Resultados de existência de soluções fracas para fluidos viscosos incompressíveis

Hermenegildo Borges de Oliveira
FCT - Universidade do Algarve & CMAF - Universidade de Lisboa
e-mail: `holivei@ualg.pt`

Resumo: Neste trabalho, consideramos o problema de valores inicial e de contorno que modela escoamentos isotérmicos de fluidos incompressíveis com viscosidade dependendo da tensão de corte. Para este problema, estabelecemos a existência de soluções fracas para qualquer $q > 1$, onde q é o expoente de não-linearidade que caracteriza o escoamento.

Abstract In this work we consider the initial-boundary value problem which models isothermal flows of incompressible fluids with shear stress depending viscosity. For this problem, we establish the existence of weak solutions for any $q > 1$, where q is the nonlinearity exponent which characterizes the flow.

palavras-chave: modelo de Sisko; soluções fracas; existência.

keywords: Sisko model; weak solutions; existence.

1 Modelos da Mecânica dos Fluidos

A lei de potência seguinte é um dos modelos mais simples propostos para fluidos com viscosidade dependendo da tensão de corte

$$\mathbf{S} = \mu|\mathbf{D}|^{q-2}\mathbf{D}\,, \quad \mathbf{D} \equiv \mathbf{D}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\left(\nabla\,\mathbf{u} + \nabla\,\mathbf{u}^T\right)\,, \tag{1}$$

onde $\mathbf{S}$ é a parte desviante do tensor das tensões de Cauchy, $\mathbf{D}$ é a parte simétrica do gradiente do campo das velocidades $\mathbf{u}$, habitualmente designada por tensor das taxas de deformação. Aqui, μ e q representam constantes positivas: μ é um factor de consistência relativo ao modelo de Stokes e q é o expoente que caracteriza o tipo de fluido em análise. Este modelo foi proposto por Ostwald, em 1925, e por De Waele, em 1923, para descrever a viscosidade de soluções coloidais. Posteriormente, o modelo mostrou-se bastante preciso para caracterizar a grande maioria dos fluidos pseudo-plásticos, a que correspondem valores de q tais que $1 < q < 2$ e onde se incluem os champôs, o sangue e a maioria dos fluidos feitos a partir de leite. Por outro lado, este modelo permite recuperar a lei de Stokes quando $q = 2$ ou o modelo de Bingham quando $q = 1$. O sucesso do modelo (1), para além da sua simplicidade, reside no facto de que também pode ser usado para descrever fluidos dilatantes, a que correspondem valores de q tais que $q > 2$ e onde se incluem o gelo polar, a lava dos vulcões e a areia molhada, quando modelados como fluidos. Dada a sua analogia com a lei de Stokes, os fluidos modelados por (1) são designados por fluidos Newtonianos generalizados. O único inconveniente do modelo (1), é que se deve ter cuidado quando é usado para valores $q > 2$, uma vez que o modelo falha para tensões de corte muito grandes, quando a viscosidade deve, em última análise, aproximar-se de uma constante. De modo a rectificar esta situação, Sisko propôs, em 1958, o modelo seguinte para modelar o escoamento de algumas graxas comerciais,

$$\mathbf{S} = \left(\mu_\infty + \mu|\mathbf{D}|^{q-2}\right)\mathbf{D}, \tag{2}$$

onde μ e q são tal como no modelo (1) e μ_∞ é uma constante positiva que corresponde à viscosidade quando a tensão de corte é muito grande.

2 Apresentação do problema

Neste trabalho, consideramos o problema de valores inicial e de contorno:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\mathbf{u} &= 0 \quad \text{em} \quad Q_T, && (3)\\
\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{div}(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) &= \mathbf{f} - \nabla p + \mathbf{div}\,\mathbf{S} \quad \text{em} \quad Q_T, && (4)\\
\mathbf{u} &= \mathbf{u}_0 \quad \text{em} \quad \Omega \quad \text{para} \quad t=0, && (5)\\
\mathbf{u} &= \mathbf{0} \quad \text{sobre} \quad \Gamma_T. && (6)
\end{aligned}$$

Aqui p denota a pressão dividida pela densidade do fluido, suposta constante, e $\mathbf{f}$ e $\mathbf{u}_0$ representam as forças externas e a velocidade no instante inicial. Supomos que o fluido está confinado a um domínio espaço-temporal definido por $Q_T = \Omega \times (0,T)$ de fronteira $\Gamma_T = \partial\Omega \times (0,T)$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, com $N \geq 2$, é um domínio limitado com fronteira compacta $\partial\Omega$, e $0 < T < \infty$. Consideremos os espaços habituais da teoria matemática da Mecânica dos Fluidos: $\mathcal{V} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega) : \operatorname{div}\mathbf{v} = 0\}$; $\mathbf{H} = \{\text{fecho de } \mathcal{V} \text{ em } \mathbf{L}^2(\Omega)\}$; $\mathbf{V}_q = \{\text{fecho de } \mathcal{V} \text{ em } \mathbf{W}^{1,q}(\Omega)\}$. Por $\mathbf{V}'_q$, denotamos o espaço dual de $\mathbf{V}_q$. Neste texto, estamos interessados na questão da existência de soluções fracas, no sentido de Leray-Hopf, para o problema (3)-(6) .

