1. Diga quais das seguintes proposições são verdadeiras:

   (a) $\{\{1,2\},\{3,4\}\} = \{1,2,3,4\}$

   (b) $\{1,2\} \in \{\{1,2\}\}$

   (c) $\{1,2\} \subset \{\{1,2\}\}$

   (d) $\{a\} \subset \{b,\{a\}\}$

   (e) $\{a\} \in \{b,\{a\}\}$

   (f) $\phi = \{\phi\}$

   (g) $\phi \in \{\phi\}$

   (h) $\phi \subset \{\phi\}$

   (i) $\{1,2,2,3,3\} = \{1,2,3\}$

   (j) $\{1,2,3\} \in \{1,2,2,3,3\}$

   (k) $\phi \in \phi$

   (l) $\phi \subset \phi$.

2. Sejam $U = \{2,1,2\}$, $G = \{1,2,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$.

   (a) $U \subset G$? Justifique

   (b) $U \in G$? Justifique.

3. Estabeleça entre cada um dos conjuntos ou elementos $U = \{1,2,3,4\}, V = \{1,4,5\}$, $W = 2, X = \{3,\phi\}, Y = \phi, Z = \{\{1\},2,\{3\},4\}$, relações de "$\subset$ " e/ou "$\in$ ", sempre que possível. Justifique.

4. Considere os conjuntos A formado pelos alunos da FCT, T formado pelas turmas existentes na FCT. Sendo n o número total de turmas, seja $I = \{i \in \mathbb{N} : i \leq \ n\}$. Designamos cada turma por P_i , $i \in I$. Diga quais das seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas, para $i \in I$:

   (a) $Pi \in T$

   (b) $Pi \subseteq T$

   (c) $P_i \in A$.

(d) $P_i \subseteq A$

(e) $P_i \in A \cup T$

(f) $P_i \subseteq A \cup T$.

5. Defina o conjunto $\mathbb{R} - A$, onde A é definido do seguinte modo:

   (a) $A = \{x \in \mathbb{R} : |x+5| \geq 4 \wedge x \leq 0\}$

   (b) $A = \{x \in \mathbb{R} : 6x+9 < 0 \vee 2x \geq 4\}$

   (c) $A = \{x \in \mathbb{R} : 6x+9 < 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 6x+9 \geq 0\}$

   (d) $A = \{x \in \mathbb{R} : |x-7| = 4\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 7x-5 \geq 4\}$

6. Sejam A, B, C e D conjuntos. Mostre que:

   (a) $A \cup B = B \cup A$ e $A \cap B = B \cap A$.

   (b) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ e $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

   (c) $A \subseteq A \cup B$ e $B \subseteq A \cup B$.

   (d) $A \cap B \subseteq A$ e $A \cap B \subseteq B$.

   (e) se $A \subseteq B$ e $A \subseteq C$ então $A \subseteq B \cap C$.

   (f) $A \subseteq B \Longleftrightarrow (A \cup B = B)$ e $A \subseteq B \Longleftrightarrow (A \cap B = A)$.

   (g) O conjunto vazio é único

   (h) $\phi \cup A = A$ e $\phi \cap A = \phi$.

   (i) $A \cup A = A$ e $A \cap A = A$.

   (j) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

   (k) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

   (l) se $B \subseteq A$ e $C \subseteq A$ então $B \cup C \subseteq A$.

   (m) se $A \subseteq B$ então $A \cup C \subseteq B \cup C$.

   (n) se $A \subseteq B$ então $A \cap C \subseteq B \cap C$.

   (o) $\phi \times A = A \times \phi = \phi$.

   (p) $C \subseteq A, D \subseteq B \Longleftrightarrow C \times D \subseteq A \times B$.

   (q) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

(r) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

7. Considere a seguinte colecção de conjuntos: $T_i = \{n \in \mathbb{N} : n \leq \ i\}$, para $i \in \mathbb{N}$.

   (a) Mostre que $T_i \subseteq T_j \iff i \leq j, \forall i, j \in \mathbb{N}$

   (b) Determine $\bigcup_{i=1}^{10} T_i$ e $\bigcap_{i=1}^{10} T_i$.

   (c) Determine $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} T_i$ e $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} T_i$.

8. De trinta e cinco candidatos a uma vaga de programador, vinte e cinco sabem FORTRAN, vinte e oito sabem Pascal e dois não sabem nenhuma delas. Quantos sabem as duas linguagens ?

