UAlg
UNIVERSIDADE DO ALGARVE

Apontamentos
de
Equações Diferenciais Ordinárias

Hermenegildo Borges de Oliveira

Dezembro de 2014

Conteúdo

Capítulo 1

Equações diferenciais de 1^{a} ordem

As equações diferenciais distinguem-se em dois grupos importantes: as equações diferenciais ordinárias e as equações às derivadas parciais. Nas equações diferenciais ordinárias intervêm funções de apenas uma variável e as suas derivadas, ditas ordinárias. Enquanto que nas parciais, intervêm funções com mais do que uma variável e as suas derivadas parciais. Neste texto, vamos estudar apenas as equações diferenciais ordinárias e, dentro destas, começamos aqui no primeiro capítulo pelo estudo das equações diferenciais de primeira ordem.

1.1 Primeiras noções

Definição 1.1.1. Designa-se por **equação diferencial ordinária de 1^{a} ordem** a toda a equação que estabelece uma relação entre a variável independente x, a função incógnita $y(x)$ e a sua derivada $y'(x)$, i.e., uma equação do tipo

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0,$$

onde F é uma função dada, definida em certo subconjunto de $\mathbb{R}^3$:

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}.$$

Como vamos apenas tratar de equações diferenciais ordinárias, no decurso destas notas, iremos deixar cair o adjectivo "ordinárias".

A função incógnita $y(x)$ é, por vezes, designada por variável dependente da equação diferencial. Fixando este conhecimento, podemos escrever a equação diferencial na forma seguinte mais simples:

$$F(x, y, y') = 0.$$

Notando que a derivada de uma função y se pode escrever na forma

$$y' = \frac{d\,y}{d\,x},$$

podemos escrever a equação diferencial, de equação $F(x, y, y') = 0$, na forma seguinte:

$$A(x, y)\,dx + B(x, y)\,dy = 0;$$

onde A e B são funções dadas, definidas em subconjuntos de $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 1.1.1.

$$y' + xy = 0\,, \quad \text{onde} \quad F(x, y, y') = y' + xy\,.$$

A equação diferencial do exemplo anterior pode, também, ser escrita numa das formas equivalentes seguintes:

$$\frac{dy}{dx} + xy = 0 \qquad \text{ou} \qquad xy\,dx + dy = 0\,.$$

Definição 1.1.2. Chama-se **solução de uma equação diferencial de 1ª ordem**, no intervalo (a, b), a uma função $y = \varphi(x)$ derivável em (a,b), tal que, ao substituirmos y por $\varphi(x)$ na equação diferencial, esta transforma-se numa identidade em ordem a x, em (a, b).

Sempre que é possível encontrar uma expressão explícita $y = \varphi(x)$, dizemos que a **solução** da equação diferencial é **explícita**.

Exemplo 1.1.2. Verifique que a função $y = 2 + e^{-x}$ é uma solução explícita da equação diferencial:

$$y' + y - 2 = 0\,.$$

Por vezes não é possível apresentar uma solução explícita para dada equação diferencial. Apenas conseguimos apresentar uma equação

$$G(x, y) = 0$$

que define, num intervalo (a, b), pelo menos, uma função real $y = \varphi(x)$ que é solução explícita da equação diferencial. Neste caso, dizemos que a **solução** $y = \varphi(x)$ está definida de forma **implícita** pela equação $G(x, y) = 0$.

Exemplo 1.1.3. Verifique que a família de funções $y = \varphi(x)$ que satisfazem à equação

$$x^2 + y^2 = 4$$

são soluções implícitas, no intervalo $(-2, 2)$, da equação diferencial

$$2x + 2yy' = 0.$$

A família de funções

$$y = \varphi(x, C)\,,$$

dependente de uma constante arbitrária C, que resolvem uma equação diferencial num intervalo, designa-se por **solução geral** da equação diferencial. Chama-se **solução particular**, a toda a função que se obtém da solução geral $y = \varphi(x, C)$, quando se concretiza a constante C, isto é, a uma função

$$y = \varphi(x, C_0)\,, \quad \text{com} \quad C_0 = \textit{constante} \text{ fixa}\,.$$

Designa-se por **solução singular** de uma equação diferencial, a uma função

$$y = \phi(x)\,,$$

que resolve uma equação diferencial num intervalo, mas que não se obtém a partir da solução geral.

Exemplo 1.1.4. Considere a equação diferencial seguinte:

$$\frac{(y')^2}{2} + xy' - y = 0\,.$$

1. Verifique que a família de funções

$$y = Cx + \frac{C^2}{2}, \quad C = constante\,,$$

é uma solução geral da equação diferencial dada.

2. Justifique que a função

$$y = 2x + 2, \quad C = constante\,,$$

é uma solução particular da equação diferencial dada.

3. Verifique que a função

$$y = -\frac{1}{2}x^2$$

é uma solução singular da equação diferencial dada.

Definição 1.1.3. Uma equação diferencial diz-se escrita na **forma normal**, se puder ser escrita do modo seguinte:

$$y'(x) = f(x, y(x));$$

onde $f(x, y)$ é uma função contínua, definida num domínio de $\mathbb{R}^2$.

Por exemplo, as equações diferenciais

$$y' + xy = 0 \qquad \text{e} \qquad 2x + 2yy' = 0$$

podem ser escritas, respectivamente, nas formas normais seguintes:

$$y' = f(x, y)\,, \quad f(x, y) = -xy \qquad \text{e} \qquad y' = f(x, y)\,, \quad f(x, y) = -\frac{x}{y}\,.$$

Definição 1.1.4. Chama-se **curva integral** duma equação diferencial

$$F(x, y, y') = 0\,,$$

ao gráfico de uma solução $y = \varphi(x)$ dessa equação diferencial.

Exercícios

1. Considere as equações diferenciais seguintes:

   (a) $\dfrac{dy}{dx} = e^{2x}$;

   (b) $dy = (y^2 + x)dx$;

   (c) $y'' + 4y = (x^2 + 1)^3$;

   (d) $x^2 dy + 3y dx = 25 dx$;

   (e) $y' + x = 3$;

   (f) $y'' - (y')^3 + y = \operatorname{sen}(x)$.

   1.1 Indique a ordem de cada uma das equações diferenciais.

   1.2 Distinga as equações diferenciais lineares das não lineares.

   1.3 Quando possível, escreva cada equação diferencial na forma normal.

2. Verifique se as funções indicadas são soluções das equações diferenciais seguintes:

(a) $xy' - 2y = 0 \quad (y = x^2,\ y = x^3,\ y = 3x^2)$;
(b) $xy' = 2y \quad (y = 5x^2)$;
(c) $(x - y + 1)y' = 1 \quad (y = x + 2e^y)$;
(d) $x + y + xy' = 0 \quad \left(y = \dfrac{1 - x^2}{2x}\right)$;
(e) $(x - 2y)y' = 0 \quad (x^2 - xy + y^2 = 8)$;
(f) $x + yy' = 0 \quad (x^2 + y^2 = 9)$;
(g) $xy' = \dfrac{y}{y + 1} \quad (y = \ln(xy))$.

1.2 Equações de variáveis separadas

Definição 1.2.1. Chama-se **equação diferencial de variáveis separadas**, a toda a equação diferencial que puder ser escrita na forma seguinte:

$$y' = f(x, y)\,, \quad \text{com} \quad f(x, y) = -\frac{A(x)}{B(y)}\,.$$

Uma equação diferencial de variáveis separadas pode, também, aparecer escrita numa das formas equivalentes seguintes:

$$A(x) + B(y)y' = 0$$

ou

$$A(x)\,dx + B(y)\,dy = 0\,.$$

Esta última escrita justifica a designação de equação diferencial de variáveis separadas.

Proposição 1.2.1. A solução geral de uma equação diferencial de variáveis separadas

$$y' = f(x, y)\,, \quad \text{com} \quad f(x, y) = -\frac{A(x)}{B(y)}\,,$$

é dada, de forma implícita, pela equação integral seguinte:

$$\int A(x)\,dx + \int B(y)\,dy = 0\,.$$

Demonstração: Basta integrar a equação diferencial $A(x)\,dx + B(y)\,dy = 0$. □

Exemplo 1.2.1. Determine a solução geral da equação diferencial de variáveis separadas seguinte:

$$e^{-x} + yy' = 0\,.$$

Exercícios

1. Resolva as equações diferenciais de variáveis separadas seguintes:

(a) $\dfrac{dy}{y} + 2xdx = 0$;
(b) $y' = x\cos(2x)$;
(c) $yy' + 4x = 0$;
(d) $x + 2yy' = 0$;
(e) $\dfrac{y'}{y} - \dfrac{1}{x + 1} = 0$;
(f) $\dfrac{y'}{\sqrt{y}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$;
(g) $yy' = \dfrac{1 - x^2}{x}$;

1.3 Equações diferenciais de variáveis separáveis

Por vezes, apesar de uma dada equação diferencial não ser de variáveis separadas, é possível reduzi-la, por meio de operações algébricas simples, a uma equação diferencial desse tipo.

Definição 1.3.1. Chama-se **equação diferencial de variáveis separáveis**, a toda a equação diferencial que puder ser escrita na forma seguinte:

$$y' = f(x,y)\,, \quad \text{com} \quad f(x,y) = -\frac{A(x,y)}{B(x,y)}\,,$$

onde as funções $A(x,y)$ e $B(x,y)$, definidas num domínio de $\mathbb{R}^2$, podem ser separadas em funções de x e de y:

$$A(x,y) = A_1(x)A_2(y)\,, \quad B(x,y) = B_1(x)B_2(y).$$

As equações diferenciais de variáveis separáveis podem ser escritas nas formas equivalentes seguintes:

$$A(x,y) + B(x,y)y' = 0$$

ou

$$A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy = 0\,;$$

com $A(x,y) = A_1(x)A_2(y)$ e $B(x,y) = B_1(x)B_2(y)$.

