

1. Dê um exemplo de uma relação que seja:
 - (a) reflexiva, simétrica e não transitiva;
 - (b) reflexiva, transitiva e não simétrica;
 - (c) simétrica, transitiva e não reflexiva.
2. Verifique se as seguintes relações sobre inteiros são reflexivas, simétricas e/ou transitivas.

(a) $(x, y) \in R \iff x \neq y$

(b) $(x, y) \in S \iff |x - y| = 1$

(c) $(x, y) \in T \iff x \equiv y \pmod{7}$

(d) $(x, y) \in R \iff x = y^2$

(e) $(x, y) \in Q \iff xy > 0$

3. Qual o erro da seguinte "demonstração" de que toda a relação simétrica e transitiva sobre um conjunto A é também reflexiva:

Para $a \in A$, seja b tal que $(a, b) \in R$.

Como R é simétrica, $(b, a) \in R$ e como R é transitiva $(a, a) \in R$. Donde se conclui que, para todo o $a \in A$, se tem $(a, a) \in R$.

4. Qual a menor (com menor número de pares) relação de equivalência sobre $A = \{a, b, c, d, e\}$ que contém (a, b) , (a, c) e (d, e) ?
5. Mostre que $\{((a, b), (c, d)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2 : ad = bc\}$ é uma relação de equivalência em \mathbb{N}^2 .
6. Sejam R e S duas relações binárias sobre um conjunto A .

Define-se $R \circ S = \{(a, c) \in A \times A : \exists b \in A : (a, b) \in S \wedge (b, c) \in R\}$.

Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 4), (3, 5), (4, 2), (4, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 4)\}$$

Encontre: R^2 (ou seja $R \circ R$), R^3 (ou seja $R^2 \circ R$), R^4 e R^5 .

7. Seja A um conjunto de pessoas. Definam-se em A as relações binárias:

aRb se e só se b "é pai de" a .

aSb se e só se b "é irmão de" a .

aTb se e só se b "é marido de" a .

Qual o grau de parentesco entre a e b se:

(a) $aR \circ Sb$

(b) $aT \circ Rb$

(c) $aT \circ Sb$.

(d) $aS \circ Rb$

(e) $aR \circ Tb$

(f) $aR \circ T \circ Sb$.

8. Sejam A um conjunto e R, S relações binárias em A . Mostre que:

(a) Se R é reflexiva então R é transitiva sse $R^2 = R$.

(b) Se R é simétrica então, para todo o $n \in \mathbb{N}$, a relação R^n é simétrica.

(c) Se R e S são relações de equivalência então $R \circ S$ é uma relação de equivalência sse $R \circ S = S \circ R$.

(d) R é uma relação de equivalência se e só se R é reflexiva e para quaisquer $a, b, c \in A$, se $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$, então $(c, a) \in R$.

9. Seja A um conjunto e R uma relação binária em A . Diz-se que R é uma relação irreflexiva se para todo o $a \in A$, se tem $(a, a) \notin R$.

Se R é irreflexiva, R^2 será necessariamente irreflexiva ?

10. Seja A um conjunto e T uma relação binária em A . Mostre que são equivalentes:

$$\forall x, y \in A, [x \neq y \implies ((x, y) \in T \implies (y, x) \notin T)]$$

e

$$\forall x, y \in A, [(x, y) \in T \wedge (y, x) \in T \implies x = y].$$

11. Seja A um conjunto. Mostre que:

(a) Se B é um conjunto e $f : A \longrightarrow B$ é uma função então

$$\{(a, b) \in A^2 : f(a) = f(b)\}$$

é uma relação de equivalência em A .

(b) Se R é uma relação de equivalência em A então existem um conjunto B e uma função $f : A \longrightarrow B$ tais que $R = \{(a, b) \in A^2 : f(a) = f(b)\}$.

12. Seja A um conjunto e R uma relação binária em A . Diz-se que (A, R) é um conjunto parcialmente ordenado (c.p.o.) se R é uma ordem parcial em A , isto é se:

$$\forall x, y \in A, [(x, y) \in R \wedge (y, x) \in R] \implies x = y.$$

$$\forall x, y, z \in A, [(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R] \implies (x, z) \in R.$$

Verifique que $(\mathbb{N}, |)$, (\mathbb{R}, \leq) , $(P(X), \subseteq)$ onde $P(X)$ representa o conjunto das partes do conjunto X , são conjuntos parcialmente ordenados.

Verifique se o conjunto dos inteiros, \mathbb{Z} , com a relação "divide" é ou não um c.p.o.

(Normalmente representa-se uma ordem parcial num conjunto A por \leq .)

13. Verifique se \mathbb{R}^2 com a seguinte relação binária \leq :

$$(a, b) \leq (x, y) \iff a < x \vee (a = x \wedge b \leq y) \text{ é um c.p.o.}$$

14. Seja (A, \leq) um c.p.o. e a, b elementos distintos de A .

Diz-se que a e b são incomparáveis se $a \not\leq b$ e $b \not\leq a$.

Diz-se que b cobre a (ou que a é coberto por b) se $a \leq b$ e, se $a \leq c$ e $c \leq b$ então $c = a$ ou $c = b$.

O conjunto dos elementos que cobrem a denomina-se cobertura de a .

Considere o c.p.o. $(\mathbb{N}, |)$

(a) Dê exemplos de elementos que são incomparáveis.

(b) Dê exemplos de elementos que cobrem o elemento 2.

(c) Dê exemplos de elementos cobertos pelo elemento 15.

15. Considere o c.p.o. (\mathbb{R}, \leq)

- (a) Verifique se existem elementos incomparáveis.
- (b) Seja $x \in \mathbb{R}$. Quantos elementos tem a cobertura de x ?

16. Considere o c.p.o. $(P(\{1, 2, 3\}), \subseteq)$

- (a) Dê exemplos de elementos que são incomparáveis.
- (b) O elemento $\{1, 2\}$ pertence à cobertura de que elementos?

17. Seja (A, \leq) um c.p.o., s e m elementos de A e X um subconjunto de A .

Diz-se que m é majorante de X se $\forall x \in X, x \leq m$

Diz-se que s é supremo de X se s é majorante de X e para todo o majorante b de X se tem $s \leq b$.

Considere-se em \mathbb{N}^2 a seguinte relação binária R :

$(x, y)R(z, w) \iff x$ divide z e y divide w .

- (a) Mostre que o (\mathbb{N}^2, R) é um c.p.o.
- (b) Determine, caso existam, o supremo de $\{(6, 2), (4, 3)\}$ e de $\{(2, 7), (5, 9), (4, 6)\}$

18. Sejam os conjuntos

$$A = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ é divisor de } 75\}$$

e

$$B = \{\{2\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{2, 4, 5\}, \{2, 4, 5, 6\}, \{2, 4, 5, 8\}\}$$

- (a) Verifique que $(A, |)$ e (B, \subseteq) são ordens parciais.
- (b) Indique os majorantes e o supremo de $X = \{5, 3\}$.
- (c) É verdadeira ou falsa a afirmação: Se $x, y \in B$ são elementos não comparáveis, então não existe supremo de $\{x, y\}$.