deverá ter nenhum circuito, pois haveria aí pelo menos uma aresta desnecessária. Ou seja, deve-se encontrar um grafo parcial do grafo original que seja uma árvore.

Definição 41 *Seja G um grafo. Uma árvore de suporte de G é um grafo parcial de G que é uma árvore.*

Teorema 21 *Um grafo G admite uma árvore de suporte se e só se G é conexo.*

Demonstração. G admite uma árvore de suporte $\implies G$ conexo

Suponhamos que G não é conexo então nenhum dos seus grafos parciais será conexo e, portanto, nenhum deles pode ser uma árvore.

G é conexo $\implies G$ admite uma árvore de suporte

Supondo G conexo procuremos uma aresta em G que possa ser removida sem que o grafo se torne desconexo. Uma de duas situações pode ocorrer:

1. não existe tal aresta;
2. existe tal aresta.

No primeiro caso já encontrámos uma árvore.

No segundo caso removemos a aresta e repetimos o processo até se cair no primeiro caso. ■

Há fundamentalmente dois processos para encontrar uma árvore de suporte para um dado grafo conexo: o destrutivo e o construtivo.

O processo destrutivo baseia-se na demonstração do teorema que garante a existência da árvore de suporte. Começa-se por considerar o grafo inicial. Uma aresta cuja remoção não torna o grafo desconexo tem que pertencer a um circuito. Se não houver nenhum circuito já se tem uma árvore. Caso contrário identifica-se um circuito e retira-se uma aresta. Se não houver mais circuitos termina-se o processo, caso contrário repete-se até não haver mais circuitos.

No processo construtivo vai-se construindo a árvore começando com um vértice do grafo inicial e, em cada passo, escolhe-se uma aresta do grafo que comece num vértice da árvore e termine num vértice que ainda não esteja na árvore, acrescentando-se então esse vértice e essa aresta à árvore. Termina-se quando todos os vértices estiverem na árvore.

Para um mesmo grafo podem existir várias árvores de suporte. Nas figuras 22 e 23 apresenta-se um exemplo de construção de uma árvore de suporte para um mesmo grafo, usando o processo destrutivo e o processo construtivo respectivamente.

Na figura 22 observa-se a sucessão de grafos parciais que se vão obtendo à medida que se vai aplicando o processo destrutivo. Começando por constatar a existência do circuito $A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow A$, retirou-se a aresta $B \longrightarrow C$, em seguida observou-se a existência do circuito $B \longrightarrow D \longrightarrow E \longrightarrow B$ e retirou-se a aresta $E \longrightarrow B$, depois ao circuito $A \longrightarrow D \longrightarrow E \longrightarrow A$ retirou-se a aresta $A \longrightarrow E$ e, finalmente ao circuito $A \longrightarrow B \longrightarrow D \longrightarrow A$ retirou-se a aresta $D \longrightarrow A$. O resultado final é um grafo conexo sem circuitos, ou seja uma árvore, que é um grafo parcial do grafo inicial. Repare-se que para desfazer cada circuito se poderia ter optado por retirar outra aresta que não a escolhida, sendo o resultado final outra árvore de suporte.