Proposição 1.3.1. A solução geral de uma equação diferencial de variáveis separáveis

$$y' = f(x,y)\,, \quad \text{com} \quad f(x,y) = -\frac{A(x,y)}{B(x,y)}\,, \quad A(x,y) = A_1(x)A_2(y)\,, \quad B(x,y) = B_1(x)B_2(y).$$

é dada, de forma implícita, pela equação integral seguinte:

$$\int \frac{A_1(x)}{B_1(x)}\,dx + \int \frac{B_2(y)}{A_2(y)}\,dy = 0\,, \qquad B_1(x) \neq 0\,, \quad A_2(y) \neq 0.$$

Demonstração: Admitindo que $B_1(x) \neq 0$ e $A_2(y) \neq 0$, dividimos a equação diferencial $A_1(x)A_2(y)\,dx + B_1(y)B_2(y)\,dy = 0$ por $B_1(x)A_2(y)$ e integra-se a equação resultante. □

Exemplo 1.3.1. Determine a solução geral da equação diferencial de variáveis separáveis seguinte:

$$3(y^2+1)\,dx + 2xy\,dy = 0\,.$$

Exercícios

1. Resolva as equações diferenciais de variáveis separáveis seguintes:

   (a) $y' + (x+2)y^2 = 0$;

   (b) $y'e^{\pi x} = y^2 + 1$;

   (c) $\dfrac{dy}{dx} = xy^2e^x$;

   (d) $(4y + yx^2)dy - (2x + xy^2)dx = 0$;

   (e) $\dfrac{2e^x\,\mathrm{tg}(y)}{x}dx + \dfrac{1-e^x}{x\cos^2(y)}dy = 0$;

   (f) $xy' = 2y$;

   (g) $xy' = y + y^3$;

   (h) $x\,\mathrm{sen}(x)e^{-y} - y\dfrac{dy}{dx} = 0$;

1.4 Equações diferenciais homogéneas

Existem equações diferenciais que, não sendo de variáveis separáveis, podem ser reduzidas a estas por meio de uma substituição adequada.

Definição 1.4.1. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função definida num domínio $\mathbb{D}$. Diz-se que $f(x, y)$ é uma função homogénea de grau α, em x e em y, se

$$f(tx, ty) = t^{\alpha} f(x, y) \quad \text{para todos } t > 0 \text{ e } (x, y) \in \mathbb{D}.$$

No caso de $\alpha = 0$, temos uma função homogénea de grau zero.

Exemplo 1.4.1. Mostre que $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$ é uma função homogénea de grau 2.

Definição 1.4.2. Designa-se por **equação diferencial homogénea**, a toda a equação diferencial que puder ser escrita na forma

$$A(x, y)\, dx + B(x, y)\, dy = 0\,,$$

onde as funções $A(x, y)$ e $B(x, y)$, definidas num domínio de $\mathbb{R}^2$, são ambas homogéneas do mesmo grau.

Proposição 1.4.1. Seja

$$A(x, y)\, dx + B(x, y)\, dy = 0 \tag{1.4.1}$$

uma equação diferencial homogénea. Então a substituição

$$y(x) = x\, u(x)$$

transforma a equação diferencial dada numa equação diferencial de variáveis separáveis em x e em u:

$$\mathcal{A}(x, u)\, dx + \mathcal{B}(x, u)\, du = 0\,.$$

Demonstração: Se a equação diferencial (1.4.1) é homogénea, então, por definição, as funções A e B são homogéneas do mesmo grau, digamos α. Então, para $t = x^{-1}$, temos

$$\frac{1}{x^{\alpha}} A(x, y) = A\left(\frac{1}{x}x, \frac{1}{x}y\right) = A\left(1, \frac{y}{x}\right) \quad \text{e} \quad \frac{1}{x^{\alpha}} B(x, y) = B\left(\frac{1}{x}x, \frac{1}{x}y\right) = B\left(1, \frac{y}{x}\right)\,.$$

Assim, multiplicando (1.4.1) por $t = x^{-\alpha}$, obtemos

$$A\left(1, \frac{y}{x}\right)\, dx + B\left(1, \frac{y}{x}\right)\, dy = 0\,. \tag{1.4.2}$$

Introduzamos, agora, uma nova função pondo

$$u(x) = \frac{y(x)}{x}\,. \tag{1.4.3}$$

Então $y = xu$, $d\,y = x\,du + u\,dx$ e obtemos, a partir de (1.4.2),

$$A(1, u)\, dx + B(1, u)\, (x\, du + u\, dx) = 0 \Leftrightarrow \left(A(1, u) + B(1, u)u\right)\, dx + B(1, u)x\, du\,. \tag{1.4.4}$$

Esta última, é uma equação diferencial de variáveis separáveis em x e em u. □

As equações diferenciais homogéneas são, pois, reduzidas a equações diferenciais de variáveis separáveis, que já sabemos resolver. Depois da solução da equação diferencial nas variáveis x e u ser determinada, há que regressar à variável dependente y original pela substituição (1.4.3).

Exemplo 1.4.2. Considere a equação diferencial seguinte:

$$(2x^2 + y^2)\, dx - xy\, dy = 0\,.$$

a) Mostre que se trata de uma equação diferencial homogénea.
b) Determine a solução geral da equação diferencial dada.

Exercícios

1. Comece por mostrar que as equações diferenciais seguintes são homogéneas e a seguir resolva cada uma:

   (a) $xy' - y - \sqrt{x^2 - y^2} = 0$;
   (b) $2xyy' = y^2 - x^2$;
   (c) $y' = \dfrac{x - y}{2x + 4y}$;
   (d) $y' = -\dfrac{x + y}{x}$;
   (e) $(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0$;
   (f) $xy' + x - 2y = 0$;
   (g) $y' = \dfrac{x^2 + y^2}{xy - x^2}$;
   (h) $y' = e^{\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}$;
   (i) $xy' - y - x\cos^2\left(\dfrac{y}{x}\right) = 0$;
   (j) $\dfrac{y'}{y^2} = \dfrac{1}{x(y - x)}$.

1.5 Equações diferenciais exactas

Definição 1.5.1. Seja $u(x, y)$ uma função definida e com derivadas parciais contínuas num domínio de $\mathbb{R}^2$. Define-se o **diferencial da função** u por

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\, dx + \frac{\partial u}{\partial y}\, dy.$$

Exemplo 1.5.1. Determine o diferencial da função $f(x, y) = x^3y - 3x^2 + y^2$.

Definição 1.5.2. Uma **equação diferencial** da forma

$$A(x, y)\, dx + B(x, y)\, dy = 0$$

diz-se **exacta**, se existir uma função $u(x, y)$ tal que $A(x, y)\, dx + B(x, y)\, dy$ é o diferencial de u, isto é, se

$$du = A(x, y)\, dx + B(x, y)\, dy.$$

Proposição 1.5.1. Seja

$$A(x, y)\, dx + B(x, y)\, dy = 0$$

uma equação diferencial exacta. Então existe uma função $u(x,y)$ satisfazendo a

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = A(x,y) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = B(x,y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(x,y) = \int A(x,y)\, dx \\ u(x,y) = \int B(x,y)\, dy\,. \end{cases}$$

e tal que a equação

$$u(x,y) = C\,, \quad C = constante\,,$$

define, de forma implícita, a solução geral da equação diferencial dada.

Demonstração: É uma consequência imediata da definição de equação diferencial exacta. □

Postas as definições, resta-nos encontrar um critério para verificar se determinada equação diferencial é ou não exacta. A proposição seguinte dá-nos uma condição necessária e suficiente para isto acontecer.

Proposição 1.5.2. Consideremos uma equação diferencial da forma

$$A(x,y)\, dx + B(x,y)\, dy = 0\,, \tag{1.5.5}$$

onde $A(x,y)$ e $B(x,y)$ são funções com derivadas parciais contínuas num domínio aberto $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$. É condição necessária e suficiente para a equação diferencial (1.5.5) ser exacta que

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x} \quad \text{para todos } (x,y) \in \mathbb{D}. \tag{1.5.6}$$

Demonstração: $\Rightarrow$ Vamos provar a necessidade da condição (1.5.6). Seja

$$A(x,y)dx + B(x,y)dy = 0$$

uma equação diferencial exacta. Então, por definição, existe uma função $u(x,y)$ tal que

$$d\,u = A(x,y)\, dx + B(x,y)\, dy.$$

Mas,

$$d\,u = \frac{\partial u}{\partial x}\, dx + \frac{\partial u}{\partial y}\, dy$$

e, portanto,

$$A(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad B(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Estas duas equações conduzem às relações

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

Mas,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},$$

porque estas derivadas são contínuas. Portanto, se a equação diferencial (1.5.5) é exacta, então verifica-se (1.5.6).

$\Leftarrow$ Agora, vamos provar que a condição (1.5.6) é suficiente. Suponhamos, então, que (1.5.6) é verificada. Construímos uma função $u(x,y)$ de tal forma que

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} A(s,y)ds + \int_{y_0}^{y} B(x_0,t)dt\,, \tag{1.5.7}$$

ou

$$u(x,y) = \int_{y_0}^{y} B(x,s)ds + \int_{x_0}^{x} A(t,y_0)dt\,, \tag{1.5.8}$$

onde (x_0, y_0) é um ponto de $\mathbb{D}$. É fácil verificar que, no caso de (1.5.7), utilizando (1.5.6),

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A(x,y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial A(s,y)}{\partial y} ds + B(x_0,y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial\, B(s,y)}{\partial\, x}\, ds + B(x_0,y) = B(x,y)$$

e que, no caso de (1.5.8),

$$\frac{\partial u}{\partial y} = B(x,y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial B(x,s)}{\partial x} ds + A(x,y_0) = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial A(x,s)}{\partial y} ds + A(x,y_0) = A(x,y).$$

Isto prova que a equação diferencial (1.5.5) é exacta.

□

Observação. Resulta da proposição anterior que, a existir, a função $u(x,y)$ terá as segundas derivadas parciais contínuas em $\mathbb{D}$.

Exemplo 1.5.2. Considere a equação diferencial seguinte:

$$(2xy + 3y)\, dx + (4y^3 + x^2 + 3x + 4)\, dy = 0\,.$$

a) Mostre que se trata de uma equação diferencial exacta.
b) Determine a solução geral da equação diferencial dada.

Exercícios

1. Determine as funções $u(x,y)$ cujos diferenciais totais são dados a seguir:
   (a) $du = 3x(xy-2)dx + (x^3+2y)dy$;
   (b) $du = (1+2xy^3)dx + 3x^2y^2dy = 0$;
   (c) $du = [\cos(y)\operatorname{senh}(x) + 1]\, dx + \operatorname{sen}(y)\cosh(x)\, dy = 0$.