Definição 1 *Sejam $N \geq 2$, $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}$ e $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^1(Q_T)$. Diz-se que um campo vectorial $\mathbf{u}$ é uma solução fraca do problema (3)-(6), se:*
(1) $\mathbf{u} \in \mathrm{L}^q(0,T;\mathbf{V}_q) \cap \mathrm{C_w}([0,T];\mathbf{H})$ *(no caso do modelo (2) com $1 < q \leq 2$,*

$\mathbf{u} \in \mathrm{L}^2(0,T;\mathbf{V}_2) \cap \mathrm{C_w}([0,T];\mathbf{H})$*);*
(2) Para todo $\varphi \in \mathbf{C}^\infty(Q_T)$*, com* $\operatorname{div}\varphi = 0$ *e* $\operatorname{supp}\varphi \subset\subset \Omega \times [0,T)$*,*

$$\begin{aligned} &-\int_{Q_T} \mathbf{u}\cdot\varphi_t\, d\mathbf{x}dt + \int_{Q_T} (\mathbf{S}(\mathbf{D}(\mathbf{u})) - \mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) : \mathbf{D}(\varphi)\, d\mathbf{x}dt \\ &= \int_{Q_T} \mathbf{f}\cdot\varphi\, d\,\mathbf{x}dt + \int_\Omega \mathbf{u}_0\cdot\varphi(0)\, d\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{7}$$

O resultado principal que apresentamos neste trabalho é o seguinte (ver [4]).

Teorema 1 *Seja* Ω *um domínio limitado de* $\mathbb{R}^N$*,* $N \geq 2$*, e suponhamos que*

$$\mathbf{f} = -\mathbf{div}\,\mathbf{F}, \quad \mathbf{F} \in \mathbb{M}^N_{\mathrm{sym}}, \quad \mathbf{F} \in \mathbf{L}^{q'}(Q_T), \qquad \mathbf{u}_0 \in \mathbf{H},$$

onde $\mathbb{M}^N_{\mathrm{sym}}$ *denota o espaço vectorial constituído por todas as matrizes simétricas de ordem* $N \times N$ *e* q' *indica o expoente conjugado de Hölder de* q*. Se* $q > 1$*, então existe uma solução fraca para o problema {(2), (3)-(6)}.*

3 Resultados de existência

Num trabalho que remonta a 1967, Ladyzhenskaya (ver [2]) estabeleceu a existência de soluções fracas para o problema $\{(2), (3)\text{-}(6)\}$, considerando $N = 3$ e $q \geq \frac{12}{5}$, e sob as hipóteses de que $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}$ e $\mathbf{f} \in \mathrm{L}^2(Q_T)$. Pouco depois, em 1969, Lions [3] estabeleceu a existência de soluções fracas para o problema $\{(1), (3)\text{-}(6)\}$ e para qualquer $N \geq 2$. Sob as hipótese de que $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}$ e $\mathbf{f} \in \mathrm{L}^{q'}(0,T;\mathbf{V}_q')$, o resultado de [3] estabelece a existência de soluções $\mathbf{u} \in \mathrm{L}^q(0,T;\mathbf{V}_q) \cap \mathrm{L}^\infty(0,T;\mathbf{H})$ tais que (7) é satisfeita para todo $\varphi \in \mathrm{C}^1(0,T;\mathbf{V}_q)$. As demonstrações em [2] e [3] usam aproximações de Galerkin com argumentos de compacidade, juntamente com a teoria dos operadores monótonos. A melhoria no resultado apresentado em [3], relativamente a [2], reside no facto de que a inclusão contínua $\mathrm{L}^q(0,T;\mathbf{V}_q) \cap \mathrm{L}^\infty(0,T;\mathbf{H}) \hookrightarrow \mathrm{L}^{q\frac{N+2}{N}}(Q_T)$ implica que $\mathbf{u}\otimes\mathbf{u} : \mathbf{D}(\mathbf{v})$ é limitado em $\mathbf{L}^1(Q_T)$ para todos $\mathbf{u},\ \mathbf{v} \in \mathrm{L}^q(0,T;\mathbf{V}_q) \cap \mathrm{L}^\infty(0,T;\mathbf{H})$, desde que $q \geq \frac{3N+2}{N+2}$.