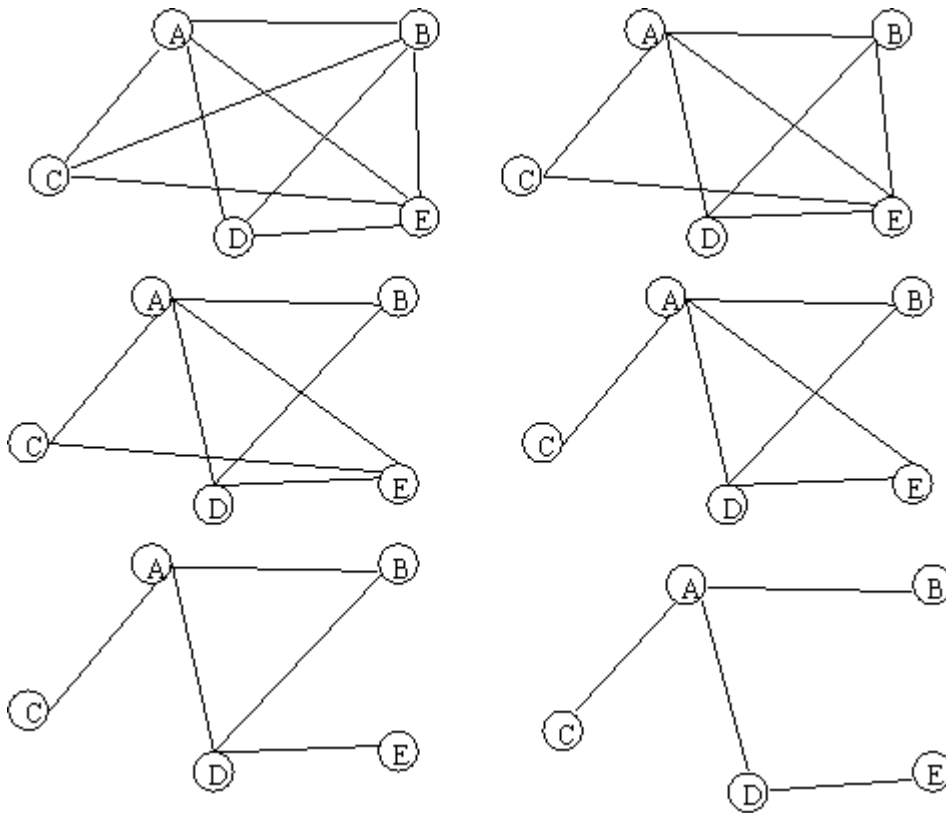


Figura 22: Obtenção de uma árvore de suporte

Na figura 23 demonstra-se a aplicação do método construtivo ao mesmo grafo

16.12.2 Árvore de suporte mínima

Quando associado a cada aresta de um grafo existe um valor que, normalmente, representa o custo de utilização dessa aresta, então a obtenção de uma árvore de suporte tal que a soma dos custos associados às arestas seja mínimo é de particular importância.

A uma tal árvore chama-se árvore de suporte mínima e existem vários algoritmos que permitem a sua obtenção. Tal como acontece com a árvore de suporte a resposta pode não ser única, embora, neste caso, geralmente, o número de opções de escolha é mais reduzido.

Sempre que num grafo há custos associados às arestas, diz-se que estamos perante um grafo valorado. A representação de um tal grafo pode ser feita graficamente escrevendo os valores correspondentes a cada aresta sobre ela, ou através da matriz de adjacência,

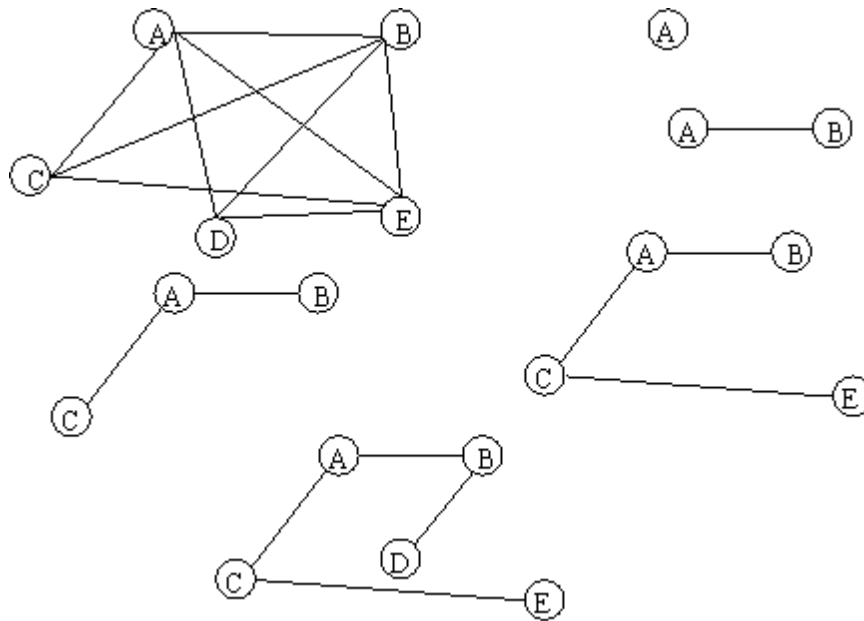


Figura 23: Obtenção de uma árvore de suporte

substituindo a entrada igual a 1 que informa da existência de uma aresta pelo custo que lhe corresponde.