2. Comece por verificar que as equações diferenciais seguintes são exactas e determine a solução de cada:
   (a) $3x^2(1+\ln y)dx + \left(\dfrac{x^3}{y} - 2y\right) dy = 0$;
   (b) $4xy - x^3 + (2x^2 - y)y' = 0$;
   (c) $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$;
   (d) $3x^2[1+\ln(y)]dx + \left(\dfrac{x^3}{y} - 2y\right) dy = 0$;
   (e) $(x+y)dx + (x+2y)dy = 0$;
   (f) $\dfrac{2x}{y^3} + \dfrac{y^2-3x^2}{y^4}dy = 0$;
   (g) $(x^2+y^2+2x)dx + 2xydy = 0$;
   (h) $\left(\dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{y} + x\right) dx + \left(y - \dfrac{\operatorname{sen}^2(x)}{y^2}\right) = 0$.

1.6 Método do factor integrante

Existem equações diferenciais que, não sendo exactas, poderão ser transformadas em exactas se as multiplicarmos por um factor apropriado.

Definição 1.6.1. Consideremos uma equação diferencial da forma

$$A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy = 0\,. \tag{1.6.9}$$

Chama-se **factor integrante** da equação diferencial (1.6.9), a uma função $\mu(x,y)$ que multiplicado pela equação (1.6.9) a transforma numa equação diferencial exacta:

$$\mu(x,y)A(x,y)\,dx + \mu(x,y)B(x,y)\,dy = 0\,.$$

Exemplo 1.6.1. Considere a equação diferencial seguinte:

$$(x^2+y^2-x)\,dx - y\,dy = 0\,.$$

a) Verifique que esta equação diferencial não é exacta.
b) Mostre que a função $\mu(x,y) = (x^2+y^2)^{-1}$ é um factor integrante da equação dada.

O problema mais delicado reside em determinar um possível factor integrante para uma equação diferencial. Nos casos mais simples, os factores integrantes são determinados por tentativas. No entanto, se quisermos factores integrantes dependentes de uma só variável, podemos derivar fórmulas para os determinar, no caso de existirem.

Proposição 1.6.1. Consideremos uma equação diferencial da forma

$$A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy = 0\,. \tag{1.6.10}$$

1. A equação diferencial (1.6.10) admite um factor integrante dependente apenas de x, se e só se a expressão seguinte é uma função somente de x:

$$\frac{\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}}{B}\,. \tag{1.6.11}$$

   A expressão do factor integrante é:

$$\mu(x) = C\,e^{-\int a(x)\,dx}, \quad a(x) = \frac{\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}}{B}\,, \quad C = \mathit{constante}\,. \tag{1.6.12}$$

2. A equação diferencial (1.6.10) admite um factor integrante dependente apenas de y, se e só se a expressão seguinte é uma função somente de y:

$$\frac{\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x}}{A}\,. \tag{1.6.13}$$

   Neste caso, a expressão do factor integrante é:

$$\mu(y) = C\,e^{-\int a(y)\,dy}, \quad a(y) = \frac{\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x}}{A}\,, \quad C = \mathit{constante}\,. \tag{1.6.14}$$

Demonstração: 1. Suponhamos que a equação diferencial (1.6.10) admite um factor integrante dependente apenas de x: $\mu(x)$. Então, a equação diferencial

$$\mu(x)A(x,y)\,dx + \mu(x)B(x,y)\,dy = 0 \tag{1.6.15}$$

é exacta e temos

$$\frac{\partial\,(\mu A)}{\partial\,y} = \frac{\partial\,(\mu B)}{\partial\,x}\,.$$

Tendo em conta que μ é uma função apenas de x, temos

$$\mu\frac{\partial\,A}{\partial\,y} = \mu' B + \mu\frac{\partial\,B}{\partial\,x} \Leftrightarrow -\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\frac{\partial\,B}{\partial\,x} - \frac{\partial\,A}{\partial\,y}}{B} \tag{1.6.16}$$

e, portanto, (1.6.11) é uma função somente de x. Reciprocamente, se (1.6.11) é uma função somente de x, obtém-se que (1.6.15) é uma equação diferencial exacta. Portanto, a equação diferencial (1.6.10) admite um factor integrante dependente apenas de x. Integrando (1.6.16) em ordem a x, obtemos (1.6.14).

2. Suponhamos, agora, que a equação diferencial (1.6.10) admite um factor integrante dependente apenas de y: $\mu(y)$. Então,

$$\mu(y)A(x,y)\,dx + \mu(y)B(x,y)\,dy = 0 \tag{1.6.17}$$

é uma equação diferencial exacta e temos

$$\frac{\partial\,(\mu A)}{\partial\,y} = \frac{\partial\,(\mu B)}{\partial\,x}\,.$$

Como μ é uma função apenas de y, temos

$$\mu' A + \mu\frac{\partial\,A}{\partial\,y} = \mu\frac{\partial\,B}{\partial\,x} \Leftrightarrow -\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\frac{\partial\,A}{\partial\,y} - \frac{\partial\,B}{\partial\,x}}{A} \tag{1.6.18}$$

e, portanto, (1.6.13) é uma função somente de y. Reciprocamente, se (1.6.13) é uma função somente de y, obtém-se que (1.6.17) é uma equação diferencial exacta. Portanto, a equação diferencial (1.6.10) admite um factor integrante dependente apenas de y. Integrando (1.6.18) em ordem a y, obtemos (1.6.14).

□

Exemplo 1.6.2. Usando o Método do Factor Integrante, resolva a equação diferencial seguinte:

$$(xy^2 - y^3)\,dx + (1 - xy^2)\,dy = 0\,.$$

Exercícios

1. Usando o Método do Factor Integrante, resolva as equações diferenciais seguintes:
   (a) $(e^{x+y} - y)\,dx + (xe^{x+y} + 1)\,dy = 0$;
   (b) $\left[\operatorname{sen}(y)\cos(y) + x\cos^2(y)\right]\,dx + x\,dy = 0$.

1.7 Equações diferenciais lineares

Definição 1.7.1. Uma **equação diferencial**

$$F(x,y,y') = 0$$

diz-se **linear** se for linear nas variáveis y e y', isto é, se for da forma

$$y' + a(x)y = b(x)\,,$$

onde $a(x)$ e $b(x)$ são funções contínuas num mesmo intervalo de $\mathbb{R}$.

Se $b(x) \equiv 0$, a equação diferencial vem na forma

$$y' + a(x)y = 0$$

e designa-se por **equação diferencial linear homogénea**[1]. No caso de $b(x) \neq 0$, a equação designa-se por **equação diferencial linear completa**, ou não homogénea. Por outro lado, se $a(x) = 0$, obtemos a equação diferencial de variáveis separáveis

$$y' = b(x) \Leftrightarrow dy - b(x)\,dx = 0\,.$$

Proposição 1.7.1. A solução geral de uma equação diferencial linear da forma

$$y' + a(x)y = b(x)\,, \tag{1.7.19}$$

é dada por

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds}\left(\int_{x_0}^{x} b(s)e^{\int_{s_0}^{s} a(t)\,dt}ds + C\right), \qquad C = constante\,. \tag{1.7.20}$$

Demonstração: De facto, multiplicando a equação diferencial (1.7.19) por $e^{\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds}$, obtemos

$$\left(e^{\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds}y(x)\right)' = e^{\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds}b(x)\,. \tag{1.7.21}$$

Integrando (1.7.21) entre x_0 e x, obtemos (1.7.20). □

No caso particular da equação diferencial linear homogénea, $b(x) \equiv 0$ e a solução geral é dada por

$$y(x) = C\,e^{-\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds}\,, \qquad C = constante\,.$$

Exemplo 1.7.1. Determine as soluções gerais das equações diferenciais lineares seguintes:
a) $y' - \operatorname{tg}(x)\,y = 0$.
a) $y' - \operatorname{tg}(x)\,y = \cos(x)$.

A proposição seguinte permite-nos determinar a solução geral de uma equação diferencial linear completa de um modo diferente.

Proposição 1.7.2. Sejam y_p uma solução particular da equação diferencial linear completa

$$y' + a(x)y = b(x)\,, \tag{1.7.22}$$

e

$$y_h = Ce^{-\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds}, \quad C = constante\,, \tag{1.7.23}$$

a solução geral da correspondente equação diferencial linear homogénea

$$y' + a(x)y = 0\,. \tag{1.7.24}$$

[1] O significado de homogeneidade aqui utilizado, é o algébrico. Não tem nada a ver com as funções homogéneas, que definimos aquando das equações diferenciais homogéneas.

Então a solução geral y_g da equação diferencial linear completa é dada por

$$y_g = y_h + y_p\,.$$

Demonstração: A demonstração consiste em determinar a expressão de uma solução particular. Para tal, vamos usar o Método de Variação das Constantes Arbitrárias (de Lagrange). Consideremos a solução geral (2.2.6) da correspondente equação diferencial linear homogénea (1.7.24). Procuremos a solução da equação completa (1.7.22) sob a forma de

$$y(x) = c(x)e^{-\int_{x_0}^{x} a(s)ds} \equiv c(x)y_{hp}(x), \tag{1.7.25}$$

onde $c(x)$ é uma nova função (desconhecida) de x e

$$y_{hp}(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} a(s)ds}$$

é uma solução particular, ao considerar $C = 1$ em (2.2.6), da equação diferencial linear homogénea (1.7.24). Substituindo (1.7.25) na equação (1.7.22) obtemos

$$c'y_{hp} + cy'_{hp} + a(x)cy_{hp} = c'y_{hp} + c(y'_{hp} + a(x)y_{hp}) = b(x) \Rightarrow c' = \frac{b(x)}{y_{hp}}.$$

Integrando a última equação em ordem a x, obtemos

$$c = \int_{x_0}^{x} \frac{b(s)}{y_{hp}(s)}ds + C_0 = \int_{x_0}^{x} b(s)e^{\int_{s_0}^{s} a(t)dt}\,ds + C_0 \quad C_0 = constante\,.$$

Então, por (1.7.25), uma solução da equação diferencial não homogénea (1.7.22) tem a forma

$$y(x, C_0) = c(x)e^{-\int_{x_0}^{x} a(s)ds} = \left(\int_{x_0}^{x} b(s)e^{\int_{s_0}^{s} a(t)dt}\,ds + C_0\right)e^{-\int_{x_0}^{x} a(s)ds}\,.$$

Obtivemos, assim, a fórmula (1.7.20). Portanto, a solução particular da equação diferencial (1.7.22) é

$$y_p = e^{-\int_{x_0}^{x} a(s)ds}\int_{x_0}^{x} b(s)e^{\int_{s_0}^{s} a(t)dt}\,ds\,.$$

□

Na proposição anterior, as soluções particulares são quaisquer soluções gerais quando se concretiza a constante C. Na maioria das situações, o mais simples é considerar $C = 1$. Das duas proposições anteriores, podemos escrever a solução geral y_g de uma equação diferencial linear completa

$$y' + a(x)y = b(x)\,,$$

como

$$y_g = u_g\,v_p\,,$$

onde $v_p = v_p(x)$ é uma solução particular da equação diferencial linear homogénea

$$v' + a(x)v = 0$$

e $u_g = u_g(x)$ é a solução geral da equação diferencial de variáveis separáveis

$$u'v_p = b(x)\,,$$

com $v_p = v_p(x)$ conhecida.