9. Um total de sessenta clientes potenciais foi a uma loja de equipamento informático. Deles cinquenta e dois fizeram compras: vinte compraram papel; trinta e seis compraram CDs; quinze compraram tinteiros de impressora; seis compraram simultaneamente papel e CDs; nove compraram simultaneamente CDs e tinteiros; cinco compraram simultaneamente papel e tinteiros. Quantos compraram os três artigos?

10. Um vendedor de praia tem cinco qualidades diferentes de sanduíches (fiambre, queijo, presunto, carne assada e mistas) e três qualidades diferentes de bebidas (sumo de laranja, cerveja e café). Quantos menus diferentes pode ele oferecer, compostos de uma bebida e de uma sanduíche?

11. É possível ir de Braga ao Porto de comboio ou de autocarro. Do Porto para Lisboa pode-se ir de comboio, autocarro ou avião e de Lisboa para o Funchal pode-se ir de avião ou barco. Quantos itinerários distintos se podem escolher para ir de Braga ao Funchal passando por Lisboa?

12. Num festa havia quarenta e cinco raparigas. Destas, vinte beberam água, dezoito beberam cerveja, quinze beberam sumo de laranja, nove beberam água e sumo de laranja, sete beberam água e cerveja, seis beberam sumo de laranja e cerveja e três beberam as três bebidas. Quantas não beberam?

13. Sejam A, B e C conjuntos. Mostre que

    (a) $A \subseteq B$ sse $A - B = \phi$

(b) Se $A \subseteq B$ então $\overline{B} \subseteq \overline{A}$

(c) $A = B$ sse $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = \phi$

(d) $A - (A - B) = A \cap B$

14. Sejam A, B e C conjuntos. Verifique se são verdadeiras ou falsas as seguintes propriedades:

    (a) Se $A - B = A - C$ então $B = C$

    (b) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

    (c) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - C$

    (d) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

15. Determine $P(\{a\}), P(\phi), P(\{\phi\})$ e $P(P(\phi))$.

    ($P(X)$ representa partes do conjunto X).

16. Prove que, para quaisquer conjuntos A e B, se tem:

    (a) $A \subseteq B \Longrightarrow P(A) \subseteq P(B)$.

    (b) $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$.

    (c) $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$. Em que condições se tem a igualdade?

17. Considere os seguintes conjuntos: $A = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] : a_0 + a_2 = 0\}$ e $B = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] : a_0 + a_1 = 0\}$

    (a) verifique se $p(x) = 1 + 2x - x^2 \in A \cap B$.

    (b) verifique se $h(x) = 1 - x - x^2 \in A \cap B$.

    (c) determine $A \cap B$.

18. Mostre que:

    (a) Se A e B são conjuntos finitos então $A \cup B$ é finito.

    (b) Se A e B são conjuntos finitos então $A \times B$ é finito.

    (c) Se A e B são conjuntos finitos então $\{f : f$ é aplicação de A em $B\}$ é finito.

19. Mostrar que:

    (a) Se A é um conjunto numerável então $\{B \subseteq A : B \text{ é finito}\}$ é numerável.

    (b) Se A é um conjunto numerável então $P(A)$ não é numerável.

    (c) Se A é um conjunto numerável então $\{B \subseteq A : B \text{ é infinito}\}$ não é numerável.

20. Seja A um conjunto infinito. Mostre que A é numerável se e só se, para cada parte infinita X de A, se tem $A \backsim X$.

21. São verdadeiras ou falsas as afirmações:

    (a) Se A, B, C são conjuntos tais que $C \neq \phi$ e $A \times C \backsim B \times C$, então $A \backsim B$.

    (b) Se A e B são conjuntos tais que $A \cup B$ é numerável, então A é numerável ou B é numerável.

    (c) Se A, B, C são conjuntos tais que $A \cap C \backsim B \cap C$ e $C \neq \phi$, então $A \backsim B$.

    (d) Sejam A um conjunto e $x \in A$. Se A é infinito então $A \cup \{x\} \backsim A$.

22. Define-se diferença simétrica entre os conjuntos A e B por $A \triangle B = (A-B) \cup (B-A)$. Mostre que:

    (a) $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$

    (b) Se $A \triangle B = \phi$ então $A = B$

    (c) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$

    (d) $A \triangle B = B \triangle A$

    (e) $A \triangle A = \phi$