Cronologicamente, o primeiro algoritmo proposto para este efeito, foi o de Kruskal que apareceu em 1928. Trata-se de uma estratégia ávida de escolha das arestas a inserir na árvore. O algoritmo propõe que se comece pela aresta de custo mínimo e que, sequencialmente, se vão inserindo na árvore as arestas com os custos mínimos desde que isso não forme um circuito. Normalmente os algoritmos baseados em estratégias ávidas são heurísticas que podem dar bons resultados, mas que podem não conduzir ao óptimo. Neste caso, consegue-se demonstrar que efectivamente se obtém uma árvore de suporte mínima.

Da maneira como se escolhem as arestas é claro que nunca se formam circuitos. Ao fim de $n - 1$ passos obtém-se um grafo com $n - 1$ arestas, com os n vértices de G e sem circuitos que já se viu ter que ser uma árvore. Chamemos T a essa árvore e designemos o custo associado por $c(T)$. Suponhamos que existe uma outra árvore de suporte S tal que $c(S) < c(T)$. Se S e T são diferentes, há pelo menos uma aresta de T que não está em S . Seja a a aresta de menor peso de T que não está em S . Se inserirmos essa aresta em S é criado um circuito. Nesse circuito deve haver uma aresta a' que não está em T . Pela construção de T o custo associado à aresta a não pode ser maior do que o custo associado a

a' . Substituindo em S a aresta a' por a , obtém-se ainda uma árvore de suporte com custo inferior a S e que tem mais uma aresta em comum com T do que S tinha. O processo pode ser repetido, obtendo-se de cada vez uma árvore de custo inferior ao custo de S com mais uma aresta em comum com T do que a anterior. A certa altura devemos encontrar T . Mas então $c(T) \leq c(S)$, o que contraria a definição de S .

A utilização do algoritmo de Kruskal para grafos de pequena dimensão em cálculos à mão é relativamente simples. Mas já não é adequado para programar, pois a identificação da existência de circuitos a partir da matriz de adjacência não é tarefa fácil. Por isso, o que se utiliza normalmente é uma variante deste algoritmo, o algoritmo de Prim, que difere no processo como se vão escolhendo as arestas a inserir no grafo. Tal como no algoritmo de Kruskal, a árvore é obtida pelo processo construtivo. Define-se o conjunto T , formado pelos vértices que, em cada passo do algoritmo, já foram colocados na árvore. Inicia-se a construção da árvore escolhendo a aresta com custo mínimo. Colocam-se os dois vértices a que essa aresta é incidente no conjunto T . Em cada iteração escolhe-se, entre as arestas que têm um vértice em T e outro em $X - T$, a que tiver custo mínimo. Acrescenta-se essa aresta à árvore e o novo vértice a T e repete-se o processo $n - 1$ vezes. Deste modo garante-se que não se formam circuitos.

Exemplo 19 *Considere-se o grafo valorado cuja matriz de adjacência/custo é:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 8 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 10 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 6 & 0 \\ 3 & 8 & 4 & 6 & 0 & 1 \\ 6 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Considere-se o conjunto dos vértices $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$. Inicialmente é $T = \emptyset$. Escolhe-se uma aresta com custo mínimo para iniciar o processo de construção da árvore. Há várias hipóteses de escolha: (x_1, x_3) ; (x_2, x_3) ; (x_5, x_6) . Pode-se optar por uma destas três. Cada escolha inicial pode, eventualmente, conduzir a uma árvore diferente, mas sempre com o mesmo custo, com veremos. Escolha-se, por exemplo, a aresta inicial (x_1, x_3) . Faz-se $T = \{x_1, x_3\}$. Escolhe-se agora uma aresta, com um vértice em T e o outro em