Exemplo 1.7.2. Considere a equação diferencial linear seguinte:

$$y' + y = 1\,.$$

a) Determine a solução geral da equação diferencial linear homogénea associada.
b) Determine uma solução particular da equação diferencial dada.
c) Indique a solução geral da equação diferencial linear dada.

Exercícios

1. Resolva as equações diferenciais lineares seguintes:

   (a) $x^2y' + xy + 1 = 0;$

   (b) $y' + \operatorname{tg}(x)\,y = \operatorname{sen}(2x);$

   (c) $y' + \dfrac{y}{x^2} = 2xe^{\frac{1}{x}};$

   (d) $\cos^2(x)\,y' + 3y = 1;$

   (e) $y' - y = e^{-2x};$

   (f) $(1+x^2)dy = \left[\sqrt{1+x^2}\,\operatorname{sen}(x) - xy\right] dy;$

   (g) $y' + 2xy = x;$

   (h) $xy' - y - x^2 =;$

   (i) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2y}{x} = x^3;$

   (j) $x\dfrac{dy}{dx} - 4y = x^6e^x;$

   (k) $y' + \dfrac{y}{x} = -xy^2;$

   (l) $2xy' + y - \dfrac{2x^2}{y^3} = 0.$

1.8 Equações diferenciais de Bernoulli

Definição 1.8.1. Uma equação diferencial de Bernoulli é uma equação da forma

$$y' + a(x)y = b(x)y^{\alpha}\,, \qquad \text{com} \quad \alpha \neq 0, \quad \alpha \neq 1,$$

onde $a(x)$ e $b(x)$ são funções contínuas num mesmo intervalo (a, b).

Se $\alpha = 0$, obtemos uma equação diferencial linear completa

$$y' + a(x)y = b(x)\,.$$

No caso de $\alpha = 1$, temos uma equação diferencial linear homogénea

$$y' + (a(x) - b(x))\,y = 0\,.$$

Proposição 1.8.1. Consideremos uma equação diferencial de Bernoulli da forma

$$y' + a(x)y = b(x)y^{\alpha}\,, \qquad \text{com} \quad \alpha \neq 0, \quad \alpha \neq 1. \tag{1.8.26}$$

A substituição

$$y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}\,, \qquad z = z(x)\,, \tag{1.8.27}$$

transforma a equação diferencial de Bernoulli numa equação diferencial linear em z:

$$z' + (1-\alpha)a(x)z = (1-\alpha)b(x). \tag{1.8.28}$$

Demonstração: De facto, temos

$$(1.8.27) \Rightarrow y' = \frac{1}{1-\alpha} z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} z' .$$

Substituindo em (1.8.26), obtemos

$$\frac{1}{1-\alpha} z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} z' + a(x) z^{\frac{1}{1-\alpha}} = b(x) z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} .$$

Multiplicando ambos os membros desta última equação por

$$(1-\alpha) z^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} ,$$

obtemos a equação diferencial linear (1.8.28). □

A proposição anterior permite-nos reduzir uma equação diferencial de Bernoulli a uma equação diferencial linear, que já sabemos resolver. Por (1.7.20), a solução geral da equação diferencial (1.8.28) é

$$z(x) = e^{-(1-\alpha)\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds} \left(\int_{x_0}^{x} (1-\alpha) b(s) e^{(1-\alpha)\int_{s_0}^{s} a(t)\,dt}\, ds + C \right) . \tag{1.8.29}$$

Depois de determinada a solução geral da equação diferencial linear em x e z, temos de voltar à variável inicial y pela substituição inversa:

$$z = y^{1-\alpha} .$$

Deste modo, sai de (1.8.29), que a solução geral da equação diferencial de Bernoulli (1.8.26) é dada por

$$y = \left[e^{-(1-\alpha)\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds} \left(\int_{x_0}^{x} (1-\alpha) b(s) e^{(1-\alpha)\int_{s_0}^{s} a(t)\,dt}\, ds + C \right) \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} .$$

Exemplo 1.8.1. Determine a solução geral da equação diferencial de Bernoulli seguinte:

$$y' + \frac{1}{x} y = 3y^3 .$$

Exercícios

Resolva as equações diferenciais seguintes usando os procedimentos desta secção:

a) $y' - 2ye^x - 2\sqrt{y}e^x = 0$; b) $y' + y = y^2$; c) $y' + x^2 y = \dfrac{e^{-x^3}\,\mathrm{senh}(x)}{3y^2}$.

1.9 Equações diferenciais de Ricatti

Definição 1.9.1. Chama-se equação diferencial de Ricatti, a uma equação diferencial da forma

$$y' + a(x)y + b(x) = c(x)y^2 ,$$

onde $a(x)$, $b(x)$ e $c(x)$ são funções contínuas num mesmo intervalo de $\mathbb{R}$.

Se $b(x) \equiv 0$, a equação diferencial de Ricatti reduz-se a um caso particular da equação diferencial de Bernoulli com $\alpha = 2$. No caso de $c(x) \equiv 0$, reduz-se a uma equação diferencial linear, que será homogénea se também $b(x) \equiv 0$.

Proposição 1.9.1. Seja y_p uma solução particular da equação diferencial de Ricatti

$$y' + a(x)y + b(x) = c(x)y^2 . \tag{1.9.30}$$

Então a substituição

$$y = y_p + \frac{1}{z}, \qquad z = z(x), \tag{1.9.31}$$

transforma a equação diferencial de Ricatti numa equação diferencial linear em z

$$z' + [2c(x)y_p - a(x)]\, z = -c(x) . \tag{1.9.32}$$

Demonstração: Tem-se

$$(1.9.31) \Rightarrow y' = y_p' - \frac{z'}{z^2}.$$

Substituindo em (1.9.30), obtemos

$$y_p' + a(x)y_p + b(x) - \frac{z'}{z^2} + \frac{a(x)}{z} = c(x)y_p^2 + \frac{2c(x)y_p}{z} + \frac{c(x)}{z^2} .$$

Como y_p é uma solução particular de (1.9.30), $y_p' + a(x)y_p + b(x) = 0$ e, consequentemente, temos

$$-\frac{z'}{z^2} + \frac{a(x)}{z} = \frac{2c(x)y_p}{z} + \frac{c(x)}{z^2} .$$

Multiplicando esta última equação por $-z^2$, obtemos a equação diferencial linear (1.9.32). □

O resultado anterior reduz a equação diferencial de Ricatti a uma equação diferencial linear. Por (1.7.20), a solução geral da equação diferencial (1.9.32) é

$$z(x) = e^{-\int_{x_0}^{x}(2c(s)y_p(s)-a(s))ds}\left(-\int_{x_0}^{x} c(s)e^{\int_{s_0}^{s}(2c(t)y_p(t)-a(t))dt}ds + C\right). \tag{1.9.33}$$

Depois de determinada a solução geral da equação diferencial linear em z, voltamos à variável y pela substituição inversa:

$$z = \frac{1}{y - y_p} .$$

A solução geral da equação diferencial de Ricatti é, assim, dada por:

$$y = y_p + \left[e^{-\int_{x_0}^{x}(2c(s)y_p(s)-a(s))ds}\left(-\int_{x_0}^{x} c(s)e^{\int_{s_0}^{s}(2c(t)y_p(t)-a(t))dt}ds + C\right)\right]^{-1} .$$

Exemplo 1.9.1. Determine a solução geral da equação diferencial de Ricatti seguinte:

$$y' = y^2 + (1-2x)y + x^2 - x + 1 ,$$

sabendo que $y_p = x$ é uma sua solução particular.

Exercícios

1. Resolva as equações diferenciais seguintes, sabendo que as funções y_p indicadas são soluções particulares:
   a) $y' - (2x^3+1)y = -x^2y^2 - x^4 - x + 1, \quad y_p = x$;
   b) $y' + (3 - 2x^2\operatorname{sen}(x))y = -\operatorname{sen}(x)y^2 + 2x + 3x^2 - x^4\operatorname{sen}(x), \quad y_p = x^2$.

2. Resolva a equação diferencial seguinte, sabendo que tem duas soluções constantes:

$$y' + y^2 + y = 2 .$$

1.10 Equações diferenciais de Clairaut

Nas duas secções anteriores, vimos exemplos de equações diferenciais não-lineares onde a não linearidade resultou de considerarmos potências da variável dependente y. Vamos, agora, ver um caso em que a não linearidade pode resultar de uma potência de y'.

Definição 1.10.1. Chama-se equação diferencial de Clairaut, a uma equação diferencial da seguinte forma

$$y = x\,y' + \psi(y')\,,$$

onde $\psi(y')$ é uma função derivável na variável y'.

Se $\psi(y')$ é constante, ou se $\psi(y') = a(x)y'$, com a função contínua num intervalo de $\mathbb{R}$, obtemos uma equação diferencial de variáveis separáveis.