Mais ou menos 40 anos depois, Zhikov [6] foi bem sucedido em melhorar os resultados [2, 3] para o problema $\{(1), (3)\text{-}(6)\}$. A ideia principal da sua demonstração, consistiu num processo de regularização do tensor $\mathbf{S}$ e depois usar os resultados de Ladyzhenskaya e Lions. A seguir, observou que a inclusão de Sobolev $\mathrm{L}^q(0,T;\mathbf{V}_q) \cap \mathrm{L}^\infty(0,T;\mathbf{H}) \hookrightarrow \mathrm{L}^2(0,T;\mathrm{L}^{2q'}(\Omega))$ implica que $\mathbf{u}\otimes\mathbf{u} : \mathbf{D}(\mathbf{v})$ é limitado em $\mathbf{L}^1(Q_T)$ para todos $\mathbf{u},\ \mathbf{v} \in \mathrm{L}^q(0,T;\mathbf{V}_q) \cap \mathrm{L}^\infty(0,T;\mathbf{H})$, desde que $q \geq \max\left\{\frac{3N}{N+2}, \frac{N+\sqrt{3N^2+4N}}{N+2}\right\}$. A passagem ao limite foi bem conseguida graças a alguns argumentos da Teoria da Medida.

Ainda antes de Zhikov, Wolf [5] estabeleceu a existência de soluções fracas, no sentido de (7), para o problema (3)-(6) tendo por base um modelo geral que incluía os casos (1) e (2), e sob as hipóteses de que $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}$, $\mathbf{f} = -\mathbf{div}\,\mathbf{F}$ e $\mathbf{F} \in \mathbf{L}^{q'}(Q_T)$. A parte fulcral da demonstração reside no facto das inclusões contínuas $\mathrm{L}^q(0,T;\mathbf{V}_q) \cap \mathrm{L}^\infty(0,T;\mathbf{H}) \hookrightarrow \mathrm{L}^{q\frac{N+2}{N}}(Q_T)$ e $\mathrm{L}^q(0,T;\mathbf{V}_q) \cap \mathrm{L}^{q\frac{N+2}{N}}(Q_T) \hookrightarrow \mathrm{L}^s(Q_T)$ implicarem que $\mathrm{div}(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u})\cdot\varphi$ é limitado em $\mathbf{L}^s(Q_T)$ para toda a truncatura L^∞ de $\mathbf{u}$, aqui denotada por φ, e para algum $s > 1$, desde que $q > 2\frac{N+1}{N+2}$. Como as funções de teste construídas já não tinham divergência nula, houve primeiro que recuperar a pressão na formulação fraca, usando para isso uma versão do Teorema de De Rham. A seguir, o autor usou a decomposição harmónica de funções em L^q para decompor a pressão numa função mensurável e noutra singular, com respeito à medida de Lebesgue, e poder passar ao limite nos termos resultantes.

Por fim, o resultado [5] foi melhorado em [1] para valores de q tais que $\frac{2N}{N+2} < q < 2$, com $N > 2$. Em [1], a principal inovação em relação a [5], foi uma aplicação bem sucedida do método da truncatura de Lipschitz.

Pelo exposto, resulta que o caso de $1 < q \leq \frac{2N}{N+2}$, com $N > 2$, seria um problema em aberto. O Teorema 1 vem resolver este problema no caso do modelo (2). A demonstração do Teorema 1 usa, também, os resultados de [5] para decompor a pressão, bem como o método da truncatura de Lipschitz desenvolvido em [1]. O principal ingrediente da demonstração, consiste numa utilização optimal dos resultados de compacidade de Aubin-Lions, o que permite provar a existência de soluções fracas para todo $q > 1$.

Referências

[1] L. Diening, M. Růžička e J. Wolf. Existence of weak solutions for unsteady motions of generalized Newtonian fluids. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Csi.* **5** (2010), IX, 1–46.

[2] O.A. Ladyzhenskaya. *The mathematical theory of viscous incompressible flows.* Gordon and Breach Science Publishers Inc., New York, 1969.

[3] J.-L. Lions. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires.* Dunod, Paris, 1969.

[4] H.B. de Oliveira. On the existence for the Sisko problem. Submetido. Preprint disponível em `http://w3.ualg.pt/~holivei/Sisko.pdf`.

[5] J. Wolf. Existence of weak solutions to non-Newtonian fluids with shear rate dependent viscosity. *J. Math. Fluid Mech.* **9** (2007), no. 1, 104–138.

[6] V. Zhikov. New approach to the solvability of generalized Navier-Stokes equations. *Funct. Anal. Appl.* **43** (2009), no. 3, 190–207.