$X - T$, com custo mínimo: (x_2, x_3) . Agora é $T = \{x_1, x_2, x_3\}$. Repetindo o processo a aresta que deve ser escolhida agora é (x_3, x_6) e fica $T = \{x_1, x_2, x_3, x_6\}$. Agora uma aresta com custo mínimo é (x_6, x_5) e fica $T = \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_6\}$ e, finalmente, escolhe-se a aresta (x_5, x_4) .

O custo total associado à árvore encontrada é: $1 + 1 + 2 + 1 + 6 = 11$.

Em termos de implementação computacional, o trabalho sobre a matriz é facilitado, se, de cada vez que se acrescenta um vértice ao conjunto T se retirar a coluna respectiva da matriz de adjacência.

16.13 Planaridade

Em muitas aplicações de grafos é importante encontrar um posicionamento dos vértices tal que as conexões entre eles, ou seja, as arestas, não se intersectam ou, se tal não for exequível, se intersectem o menor número de vezes possível.

Definição 42 *Um grafo diz-se planar se existir alguma sua representação no plano de tal modo que não haja arestas que se intersectem.*

Repare-se que para o mesmo grafo podem existir representações em que as arestas se cruzem e outras em que não se cruzem. Por isso, não podemos dizer se um grafo não é planar só porque numa determinada representação as arestas se cruzam.

Por exemplo, considere-se o grafo K_4 .

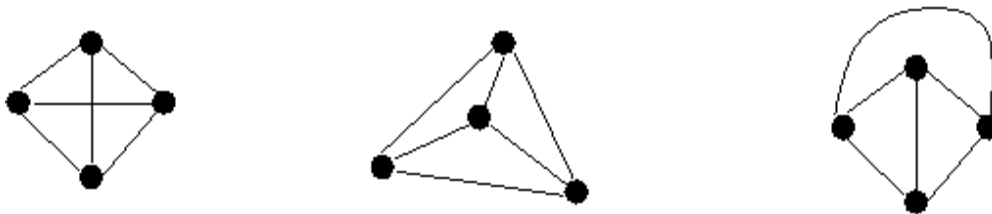


Figura 24: Representações de K_4

Na figura 24 apresentam-se três representações diferentes do mesmo grafo. Enquanto que na primeira as arestas se cruzam nas outras duas já tal não acontece. Repare-se ainda que, enquanto que na segunda representação houve um posicionamento diferente dos vértices no plano, no terceiro caso manteve-se o posicionamento dos vértices e alterou-se o desenho de uma das arestas.

Conclui-se assim que K_4 é um grafo planar.

De um modo geral não é fácil decidir se um grafo é planar. Os teoremas sobre grafos planares dão-nos condições que ajudam a descobrir se um grafo não é planar, mas não nos permitem afirmar se é planar.

Considerando um grafo simples não orientado, as arestas de uma sua representação determinam divisões do plano em que o grafo está representado. A cada uma dessas regiões do plano chama-se face do grafo. Há sempre uma região ilimitada (a que fica "por fora") e a essa chama-se face infinita. Ao número de arestas que limita uma face chama-se grau da face. Como cada aresta delimita exactamente duas faces, é imediato concluir que a soma dos graus das faces é igual ao dobro do número de arestas.

Euler descobriu uma fórmula relacionando o número de vértices n , o número de arestas m e o número de faces f de um grafo conexo planar: $n - m + f = 2$. Infelizmente a fórmula também pode, eventualmente ser válida para algum grafo não planar, pelo que não permite garantir se um grafo é planar. No entanto, se a fórmula não for satisfeita então o grafo não é planar.

Considere-se, por exemplo o grafo K_4 , que como já se viu é um grafo planar. Este grafo tem 4 vértices, 6 arestas e 4 faces. Então: $4 - 6 + 4 = 2$

Teorema 22 *Seja G um grafo conexo e planar com n vértices, m arestas e f faces. Então $n - m + f = 2$.*

Demonstração. A demonstração é feita por indução sobre o número de arestas.