Proposição 1.10.1. Consideremos a equação diferencial de Clairaut

$$y = x\,y' + \psi(y')\,, \tag{1.10.34}$$

onde $\psi(y')$ é uma função derivável na variável y'. Então:

1. A solução geral da equação diferencial (1.10.34) é a família de rectas
$$y = Cx + \psi(C)\,,\quad C = Constante\,. \tag{1.10.35}$$
2. Existe uma solução singular que se obtém como resultado da eliminação do parâmetro p do sistema de equações
$$\begin{cases} x = -\psi'(p) \\ y = px + \psi(p)\,. \end{cases} \tag{1.10.36}$$

Demonstração: Começamos por substituir, em (1.10.34), y' por p, onde $p = p(x)$:

$$y = xp + \psi(p)\,. \tag{1.10.37}$$

Derivando em ordem a x, obtemos:

$$p = p + x\frac{d\,p}{x} + \psi'(p)\frac{d\,p}{d\,x} \Leftrightarrow (x + \psi'(p))\,\frac{d\,p}{d\,x} = 0\,.$$

Por consequência, temos

$$\frac{d\,p}{d\,x} = 0 \qquad \text{ou} \qquad x + \psi'(p) = 0\,.$$

Do primeiro caso, sai que $p = Constante$ e obtemos a solução geral (1.10.35). Pelo segundo, conjugado com (1.10.37), obtemos o sistema de equações (1.10.36). □

Exemplo 1.10.1. Determine todas as soluções da equação diferencial de Clairaut seguinte:

$$y = xy' - \frac{1}{4}(y')^2\,.$$

Exemplo 1.10.2. Determine uma equação diferencial de Clairaut de modo que $y = x^3$ seja uma sua solução.

Exercícios

1. Determine todas as soluções das equações diferenciais seguintes:

$$\text{a) } y = xy' + \frac{1}{y'}\,; \qquad \text{b) } \sqrt{y'} - xy' + y = 0\,.$$

2. Determine uma equação diferencial de Clairaut de modo que $y = -x^2$ seja uma sua solução.

1.11 Equações diferenciais de Lagrange

Definição 1.11.1. Chama-se equação diferencial de Lagrange, a uma equação diferencial da seguinte forma

$$y = x\,\phi(y') + \psi(y')\,,$$

onde $\phi(y')$ e $\psi(y')$ são funções deriváveis na variável y'.

Se $\phi(y') = y')$, estamos perante uma equação diferencial de Clairuat.

Proposição 1.11.1. Consideremos a equação diferencial de Lagrange

$$y = x\,\phi(y') + \psi(y')\,, \tag{1.11.38}$$

onde $\phi(y')$ e $\psi(y')$ são funções deriváveis na variável y'. Então:

1. A solução geral da equação diferencial (1.11.38) é dada, de forma paramétrica, pelo sistema de equações:
$$\left\{\begin{array}{l} x = e^{\int_{p_0}^{p} \frac{\phi'(s)}{s-\phi(s)}ds} \left(\int_{p_0}^{p} \frac{\psi'(s)}{s-\phi(s)} e^{-\int_{s_0}^{s} \frac{\phi'(t)}{t-\phi(t)}dt} ds + C\right) \\ y = x\,\phi(p) + \psi(p)\,. \end{array}\right. \tag{1.11.39}$$
onde $f(p)$ é uma função conhecida .

2. Se $p - \psi(p) = 0$, existe uma solução singular que é dada, de forma paramétrica, pelo sistema de equações
$$\left\{\begin{array}{l} p - \phi(p) = 0 \\ y = x\phi(p) + \psi(p)\,. \end{array}\right. \tag{1.11.40}$$

Demonstração: Em (1.11.38), substituímos y' por p, onde $p = p(x)$:

$$y = x\,\phi(p) + \psi(p)\,. \tag{1.11.41}$$

Derivando em ordem a x, obtemos

$$p = \phi(p) + x\phi'(p)\frac{d\,p}{d\,x} + \psi'(p)\frac{d\,p}{d\,x} \Leftrightarrow p - \phi(p) = \left[x\phi'(p) + \psi'(p)\right]\frac{d\,p}{d\,x}\,. \tag{1.11.42}$$

Admitindo que $p - \phi(p) \neq 0$, obtemos por inversão da equação anterior

$$\frac{d\,x}{d\,p} - \frac{\phi'(p)}{p - \phi(p)}x = \frac{\psi'(p)}{p - \phi(p)}\,. \tag{1.11.43}$$

Obtivemos assim uma equação diferencial linear em $x = x(p)$:

$$x' + a(p)x = b(p)\,, \qquad a(p) = -\frac{\phi'(p)}{p - \phi(p)}\,, \quad b(p) = \frac{\psi'(p)}{p - \phi(p)}\,;$$

cuja solução geral é dada por

$$x(p) = e^{\int_{p_0}^{p} \frac{\phi'(s)}{s-\phi(s)}ds} \left(\int_{p_0}^{p} \frac{\psi'(s)}{s - \phi(s)} e^{-\int_{s_0}^{s} \frac{\phi'(t)}{t-\phi(t)}dt} ds + C \right)\,.$$

Então, por (1.11.41), a solução geral da equação diferencial de Lagrange (1.11.38) é dada, de forma paramétrica, por (1.11.39). Se, porventura, $p - \phi(p) = 0$, então obtemos uma solução singular que é dada, também de forma paramétrica, por (1.11.40). □

Sempre que possível, devemos eliminar o parâmetro p dos sistemas (1.11.39) e (1.11.40) de modo a obtermos uma relação de x e y apenas.

Observe-se que, na passagem de (1.11.42) para (1.11.43), dividimos por $\frac{dp}{dx}$. Isto faz com que as eventuais soluções para as quais p é constante sejam perdidas. Tomando p como constante, a equação (1.11.42) é satisfeita apenas quando p é uma raiz da equação $p - \phi(p) = 0$. Assim, se $p - \phi(p) = 0$ tem raízes reais, obtemos as soluções singulares dadas por (1.11.40). No caso da equação $p - \phi(p) = 0$ não ter raízes reais, não existem soluções singulares.

Exemplo 1.11.1. Determine todas as soluções da equação diferencial de Lagrange seguinte:

$$y = x(1 + y') + (y')^2\,.$$

Exercícios

Determine todas as soluções das equações diferenciais seguintes:

$$\text{a) } y = \frac{1}{2}x\left(y' + \frac{4}{y'}\right)\,; \qquad \text{b) } y = y' + \sqrt{1 - (y')^2}$$

1.12 Problema de Cauchy

Consideremos uma equação diferencial escrita do modo seguinte:

$$F(x, y, y') = 0\,.$$

Definição 1.12.1. O **Problema de Cauchy** consiste em, dado um ponto (x_0, y_0) na projecção relativa a (x, y) do domínio de $\mathbb{R}^3$ da função F, encontrar soluções $y = y(x)$, definidas em algum intervalo (a, b), tais que $x_0 \in (a, b)$ e

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0 \\ y(x_0) = y_0\,. \end{cases}$$

O par (x_0, y_0) designa-se por **dados de Cauchy** ou **dados iniciais** e a correspondente equação $y(x_0) = y_0$, por **condição de Cauchy** ou **condição inicial**. Neste sentido, o problema de Cauchy é muitas vezes designado por **problema de valor inicial**.

Geometricamente, o problema de Cauchy consiste em determinar a curva integral, da equação diferencial $F(x, y, y') = 0$, que passa por um dado ponto (x_0, y_0) do plano xy.

A questão que agora se coloca é a de saber se todo o problema de Cauchy vai ter uma solução e se esta solução é única. De seguida apresentamos um resultado de existência para equações diferenciais que se podem escrever na forma normal $y' = f(x, y)$. Consideremos, então, o problema de Cauchy seguinte

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \,. \end{cases} \tag{1.12.44}$$

Proposição 1.12.1 (Existência e Unicidade)**.** Suponhamos que a função $f(x, y)$ satisfaz as condições seguintes:

1. f é uma função contínua em relação às variáveis x e y no domínio

$$\mathbb{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad |x - x_0| < a, \quad |y - y_0| < b\right\}, \tag{1.12.45}$$

onde a e b são constantes reais positivas;

2. $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existe e é contínua em relação às variáveis x e y em $\mathbb{D}$.

Então, existem $\varepsilon > 0$ e um intervalo $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ da variável x, no qual está definida uma única solução $y = y(x)$ do problema de Cauchy dado.

Demonstração: Vamos dividir a demonstração deste teorema em três partes distintas.

Parte 1 *Construir uma sucessão de funções $y_n(x)$ que, à medida que n cresce, melhor resolve o problema de Cauchy (1.12.44).*

Integrando ambos os membros de $y' = f(x, y)$ em ordem a x e usando a condição inicial $y(x_0) = y_0$, obtemos o problema integral equivalente a (1.12.44)

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt \,. \tag{1.12.46}$$

Consideramos, agora, a sucessão de soluções aproximadas y_n de (1.12.46) definidas recursivamente por

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t)\, dt \tag{1.12.47}$$

e mostremos que esta sucessão é convergente. Mostremos que, em qualquer iterada n de (1.12.47), o par $(x, y_n(x))$ está no domínio $\mathbb{D}$, ou seja que

$$|x - x_0| \leq a \Rightarrow |y_n(x) - y_0| \leq b \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \,. \tag{1.12.48}$$

Para isto, vamos mostrar, por indução, que para qualquer $n \in \mathbb{N}_0$ se tem

$$x_0 \leq x \leq x_0 + \varepsilon \Rightarrow |y_n(x) - y_0| \leq b \,, \tag{1.12.49}$$

onde ε será escolhido mais adiante de modo que (1.12.49) seja satisfeita no domínio $\mathbb{D}$. Antes do mais, observemos que da continuidade da função f nas variáveis x e y no domínio $\mathbb{D}$, existe uma constante real não negativa M tal que

$$M = \max_{(x,y)\in\mathbb{D}} |f(x, y)| \,. \tag{1.12.50}$$

Para $n = 0$, (1.12.49) é imediato. Admitamos que (1.12.49) é válido para um certo $n \in \mathbb{N}$ e mostremos que também é verdade para $n + 1$. Ora se é válido para n, temos que $|y_n(x) - y_0| \leq b$ e, como nesta iterada a função f é contínua, $|f(x, y_n(x))| \leq M$. Então para $n + 1$ temos

$$|y_{n+1}(x) - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\, dt\right| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y_n(t))|\, dt \leq M(x - x_0) \leq M\varepsilon \,. \tag{1.12.51}$$

Escolhemos, agora, ε de modo que $\varepsilon \leq a$ e $M\varepsilon \leq b$. Portanto, consideramos

$$\varepsilon = \min\left(a, \frac{b}{M}\right) .$$

De igual modo se prova que

$$x_0 - \varepsilon \leq x \leq x_0 \Rightarrow |y_n(x) - y_0| \leq b \,.\square \tag{1.12.52}$$

