1. Verificar que um número do sistema decimal:

   (a) $a_n a_{(n-1)} ... a_2 a_1 a_0$ é divisível por 2 se e só se $a_0$ é múltiplo de 2
   (b) é divisível por 3 se e só se $a_n + a_{(n-1)} + ... + a_2 + a_1 + a_0$ é múltiplo de 3
   (c) é divisível por 4 se e só se $2a_1 + a_0$ é múltiplo de 4
   (d) é divisível por 5 se e só se $a_0$ é múltiplo de 5
   (e) é divisível por 9 se e só se $a_n + a_{(n-1)} + ... + a_2 + a_1 + a_0$ é múltiplo de 9
   (f) é divisível por 11 se e só se $(a_0 + a_2 + a_4 + a_6 + ...) - (a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + ...)$ é múltiplo de 11

2. Determinar o valor do algarismo $x$ para o qual

   (a) o número $7xx5xx_{(10)}$ é divisível por 2, por 3 e por 9
   (b) o número $2x3x2_{(10)}$ é divisível por 4 e por 11

3. Determinar os algarismos $x$ e $y$ para os quais

   (a) $2x45y$ é divisível por setenta e dois
   (b) $2x7y0$ é divisível por 4, por 9 e por 11
   (c) $3x6y$ é divisível por 22 e não é divisível por 4

4. Sabendo que o número $2x5yz_{(10)}$ é superior a 2800, é divisível por 8 e dividido por 9 dá resto 4, determinar os algarismos $x$, $y$ e $z$.

5. Determinar um número de quatro algarismos que verifique (indique as diferentes soluções do problema, caso haja mais do que uma):

   (a) é divisível por cento e quarenta e sete, termina em nove e é um quadrado perfeito
   (b) é divisível por três e por cinco e tem o seu terceiro algarismo igual ao segundo e o primeiro igual ao quarto

6. Considere-se um número formado por $n$ algarismos consecutivos decrescentes. Provar que quaisquer que sejam os algarismos que constituem o número, a diferença entre este número e o número formado pelos mesmos algarismos escritos em ordem inversa é constante, para $1 \leq n \leq 9$.

7. Verificar que um número do sistema de numeração de base oito, $(a_n a_{(n-1)} ... a_2 a_1 a_0)_{(8)}$

   (a) é divisível por 2 sse $a_0$ é múltiplo de 2
   (b) é divisível por 3 sse $a_0 + 2a_1 + a_2 + 2a_3 + a_4 + \cdots$ é múltiplo de 3
   (c) é divisível por 4 sse $a_0$ é múltiplo de 2
   (d) é divisível por 5 sse $a_0 + 3a_1 + 4a_2 + 2a_3 + a_4 + 3a_5 + 4a_6 + 2a_7 + \cdots$ é múltiplo de 5
   (e) é divisível por 6 sse $a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 2a_3 + 4a_4 + 2a_5 + 4a_6 + \cdots$ é múltiplo de 6
   (f) é divisível por 7 sse $a_n + a_{(n-1)} + ... + a_2 + a_1 + a_0$ é múltiplo de 7

8. Encontrar algarismos $x$ e $y$ de modo que

   (a) $1x1y_{(8)}$ seja múltiplo de $5_{(8)}$ e de $11_{(8)}$
   (b) $xy4_{(8)}$ seja divisível por $5_{(8)}$ e por $3_{(8)}$
   (c) $x43y_{(8)}$ seja múltiplo de $7_{(8)}$ e de $6_{(8)}$

9. Verificar que um número do sistema de numeração de base doze, $(a_n a_{(n-1)} ... a_2 a_1 a_0)_{(12)}$
   (a) é divisível por 2 sse $a_0$ é múltiplo de 2
   (b) é divisível por 3 sse $a_0$ é múltiplo de 3
   (c) é divisível por 4 sse $a_0$ é múltiplo de 4
   (d) é divisível por 5 sse $a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 3a_3 + a_4 + 2a_5 + 4a_6 + 3a_7 + ...$ é múltiplo de 5
   (e) é divisível por 6 sse $a_0$ é múltiplo de 6
   (f) é divisível por 8 sse $a_0 + 4a_1$ é múltiplo de 8
   (g) é divisível por 9 sse $a_0 + 3a_1$ é múltiplo de 9
   (h) é divisível por $B_{(12)}$ sse $a_n + a_{(n-1)} + ... + a_2 + a_1 + a_0$ é múltiplo de $B_{(12)}$
10. Encontrar
    (a) um número de quatro algarismos $xxyy_{(12)}$ que seja múltiplo de $A_{(12)}$, de $B_{(12)}$ e de $4_{(12)}$
    (b) algarismos $x$ e $y$ de modo que $x6y_{(12)}$ seja múltiplo de $290_{(12)}$
    (c) todos os números de dois algarismos na base 12 que são divisíveis por $39_{(12)}$
11. Mostrar que se a soma de dois números é divisível por dois também o é a sua diferença.
12. Calcular o resto da divisão de:
    (a) $2357 \times 1036 + 499$ por 11
    (b) $37^8$ por 11
    (c) $13^2$, $13^3$ e $13^5$ por 7
    (d) $935^{230} \times 258^{33}$ por 4
13. Calcular o algarismo das unidades de.
    (a) $572^{42}$
    (b) $246^{10} \times 38^{13}$
    (c) $935^{230} \times 258^{33}$
14. Mostrar que $2222^{5555} + 5555^{2222}$ é divisível por sete.
15. Mostrar que o produto de dois números pares consecutivos é um múltiplo de 8.
16. Mostrar que
    (a) a soma de três números inteiros consecutivos é divisível por três
    (b) a soma de cinco números inteiros consecutivos é múltipla de cinco
    (c) a soma de $2n + 1$ números inteiros consecutivos é divisível por $2n + 1$
17. Mostrar que:
    (a) O produto de três inteiros consecutivos é um múltiplo de seis.
    (b) O produto de quatro inteiros consecutivos é múltiplo de vinte e quatro.
    (c) O produto de cinco números inteiros consecutivos é divisível por 120