Se um grafo não tem arestas e é conexo, então só tem um vértice e uma face e a fórmula fica $1 - 0 + 1 = 2$.

Por hipótese de indução suponha-se que a fórmula é válida para qualquer grafo com m ou menos arestas.

Seja G um grafo com $m + 1$ arestas, n vértices e f faces. Se G tiver um vértice com grau 1, tira-se esse vértice e a aresta nele incidente. Obtém-se um grafo G' com menos uma aresta e menos um vértice e o mesmo número de faces, uma vez que a retirada de uma aresta incidente num vértice de grau 1 não faz desaparecer nenhuma face. Para o grafo G' é válida a fórmula de Euler, por hipótese de indução: $(n - 1) - m + f = 2$. Então é $n - (m + 1) + f = 2$. Se G não tiver nenhum vértice de grau 1, então G não é uma árvore e, por isso, deve ter pelo menos um circuito. Identifica-se um circuito e retira-se uma das suas arestas. Obtém-se um grafo G' que continua a ser conexo, tem o mesmo número de vértices de G , menos uma aresta e menos uma face, pois ao desfazer o circuito houve duas faces

que se juntaram numa só. Para G' é válida a fórmula de Euler, por hipótese de indução: $n - m + (f - 1) = 2$. Então é válido $n - (m + 1) + f = 2$. ■

A partir da fórmula de Euler podem ser deduzidas outras relações entre o número de vértices e arestas de um grafo planar, que são bastante úteis para descobrir se um grafo não é planar.

Teorema 23 *Seja G um grafo conexo e planar com m arestas e f faces. Então $f \leq \frac{2}{3}m$.*

Demonstração. Já se viu que a soma dos graus das faces é $2m$. Mas, por outro lado, cada face é limitada pelo menos por 3 arestas. Então a soma dos graus das faces é, no mínimo $3f$. Donde $2m \geq 3f$ e, finalmente, $f \leq \frac{2}{3}m$. ■

Teorema 24 *Seja G um grafo conexo e planar com n vértices e m arestas. Então $3n - m \geq 6$.*

Demonstração. Temos, por um lado a fórmula de Euler $n - m + f = 2$ e, por outro lado o resultado $f \leq \frac{2}{3}m$. Substituindo f por $\frac{2}{3}m$ na fórmula de Euler vem $n - m + \frac{2}{3}m \geq 2$. Ou seja $3n - m \geq 6$. ■

Com este resultado podemos concluir que K_5 não é planar. Com efeito neste grafo é $n = 5$ e $m = 10$, donde $3n - m = 3 \times 5 - 10 = 5 < 6$.

Vejam os valores de n que K_n é planar:

$$3n - m = 3n - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{-n^2 + 7n}{2} \geq 6$$

Ora esta relação verifica-se como igualdade para $n = 3$ e para $n = 4$ e não se verifica para mais nenhum valor de n inteiro. Portanto todos os grafos completos K_n com $n \geq 5$ não são planares.

Vejam o que se passa com os grafos bipartidos completos.

Na figura 25 temos uma representação planar de $K_{2,4}$. Facilmente se percebe que qualquer grafo bipartido $K_{2,n}$, para qualquer valor de n é planar.

O que se passa com $K_{3,3}$?

Vejam os: $n = 6, m = 9$ e $3n - m = 3 \times 6 - 9 = 18 - 9 = 9 > 6$. Este resultado não nos permite concluir nada.

Na figura 27 tentamos outra representação.

Parece que não é possível representar $K_{3,3}$ de forma planar.