Finalmente, conjugando (1.12.49) e (1.12.52), permite mostrar (1.12.48)

Parte 2 *Mostrar que a sucessão $y_n(x)$ converge para uma função $y(x)$ no intervalo $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.*

Como

$$y_n(x) = y_0 + [y_1(x) - y_0] + [y_2(x) - y_1(x)] + \cdots + [y_n(x) - y_{n-1}(x)] ,$$

a convergência de $y_n(x)$ está directamente ligada à convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} [y_n(x) - y_{n-1}(x)] .$$

Numa primeira análise, temos

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y_{n-1}(t)) - f(t, y_{n-2}(t))| \, dt .$$

Pelo Teorema de Lagrange, temos

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq \int_{x_0}^{x} \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi)\right| |y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)| \, dt$$

para algum ξ entre $y_{n-1}(t)$ e $y_{n-2}(t)$. Por (1.12.48), sabemos que os pares $(x, y_n(x)$ pertencem ao domínio $\mathbb{D}$. Então, pela continuidade de $\frac{\partial f}{\partial y}$ em $\mathbb{D}$, temos

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq L \int_{x_0}^{x} |y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)| \, dt$$

onde

$$L = \max_{(x,y)\in\mathbb{D}} \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| .$$

Por outro lado, temos para $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$

$$|y_1(x) - y_0| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y_0)| \, dt \leq M(x - x_0) ,$$

$$|y_2(x) - y_1(x)| \leq L \int_{x_0}^{x} |y_1(t) - y_0| \, dt \leq ML \frac{(x - x_0)^2}{2} ,$$

$$|y_3(x) - y_2(x)| \leq L \int_{x_0}^{x} |y_2(t) - y_1(t)| \, dt \leq ML^2 \frac{(x - x_0)^3}{3!}$$

e por um processo indutivo, obtemos, para $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$ e para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq L \int_{x_0}^{x} |y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)| \, dt \leq ML^{n-1} \frac{(x - x_0)^n}{n!} .$$

De modo inteiramente análogo se prova que, para $x_0 - \varepsilon < x < x_0$ e para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq L \int_{x_0}^{x} |y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)| \, dt \leq ML^{n-1} \frac{(x_0 - x)^n}{n!} .$$

Temos, assim, que para $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} ML^{n-1}\frac{|x-x_0|^n}{n!} \leq \frac{M}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(L\varepsilon)^n}{n!} = \frac{M}{L}(e^{L\varepsilon}-1) < \infty\,.$$

Então, pelo Critério de Weierstrass[2] da convergência uniforme das séries, a série acima converge uniformemente para uma função soma $y_*(x)$ contínua no intervalo $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$. Por consequência, a sucessão de funções $y_n(x)$ converge uniformemente para uma função $y(x) = y_0 + y_*(x)$ contínua neste intervalo.

Parte 3 *Mostrar que a função $y(x)$ encontrada no passo anterior é, ainda, uma solução do Problema de Cauchy (1.12.44).*
Sabemos que a sucessão $y_n(x)$ satisfaz a igualdade integral (1.12.47). Fazendo então $n \to \infty$ nesta equação, obtemos

$$y(x) = y_0 + \lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt\,.$$

A demonstração desta parte consiste então em mostrar que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt\,.$$

Comecemos por observar que, por (1.12.48), o par (x, y) da função limite $y(x)$ pertence ao domínio $\mathbb{D}$, caso contrário existiriam sempre alguns pares $(x, y_n(x))$ que não estariam em $\mathbb{D}$.

Sem perda de generalidade, admitamos que $x_0 = 0$. Caso contrário, podemos sempre fazer a translação $x - x_0$. Primeiro notamos que o problema de Cauchy (1.12.44) é equivalente à equação integral seguinte:

$$y(x) = \int_0^x f\left(t, y(t)\right) dt. \tag{1.12.53}$$

Vamos construir uma sucessão $\{y_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funções, determinadas pela relação de recorrência

$$y_n(x) = \int_0^x f\left(t, y_{n-1}(t)\right) dt, \quad n = 1,\ 2,\ \dots\,.$$

Assim,

$$y_n'(x) = f\left(x, y_{n-1}(x)\right), \quad n = 1,\ 2,\ \dots\,.$$

Como aproximação inicial $y_0(x)$, podemos considerar qualquer função que seja contínua numa vizinhança do ponto $x = 0$, em particular, a função $y_0(x) = y_0$, onde y_0 é o valor inicial do problema de Cauchy (1.12.44). Vamos estabelecer uma estimativa *a priori* para as funções $y_n(x)$. Temos, por (1.12.50), que

$$\begin{aligned} |y_n(x)| &= \left|\int_0^x f(t, y_{n-1}(t))dt\right| \leq \int_0^x |f(t, y_{n-1}(t))|\, dt \\ &\leq M\int_0^h dt = Mh \leq b, \quad \text{se} \quad h \leq \frac{b}{M}. \end{aligned}$$

e

$$|y_n'| = |f(t, y_{n-1})| \leq M.$$

As últimas estimativas indicam que a sucessão $\{y_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é um conjunto compacto, isto é:

- o conjunto $\{y_n(t)\}$ é uniformemente limitado

$$|y_n(x)| \leq M\,;$$

[2] Ver Santos Guerreiro

- é equicontínuo
$$|y_n(x_1) - y_n(x_2)| = \left|\int_{x_1}^{x_2} f(t, y_n(t))dt\right| \leq M|x_1 - x_2|.$$

Então, de acordo com o Teorema de Arzela-Ascoli[3], podemos extrair uma subsucessão $\{y_{n_k}\}$ convergente. Vamos, agora, provar que toda sucessão y_n também converge uniformemente. Então, cada subsucessão tem o mesmo limite, que será a solução da equação diferencial. Seja

$$\lambda_n = y_n - y_{n-1}.$$

Cada uma das funções y_n e y_{n-1} satisfazem às equações seguintes

$$y_n(x) = \int_0^x f(t, y_{n-1}(t))dt, \quad n = 1,\ 2,\ \dots\ , \tag{1.12.54}$$

$$y_{n-1}(x) = \int_0^x f(t, y_{n-2}(t))dt, \quad n = 2,\ 3,\ \dots\ . \tag{1.12.55}$$

Subtraindo (1.12.55) a (1.12.54), obtemos

$$\lambda_n = y_n(x) - y_{n-1}(x) = \int_0^x \left(f(t, y_{n-1}(t)) - f(t, y_{n-2}(t))\right) dt.$$

Pelo Teorema de Lagrange,

$$f(t, y^{(1)}) - f(t, y^{(2)}) = \frac{\partial f}{\partial y}(t, y^*)(y^{(1)} - y^{(2)}), \quad y* \in \left[y^{(1)}, y^{(2)}\right], \tag{1.12.56}$$

para qualquer intervalo de extremos $y^{(1)}$ e $y^{(2)}$. Então, de acordo com a condição (**??**), obtemos as relações de recorrência

$$\begin{aligned} |\lambda_n| &= |y_n(x) - y_{n-1}(x)| = \left|\int_0^x \left(f(t, y_{n-1}(t)) - f(t, y_{n-2}(t))\right) dt\right| \\ &= \left|\int_0^x \frac{\partial f}{\partial y}(t, y^*)\left(y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)\right) dt\right| \leq C\int_0^{|x|} |\lambda_{n-1}(t_1)|dt_1 \\ &\leq C^2\int_0^{|x|} dt_1 \int_0^{t_1} |\lambda_{n-2}|dt_2 \leq C^{n-1}\int_0^{|x|} dt_1 \dots \int_0^{t_{n-2}} |\lambda_1|dt_{n-1}. \end{aligned} \tag{1.12.57}$$

É fácil verificar que

$$|\lambda_1| = |y_1(x)| = \left|\int_0^x f(x, y_0(x))dx\right| \leq M|x| \leq a, \quad |x| \leq h \leq \frac{a}{M},$$

e

$$\left|\underbrace{\int_0^x dt_1 \dots \int_0^{t_{n-1}} t_{n-1}dt_{n-1}}_{n-1}\right| = \frac{|x|^n}{n!}. \tag{1.12.58}$$

De facto, temos

$$\int_0^x t_1 dt_1 = \frac{x^2}{1\cdot 2}, \quad n = 2,$$

$$\int_0^x dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 = \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}, \quad n = 3,$$

[3]Ver, por exemplo, J.B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Springer-Verlag, p. 179.

e, voltando à desigualdade (1.12.57), obtemos

$$|\lambda_n| = |y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq \frac{MC^{n-1}h^n}{n!} = \varepsilon(n), \quad |x| < h \leq \frac{a}{M}.$$

É claro que

$$\varepsilon(n) \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Agora, introduzimos a série funcional

$$S_n(x) = y_0 + \sum_{k=1}^{n}(y_k - y_{k-1}) = y_n(x) = y_0 + \sum_{k=1}^{n} u_k(x).$$

É fácil verificar, pelo Critério de Weierstrass, que esta série converge uniforme e absolutamente. Efectivamente,

$$|u_k(x)| \leq M_k = \frac{MC^{k-1}h^k}{k!}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} M_k = \frac{M}{C}(e^{Ch} - 1) < \infty\,.$$

Isto significa que

$$\begin{aligned} y(x) &= \lim_{n\to\infty} y_n(x) = \lim_{n\to\infty} \int_0^x f(t, y_{n-1}(t))dt \qquad (1.12.59) \\ &= \int_0^x f(t, \lim_{n\to\infty} y_{n-1}(t))dt = \int_0^x f(t, y(t))dt, \end{aligned}$$

Unicidade. Suponhamos, com vista a um absurdo, que existiam duas soluções distintas

$$y_1(x) \quad \text{e} \quad y_2(x)$$

do problema de Cauchy (1.12.44). Então a sua diferença

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x) \neq 0$$

é solução da equação integral

$$y(x) = \int_0^x (f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t)))dt = \int_0^x G(t)y(t)dt, \qquad (1.12.60)$$

onde

$$G(t) = \frac{f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))}{y_1(t) - y_2(t)}.$$

Aplicando o Teorema de Lagrange como em (1.12.56) e, ainda, a condição (**??**), chegamos à estimativa

$$|G(t)| \leq \left|\frac{\partial f}{\partial y}(t, y^*)\right| \leq C.$$

Vamos denotar

$$\max_{\{|t|\leq|x|\}} |y(t)| = Y(x)$$

Da equação (1.12.60), resulta que

$$Y(x) \leq C\,|x|\,Y(x).$$

Escolhemos x tal que

$$C\,|x| \leq k < 1.$$

Então

$$Y(x)(1 - k) \leq 0.$$

Isto significa que

$$Y(x) = \max |y_1(x) - y_2(x)| \leq 0,$$

ou seja,

$$y_1(x) = y_2(x).$$

□

Exemplo 1.12.1. Verifique se os problemas de Cauchy seguintes satisfazem as condições do Teorema de Picard. Em caso afirmativo, determine as suas soluções.

$$\text{a)} \begin{cases} xy' = y \\ y(2) = 1\,; \end{cases} \qquad \text{b)} \begin{cases} y' = \sqrt{y} \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

A solução do Teorema de Picard, pode ser construída como o limite de uma sucessão das soluções aproximadas, como se transcreve na proposição seguinte.