18. Mostrar que:
    (a) O quadrado de qualquer inteiro é da forma $3k$ ou $3k+1$.
    (b) O cubo de qualquer inteiro é de forma $9k$, $9k+1$ ou $9k+8$.
    (c) A quarta potência de qualquer inteiro é da forma $5k$ ou $5k+1$.

19. Mostrar que:
    (a) Um número é divisível por quatro se e só se for a soma de dois números ímpares consecutivos
    (b) O produto de quatro números inteiros consecutivos não pode ser um quadrado perfeito
    (c) se a diferença dos quadrados de dois números é um número primo, os números são primos entre si
    (d) $n^3 - n$ é um múltiplo de 3, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$

20. Determinar:
    (a) todos os valores que pode ter o divisor, sabendo que o dividendo é 255 e o resto 15
    (b) o quociente de uma determinada divisão, sabendo que aumentando 52 unidades ao dividendo e 4 unidades ao divisor, o quociente e o resto ficam os mesmos.
    (c) todos os números que divididos por 21 dão resto igual ao quadrado do quociente

21. Determinar os números que
    (a) divididos por onze dão um quociente igual ao resto
    (b) divididos por catorze dão o resto igual ao triplo do quociente
    (c) divididos por vinte e cinco dão o resto igual ao cubo do quociente

22. Mostrar que o quociente inteiro de um número inteiro $N$ por um produto de números inteiros $A \times B \times C$ pode obter-se dividindo $N$ por $A$, depois o quociente por $B$ e o último quociente por $C$.

23. Quais são os restos que se podem obter dividindo o quadrado de um número por sete?

24. Verificar, pela decomposição em factores primos, se o número 5320 é divisível por 280 e se 2604 é divisível por 396.

25. Seja $x = 2^3 \times 5^2 \times 17$ e $y = 2^5 \times 3 \times 7^2$. Qual o menor número pelo qual se deve multiplicar $x$ para se obter um número divisível por $y$?

26. Mostrar que o número de divisores positivos de um número da forma $p^a$, com $p$ um número primo, é $a+1$. Se $s = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$, com $p_1, p_2, p_3, ..., p_k$ primos distintos então o número de divisores positivos de $s$ é $(a_1+1) \times (a_2+1) \times (a_3+1) \times \cdots \times (a_k+1)$.

27. Determinar:
    (a) o número de divisores de $9 \times 12 \times 24$
    (b) o menor número que admite nove divisores
    (c) o menor número que admite trinta e seis divisores
    (d) o número que é da forma $3 \times 10^x$ e tem dezoito divisores
    (e) o menor número pelo qual se deve multiplicar trinta e seis para que o produto tenha quinze divisores
    (f) todos os números com dez divisores que admitem apenas os divisores primos dois e três

   (g) todos os números que têm trinta divisores e são divisíveis por três, cinco e sete, não o sendo por nenhum outro primo

28. Um dado número admite como factores primos três e cinco. Se se dividir esse número por quinze e por setenta e cinco o número de divisores diminui respectivamente de oito e doze. Calcular o número dado.

29. O número $N = 2^a \times 3^b \times 5^g$ perde doze divisores quando dividido por doze e perde vinte e sete divisores quando dividido por dezoito. Calcular o número $N$.

30. Determinar o maior número pelo qual se devem dividir os números 175, 294 e 644 para que os restos sejam respectivamente 7, 14 e 28.

31. Determinar dois números inteiros tais que

   (a) o seu produto é 1080 e o seu mínimo múltiplo comum é 180

   (b) o seu máximo divisor comum é cento e quarenta e quatro e que o maior deles é oitocentos e sessenta e quatro

   (c) a sua soma é sessenta e o seu máximo divisor comum é doze

32. Sejam $m$ e $n$ inteiros primos entre si. Mostrar que:

   (a) $d$ divide $m \times n$ se e só se existem inteiros $a$ e $b$ tais que $d = a \times b$, $a$ divide $m$ e $b$ divide $n$.

   (b) O número de divisores positivos de $m \times n$ é igual ao número de divisores positivos de $m$ vezes o número de divisores positivos de $n$.

33. Sejam $a$, $b$, $c$, $m$ inteiros. Mostrar que se $a = b \times c$ e $b, c$ são primos entre si então $a$ divide $m$ se e só se $b$ divide $m$ e $c$ divide $m$.

34. Mostrar que:

   (a) se $m.d.c.(a, b) = d$ então $a|d$ e $b|d$ são primos entre si.

   (b) se $m.d.c.(a, b) = d$, $m.d.c.(a, c) = e$ e $m.d.c.(d, e) = 1$ então $m.d.c.(a, bc) = de$.

35. Sejam $n, m \in \mathbb{N}$. Mostrar que:

   (a) Se $p$ é um primo tal que $p$ divide $n + m$ e divide $n \times m$, então $p$ divide $n$ e divide $m$.

   (b) Se $n$ e $m$ são primos entre si, então $n + m$ e $n \times m$ são primos entre si.