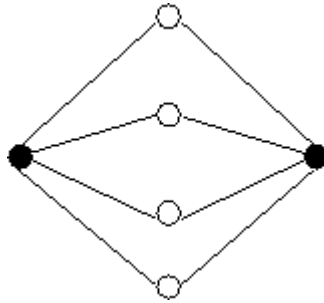


Figura 25: Representação planar de $K_{2,4}$

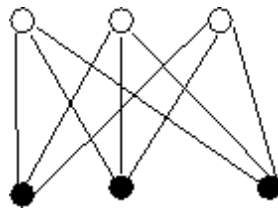


Figura 26: Grafo $K_{3,3}$

Teorema 25 *Seja G um grafo conexo e planar com n vértices e m arestas e sem triângulos (isto é, sem circuitos de comprimento 3). Então $m \leq 2n - 4$.*

Demonstração. Como não há circuitos de comprimento 3, todos os circuitos têm 4 ou mais arestas, ou seja cada face tem grau pelo menos 4, donde a soma dos graus das faces é, no mínimo, $4f$. Então $2m \geq 4f$, ou seja $f \leq \frac{m}{2}$. Da fórmula de Euler vem que $f = m - n + 2$, ou seja $m - n + 2 \leq \frac{m}{2}$ e, finalmente, $m \leq 2n - 4$. ■

Vejamus se este resultado nos ajuda com $K_{3,3}$. Neste grafo não há circuitos com 3 arestas. Temos $n = 6, m = 9$ e $2n - 4 = 2 \cdot 6 - 4 = 12 - 4 = 8 < 9$. Então o grafo não é planar.

Vejamus agora o que se passa com qualquer $K_{s,r}$ com $s \geq 3$ e $r \geq 3$. Neste grafo é $n = r + s$ e $m = r \times s$. São grafos conexos e todos os circuitos têm pelo menos 4 arestas. Se os grafos fossem planares teria que ser $m \leq 2n - 4$, ou seja $r \times s \leq 2 \times (r + s) - 4$. Ora, para $s \geq 3$ e $r \geq 3$ esta desigualdade não se verifica. Conclui-se assim que $K_{s,r}$ com $s \geq 3$ e $r \geq 3$ é não planar.

Vejamus ainda mais um resultado útil para decidir se um grafo não é planar:

Teorema 26 *Seja G um grafo conexo simples e planar com n vértices e m arestas. Então*

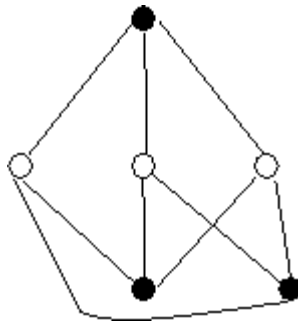


Figura 27: Outra representação de $K_{3,3}$

tem pelo menos um vértice com grau igual ou inferior a 5.

Demonstração. Já mostramos que num grafo nestas condições é válida a desigualdade $3n - m \geq 6$, ou seja $m \leq 3n - 6$. Se todos os vértices tivessem grau 6 ou mais seria $2m \geq 6n$, ou seja $m \geq 3n$. Então, pelo menos um vértice tem que ter grau menor ou igual a 5. ■

Mesmo com todos estes resultados, não é, muitas vezes, fácil determinar se um grafo é ou não planar.

Um dos resultados que mais tem sido utilizado para decidir se um grafo é ou não planar é o teorema de Kuratowski.

Antes de o enunciarmos vamos precisar de mais algumas definições.

Definição 43 Diz-se que um grafo sofreu uma modificação por vértices de grau 2 se se retirou ou acrescentou um vértice de grau 2 entre dois outros vértices. Isto é se, sendo c um vértice de grau 2 adjacente a a e b se retira c unindo a directamente a b , ou, ao contrário, se se insere um vértice c numa aresta entre a e b .

No primeiro caso passa-se de $\circ - \circ - \circ$ para $\circ - \circ$, enquanto que no segundo caso se passa de $\circ - \circ$ para $\circ - \circ - \circ$.

Definição 44 Dois grafos são homeomorfos se um pode ser obtido do outro por modificações de vértices de grau 2.

Teorema 27 (de Kuratowski): Um grafo não é planar se e só se contém um subgrafo homeomorfo a K_5 ou a $K_{3,3}$.