Proposição 1.12.2. A solução do Problema de Cauchy (1.12.44) pode ser construída como o limite de uma sucessão das soluções aproximadas, dadas pela relação de recorrência seguinte:

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, y_{n-1}(t)\right) dt = \int_0^x f(t, y_{n-1}(t))dt, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{1.12.61}$$

A estimativa do erro cometido, ao substituirmos a solução exacta pela *n-ésima* aproximação $y_n(x)$ é dada pela desigualdade

$$|y_n(x) - y(x)| \leq \frac{MC^{(n-1)}}{n!} h^n = \varepsilon(n) \to 0,$$

quando $n \to \infty$.

Demonstração: Seja

$$\Delta y_n = y(x) - y_n$$

onde

$$y(x) = \int_0^x f(t, y(t))dt. \tag{1.12.62}$$

Subtraindo (1.12.61) a (1.12.62), obtemos

$$\Delta y_n = y(x) - y_n(x) = \int_0^x \left(f(t, y(t)) - f(t, y_n(t))\right) dt.$$

Utilizando o Teorema de Lagrange como em (1.12.56), podemos escrever

$$f(t, y(t)) - f(t, y_n(t) = \frac{\partial f}{\partial y}(t, y^*)(y(t) - y_n(t)),$$

onde $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leq C$. Obtemos, então, as relações de recorrência

$$|\Delta y_n| = |y(x) - y_n(x)| \leq C \left|\int_0^x |\Delta y_{n-1}| dt_1\right| \tag{1.12.63}$$

$$\leq C^2 \left|\int_0^x dt_1 \int_0^{t_1} |\Delta y_{n-2}| dt_2\right| \leq C^{n-1} \left|\int_0^x dt_1 \ldots \int_0^{t_{n-2}} |\Delta y_0| dt_{n-1}\right|.$$

É fácil verificar que

$$|\Delta y_0| = |y(x)| \leq \left|\int_0^x f(x, y(x))dx\right| \leq Mh, \quad |x| \leq h.$$

Voltando à desigualdade (1.12.63) e aplicando a relação (1.12.58), obtemos

$$|\Delta y_n| = |y(x) - y_n(x)| \leq \frac{MC^{n-1}h^n}{n!} = \varepsilon(n), \quad |x| < h,$$

onde

$$\varepsilon(n) \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty,$$

o que conclui a demonstração. □

As aproximações anteriores são designadas por **aproximações de Picard**. Estas aproximações dão-nos um método numérico para obtermos o valor aproximado da solução do Problema de Cauchy. Deste modo, a sucessão y_n, das soluções aproximadas, converge uniformemente para a solução exacta y do Problema de Cauchy. A solução $y(x)$, do Problema de Cauchy, obtida por este processo, é única.

Exemplo 1.12.2. Considere o Problema de Cauchy seguinte:

$$\begin{cases} y' = 1 + y^2 \\ y(2) = 1\,; \end{cases} .$$

a) Determine as três primeiras aproximações de Picard.
b) Determine a solução do Problema de Cauchy.
c) Compare o valor da aproximação de Picard $y_3(x)$ com o da solução exacta $y(x)$ no ponto $x = 0$.

Exercícios

1. Considere os Problemas de Cauchy seguintes:

$$\text{(A)} \begin{cases} y' = -x \\ y(0) = 2 \end{cases} ; \qquad \text{(B)} \begin{cases} yy' + x = 0 \\ y(3) = 4 \end{cases} .$$

a) Mostre que estes Problemas de Cauchy satisfazem as condições do Teorema de Existência e Unicidade de Solução.
b) Calcule essas soluções.

2. Mostre que os Problema de Cauchy seguintes

$$\text{(A)} \begin{cases} (x-1)y' = 2y \\ y(1) = 1 \end{cases} ; \qquad \text{(B)} \begin{cases} y' = \sqrt{|y|} \\ y(0) = 0 \end{cases} .$$

não satisfazem as condições do Teorema de Existência e Unicidade de Solução, indicando se o que falha é a existência ou a unicidade de solução.

3. Resolva os Problemas de Cauchy seguintes:

$$\text{(A)} \begin{cases} xy' - y - x\cos^2\left(\frac{y}{x}\right) = 0 \\ y(1) = \frac{\pi}{4} \end{cases} ; \qquad \text{(B)} \begin{cases} y' + \frac{\operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x + x^{-1}}{x\cos y - \cos x - y^{-1}} = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \end{cases} .$$

4. Considere os Problemas de Cauchy seguintes:

$$\text{(A)} \begin{cases} y' = y \\ y(0) = 2 \end{cases} ; \qquad \text{(B)} \begin{cases} y' = 1 + y^2 \\ y(2) = 1 \end{cases} ; \qquad \text{(C)} \begin{cases} y' = 1 - y^3 \\ y(0) = 0 \end{cases} .$$

Para cada um deste problemas:
a) determine as **aproximações de Picard** y_1 , y_2 e y_3 da solução desses problemas.
b) usando y_3, estime o valor de $y(1)$ para cada problema.
c) calcule as soluções exactas dos problemas e compare o valor destas no ponto $x = 1$ com os estimados na alínea anterior.

1.13 Interpretação Geométrica

Consideremos uma equação diferencial escrita na forma normal

$$y' = f(x, y)\,. \qquad (1.13.64)$$

Esta equação diferencial tem uma interpretação geométrica simples. Sabemos que, em cada ponto do seu domínio, a derivada $y'(x)$ de $y(x)$ nos dá o declive da curva $y(x)$. Deste modo, uma solução da equação (1.13.64) que passa por um ponto (x_0, y_0) tem de ter nesse ponto o declive $y'(x_0)$ igual ao valor da função f no mesmo ponto

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0)\,.$$

Então, podemos indicar direcções das curvas integrais de (1.13.64) esboçando no plano xy pequenos e finos segmentos de recta, para os unir a seguir e, assim, obter o esboço aproximado das curvas integrais.

Definição 1.13.1. Consideremos a equação diferencial (1.13.64). Chama-se **campo de direcções** da equação diferencial (1.13.64) a uma colecção de pequenos e finos segmentos de recta tangentes às curvas integrais.

Este método é importante, porque não necessitamos de resolver a equação diferencial (1.13.64) para saber o aspecto das curvas integrais. Além do mais, muitas equações diferenciais têm soluções complicadas, ou pura e simplesmente não é possível determiná-las. Por outro lado, este método mostra-nos os gráficos de todas as soluções e as suas propriedades mais importantes. O único senão, é que se trata apenas de um esboço e, por isso, não é muito rigoroso.

Exemplo 1.13.1. Esboce o campo de direcções, bem como uma curva integral, da equação diferencial

$$y' = x^2 + y^2\,.$$

O método anterior dos campos de direcções pode ficar bastante mais simples se primeiro esboçarmos as isoclínicas, isto é, as curvas de igual inclinação.

Definição 1.13.2. Consideremos uma equação diferencial escrita na forma normal (1.13.64). Chama-se **isoclínica** a uma curva ao longo da qual a equação diferencial (1.13) tem um valor constante.

As isoclínicas de uma equação diferencial são obtidas fazendo

$$f(x, y) = C$$

para vários valores da constante C. Os campos de direcções são esboçados, desenhando ao longo das isoclínicas de equação $f(x, y) = C$ pequenos e finos segmentos de recta com declive igual a $\operatorname{arctg}(C)$. Deste modo, as isoclínicas juntamente com os campos de direcções correspondentes, constituem uma das formas mais simples de se esboçar uma curva integral e, assim, conhecer o tipo de soluções da equação diferencial.

Exemplo 1.13.2. Usando a técnica das isoclínicas e campos de direcções, esboce o campo de direcções, bem como uma curva integral, da equação diferencial

$$y' = x^2 + y^2\,.$$

Outro método de obter curvas integrais é conhecido na literatura por **Método da Tangente** ou **Poligonais de Euler**. Para explicar este método, consideremos uma equação diferencial escrita na forma normal

$$y' = f(x, y)\,.$$

Já sabemos que esta equação determina, no domínio de f, o campo de direcções. Tomemos neste domínio um ponto (x_0, y_0). Neste ponto, há uma direcção que coincide com a direcção da recta

$$y = f(x_0, y_0)(x - x_0) + y_0\,.$$

Nesta recta, e no domínio considerado, tomamos um ponto (x_1, y_1), onde x_1 é escolhido próximo de x_0 e

$$y_1 = f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) + y_0 .$$

No ponto (x_1, y_1) também há uma direcção que coincide com a direcção da recta

$$y = f(x_1, y_1)(x - x_1) + y_1 .$$

Depois, escolhemos nesta recta, e no domínio considerado, um ponto (x_2, y_2), onde x_2 é escolhido próximo de x_1, seguindo a direcção que vai de x_0 para x_1, e

$$y_2 = f(x_1, y_1)(x_2 - x_1) + y_1 .$$

Agora, no ponto (x_2, y_2) há uma direcção que coincide com a direcção da recta

$$y = f(x_2, y_2)(x - x_2) + y_2 .$$

O processo repete-se assim por diante até obtermos uma linha quebrada que se denomina por **Poligonal de Euler**. A escolha de x_1 à esquerda ou à direita de x_0 leva-nos, por este processo, para esse sentido: esquerda ou direita. Depois de uns quantos passos neste sentido, convém fazer uns quantos no sentido oposto ao escolhido a partir de x_0. O processo termina quando já temos uma linha quebrada com suficientes ramos para podermos esboçar a curva integral. Portanto, a curva integral é, então, tangente a esta linha poligonal.