Este teorema foi apresentado pelo matemático polaco Kuratowski em 1930. A sua demonstração é bastante longa e complexa. Tem a virtude de fornecer uma condição necessária e suficiente para a planaridade de um grafo que não é dependente da sua representação gráfica, no entanto na prática o teorema não tem aplicação. Não existe nenhum algoritmo nele baseado para testar a planaridade/não planaridade de um grafo. Na verdade, testar todos os subgrafos e verificar se são homeomorfos a K_5 ou a $K_{3,3}$ não é tarefa exequível em tempo útil.

16.14 Caminhos mais curtos

Para grafos valorados, além de interessar estabelecer a existência de pelo menos um caminho entre dois quaisquer vértices, é, muitas vezes, importante obter o caminho de menor custo. Num grafo valorado chama-se **custo de um caminho** à soma dos valores correspondentes às arestas que o constituem. Se o grafo for de pequena dimensão, bastará fazer uma lista de todos os caminhos possíveis e escolher o de menor custo. Quando a dimensão do grafo é maior este processo é impraticável. Existem vários algoritmos para encontrar um caminho de custo mínimo entre dois quaisquer vértices de um grafo. Descrevemos seguidamente o algoritmo de Dijkstra por ser um dos mais simples de aplicar, que funciona tanto para grafos orientados como não orientados e que também se presta a uma fácil implementação computacional. Este algoritmo, proposto por Dijkstra em 1959, baseia-se no princípio de que o caminho mais curto entre dois vértices contém o caminho mais curto entre cada par de vértices intermédios. Vamos descrever o algoritmo determinando o caminho mais curto entre os vértices a e h do grafo orientado da figura 28.

Partindo do vértice a , em cada passo do algoritmo determina-se o caminho mais curto entre esse vértice e um outro vértice do grafo que fica no caminho para h . O algoritmo termina quando se consegue atingir h . Vamos definir dois conjuntos de vértices S e T do seguinte modo: S é o conjunto dos vértices para onde já se sabe qual é o caminho mais curto e T é o conjunto dos outros vértices. Inicialmente é $S = \{a\}$ e $T = \{b, c, d, e, f, g, h\}$, pois o caminho mais curto entre a e a é obviamente de comprimento nulo. Em cada iteração vamos tirar um vértice de T e inseri-lo em S . Com esse objectivo construímos uma tabela em que se indicam as distâncias mínimas já determinadas para os vértices de S e as distâncias estimadas para os vértices de T para onde se pode ir directamente a partir dos vértices de S , para os vértices de T aos quais não seja possível chegar directamente a partir dos vértices de S consideramos que a distância estimada é ∞ . A coluna "antecedente" permitirá, como veremos construir o caminho mais curto depois de sabermos qual o valor

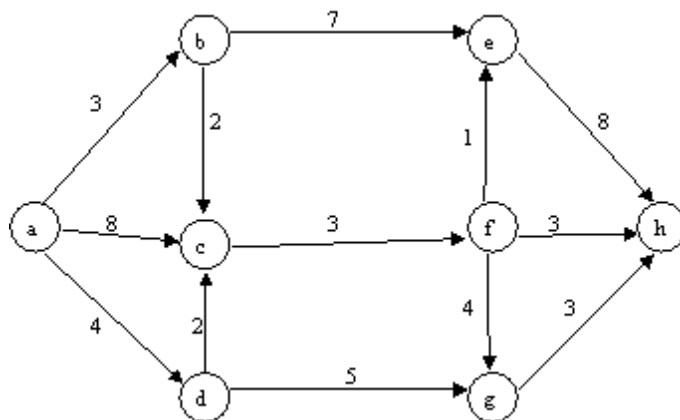


Figura 28: Determinar o caminho mais curto

que lhe corresponde. Inicialmente temos a seguinte tabela:

Vértice	Distância mínima	Distância estimada	Antecedente
<i>a</i>	0	—	—
<i>b</i>	—	3	<i>a</i>
<i>c</i>	—	8	<i>a</i>
<i>d</i>	—	4	<i>a</i>
<i>e</i>	—	∞	—
<i>f</i>	—	∞	—
<i>g</i>	—	∞	—
<i>h</i>	—	∞	—

Observando a coluna "distância estimada", vemos que o menor valor é 3 e corresponde ao vértice *b*. Então o caminho mais curto entre o vértice *a* e o vértice *b* é 3 e já podemos passar o vértice *b* para o conjunto *T*. A partir do vértice *b* pode-se ir para *c* e *e*. O caminho de *a* a *b* tem comprimento 3 e de *b* a *c* comprimento 2, logo o caminho de *a* a *c* passando por *b* tem comprimento 5 que é menor do que o valor 8 antes estimado. Actualizamos esse valor e mudamos o antecedente de *c* de *a* para *b*. A distância estimada para *e* passa a ser

10, com antecedente b . Temos assim novos conjuntos $S = \{a, b\}$ e $T = \{c, d, e, f, g, h\}$ e a nova tabela:

Vértice	Distância mínima	Distância estimada	Antecedente
a	0	—	—
b	3	—	a
c	—	5	b
d	—	4	a
e	—	10	b
f	—	∞	—
g	—	∞	—
h	—	∞	—

Neste momento a menor distância estimada é 4 para o vértice d . Passamos o vértice d do conjunto T para o conjunto S ($S = \{a, b, d\}$ e $T = \{c, e, f, g, h\}$) e actualizamos os valores da tabela tendo em atenção os vértices para onde se pode ir directamente a partir de d . Repare-se que de d para c a distância é 2, que somados à distância 4 até d daria uma distância 6 para c , valor superior ao 5 anteriormente estimado, pelo que não se considera esse caminho.

Vértice	Distância mínima	Distância estimada	Antecedente
a	0	–	–
b	3	–	a
c	–	5	b
d	4	–	a
e	–	10	b
f	–	∞	–
g	–	9	d
h	–	∞	–

A distância estimada mínima neste momento é 5 para c . Então o vértice c passa para o conjunto S ($S = \{a, b, c, d\}$ e $T = \{e, f, g, h\}$) e repete-se tudo de novo.

Vértice	Distância mínima	Distância estimada	Antecedente
a	0	–	–
b	3	–	a
c	5	–	b
d	4	–	a
e	–	10	b
f	–	8	c
g	–	9	d
h	–	∞	–

Passa-se f de T para S : $S = \{a, b, c, d, f\}$ e $T = \{e, g, h\}$. De f pode-se ir para e , g e h . Para e a distância estimada passa a ser $9 = 8 + 1 < 10$ e actualiza-se o antecedente de

e para f . Para g a distância seria $8 + 4 = 12 > 9$ pelo que não se considera e para h temos agora a distância estimada $8 + 3 = 11$. Temos assim o novo quadro:

Vértice	Distância mínima	Distância estimada	Antecedente
a	0	–	–
b	3	–	a
c	5	–	b
d	4	–	a
e	–	9	f
f	8	–	c
g	–	9	d
h	–	11	f

No passo seguinte tanto podemos escolher e como g , uma vez que correspondem ambos à distância estimada mínima. Vamos escolher e : $S = \{a, b, c, d, e, f\}$ e $T = \{g, h\}$. De e só é possível chegar a h com a distância $9 + 8 = 17 > 11$. Seguidamente escolhemos g : $S = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ e $T = \{h\}$. De g também só se pode ir para h com a distância $9 + 3 = 12 > 11$. Finalmente, a menor distância estimada corresponde ao vértice h com o valor 11: $S = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ e $T = \phi$. Temos o quadro final

Vértice	Distância mínima	Distância estimada	Antecedente
a	0	–	–
b	3	–	a
c	5	–	b
d	4	–	a
e	9	–	f
f	8	–	c
g	9	–	d
h	11	–	f

Concluimos assim que o comprimento do caminho mais curto entre os vértices a e h é 11. Para saber qual o caminho temos que analisar a coluna dos antecedentes. O antecedente de h é f , o antecedente de f é c , o antecedente de c é b e o antecedente de b é a . Temos assim o caminho $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow f \rightarrow h$.