Exemplo 1.13.3. Esboce a Poligonal de Euler correspondente à curva integral da equação diferencial $y' = x^2 + y^2$, com $y(1) = 0$.

Exercícios

1. Usando a teoria dos campos direccionais e das isoclínicas, esboce as curvas integrais das equações diferenciais seguintes:

$$\text{a) } y' = \frac{3-y}{2}\,; \qquad \text{b) } y' = e^{-x} - 2y\,; \qquad \text{c) } y' = (1-y)(2-y)\,.$$

2. Esboce as poligonais de Euler das soluções dos Problemas de Cauchy seguintes:

$$\text{(A) } \begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases} ; \qquad \text{(B) } \begin{cases} y' = x + y \\ y(1) = 1 \end{cases} ; \qquad \text{(C) } \begin{cases} y' = -\frac{y}{1+x} \\ y(0) = 2 \end{cases} .$$

1.14 Aplicações

1.14.1 Problemas de crescimento ou decrescimento

Seja $N(t)$ a quantidade de uma substância (ou população) sujeita a um processo de crescimento ou decrescimento. Admitamos que a taxa de variação da quantidade de substância é proporcional à quantidade de substância presente. Então, entre os instantes t e $t + \Delta t$ dá-se a variação seguinte da quantidade em questão:

$$N(t + \Delta t) = N(t) + kN(\xi)\Delta t\,; \tag{1.14.65}$$

onde k é a constante de proporcionalidade e $\xi \in [t, t + \Delta t]$ é um instante de referência. Fazendo $\Delta t \to 0$, implica que $\xi \to t$ e, de (1.14.65), obtemos a equação diferencial seguinte

$$\frac{dN}{dt} = kN\,. \tag{1.14.66}$$

Admitimos que $N(t)$ é uma função derivável e, por consequência, contínua no tempo. Nos problemas relativos ao estudo de populações, a função $N(t)$ é, na realidade, discreta. Não obstante, (1.14.66) dá uma boa aproximação para as leis que regem tais problemas.

Exemplo 1.14.1 (Decaimento radioactivo)**.** Sabe-se que a quantidade de uma substância radioactiva diminui a uma taxa proporcional à quantidade de material existente. A quantidade inicial é N_0. Verifica-se que, após duas horas, se perderam 10% da massa original. Determine:

a) a expressão para a massa da substância restante num instante de tempo arbitrário;

b) a massa restante após 4 horas;

c) o tempo necessário para que a massa inicial fique reduzida a metade.

Resolução.

a) Seja $N(t)$ a quantidade de substância presente no instante t horas e N_0 a quantidade de substância inicial. Então a solução da equação (1.14.66) tem a forma

$$N(t) = N_0 e^{kt}. \tag{1.14.67}$$

Quando $t = 2$ horas, já se perderam 10%, i.e.,

$$N(2) = 0,9N_0 = N_0 e^{2k}.$$

Daqui, sai que

$$2k = \ln 0,9, \quad k = \frac{1}{2}\ln 0,9 < 0.$$

b) Calculamos o valor $N(4)$ usando (1.14.67).

$$N(4) = N_0 e^{4k}.$$

c) Calculamos o valor do tempo t_1, em que

$$N(t_1) = N_0 e^{kt_1} = \frac{1}{2}N_0.$$

Resolvendo a equação em relação t_1, temos

$$t_1 = \frac{1}{k}\ln\frac{1}{2}.$$

Exemplo 1.14.2 (Dinâmica de populações)**.** Suponhamos que a população de determinada cidade era no ano 2000 de x indivíduos e que passado um ano era de y. Admitindo que o crescimento da população é proporcional à população existente, determine uma equação que nos dê o número de indivíduos nessa cidade em qualquer ano posterior.

Sejam $P(t)$ o número de indivíduos no ano t e k a constante de proporcionalidade. Então, podemos escrever uma equação que nos dá o número de indivíduos em qualquer ano $t + \Delta t$ posterior

$$P(t + \Delta t) = P(t) + P_{[t,t+\Delta t]}\,,$$

onde $P_{[t,t+\Delta t]}$ representa os novos indivíduos na cidade entre os instantes t e $t + \Delta t$. Sabendo que o crescimento é proporcional à população existente, inferimos que no instante $\xi \in [t, t + \Delta t]$, o número de nonos indivíduos é dado por

$$kP(\xi)\,, \quad xi \in [t, t + \Delta t]\ .$$

Com este conhecimento, podemos dar um valor aproximado para $P_{[t,t+\Delta t]}$,

$$P_{[t,t+\Delta t]} = kP(\xi)\Delta t\,, \quad xi \in [t, t+\Delta t]\ .$$

Deste modo, obtemos a equação seguinte

$$P(t+\Delta t) = P(t) + kP(\xi)\Delta t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t} = kP(\xi)\,.$$

Fazendo $\Delta t \to 0$ e observando que, nesse caso, $\xi \to t$, obemos a equação diferencial seguinte

$$P'(t) = kP(t) \quad P'(t) - kP(t) = 0\,,$$

cuja solução é dada por

$$P(t) = Ce^{kt}\,.$$

Para determinar as constantes C e k, vamos agora usar os dados do problema. Para tal, definamos o ano inicial $t_0 = 0$ como sendo o ano 2000. Temos então

$$\begin{cases} P(0) = x \\ P(1) = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = x \\ k = \ln\left|\frac{y}{x}\right|\ . \end{cases}$$

Concluimos então que a equação que representa o crescimento da população em qualquer instante t posterior é dada por

$$P(t) = xe^{\frac{y}{x}t}\,.$$

1.14.2 Problemas de diluição

Consideremos um tanque com uma quantidade inicial de V_0 litros de determinado solvente, contendo $\mathfrak{a}$ quilogramas de um soluto. Despeja-se no tanque uma outra solução do mesmo solvente com $\mathfrak{b}$ quilogramas do mesmo soluto por litro à razão de $\mathfrak{e}$ litros por minuto. Simultaneamente, a solução resultante, que se supõe bem misturada (homogénea), escoa-se do tanque à razão de $\mathfrak{f}$ litros por minuto. O problema consiste em determinar a quantidade de soluto presente no tanque num instante arbitrário t. Seja $Q(t)$ a quantidade de soluto (em quilogramas) presente no tanque no instante t. A quantidade de soluto no instante $t+\Delta t$ é igual à quantidade inicial de soluto no tanque ($\mathfrak{a}$), mais aquela que entra ($\mathfrak{b}$), menos a que se escoa do tanque entre os instantes t e $t+\Delta t$. Portanto, tem-se:

$$Q(t+\Delta t) = Q(t) + \big(Q_{\text{entra}}(\xi) - Q_{\text{sai}}(\xi)\big)\,\Delta t\,; \tag{1.14.68}$$

onde $\xi \in [t, t+\Delta t]$ é um instante de referência. Por outro lado, sabemos que o soluto entra no tanque à razão de $\mathfrak{be}$ quilogramas por minuto. Logo,

$$Q_{\text{entra}}(\xi) = \mathfrak{b}\,. \tag{1.14.69}$$

Para determinarmos a quantidade que sai, devemos, primeiro, calcular o volume da solução presente no tanque no instante t. Este, é dado pelo volume no instante inicial $t = t_0$ (V_0), mais o volume adicionado entre o instante inicial e o instante t ($(t-t_0)\mathfrak{e}$) e menos o volume escoado ($(t-t_0)\mathfrak{f}$). Assim, o volume da solução no instante t é dado por:

$$V(t) = V_0 + (\mathfrak{e} - \mathfrak{f})(t - t_0).$$

A concentração do soluto no tanque, num instante t qualquer, é dada por

$$\frac{Q(t)}{V(t)} = \frac{Q(t)}{[V_0 + (\mathfrak{e} - \mathfrak{f})(t - t_0)]}.$$

Donde se infere que o soluto sai do tanque à taxa de

$$\frac{Q(t)}{[V_0 + (\mathfrak{e} - \mathfrak{f})(t - t_0)]}f$$

quilogramas por minuto. Então,

$$Q_{\text{sai}}(\xi) = \frac{Q(\xi)}{[V_0 + (\mathfrak{e} - \mathfrak{f})(\xi - t_0)]}\mathfrak{f}\,. \tag{1.14.70}$$

Assim, por (1.14.68), (1.14.69) e (1.14.70), a quantidade de soluto no instante $t + \Delta\, t$ é dada pela equação

$$Q(t + \Delta\, t) = Q(t) + \left[\mathfrak{b}\mathfrak{e} - \frac{Q(\xi)}{[V_0 + (\mathfrak{e} - \mathfrak{f})(\xi - t_0)]}\mathfrak{f}\right]\Delta\, t.$$

Fazendo $\Delta\, t \to 0$, implica que $\xi \to t$ e obtemos a equação diferencial linear seguinte

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{\mathfrak{f}}{[V_0 + (\mathfrak{e} - \mathfrak{f})(t - t_0)]}Q = \mathfrak{b}\mathfrak{e}. \tag{1.14.71}$$

Exemplo 1.14.3. Um tanque contém inicialmente 100 litros de salmoura com 0,1 Kg de sal. No instante $t = 0$, adiciona-se outra solução de salmoura com 0,1 Kg de sal por litro, à razão de 3 litros por minuto, enquanto que a mistura resultante se escoa do tanque à mesma taxa. Determine:

a) a quantidade de sal presente no instante t;

b) o instante em que a mistura no tanque conterá 5 Kg de sal.

<u>Resolução.</u>

a) Aqui, $V_0 = 100$, $\mathfrak{a} = 1$, $\mathfrak{b} = 0,1$ e $\mathfrak{e} = \mathfrak{f} = 3$. Logo (1.14.71) toma a forma

$$\frac{dQ}{dt} + 0,03Q = 0,3. \tag{1.14.72}$$

A solução geral desta equação diferencial linear é

$$Q(t) = Ce^{-0,03t} + 10. \tag{1.14.73}$$

Quando $t = 0$ e $Q = \mathfrak{a} = 1$,

$$Q(t) = -9e^{-0,03t} + 10. \tag{1.14.74}$$

b) Procuremos t quando $Q = 5$. Fazendo $Q = 5$ em (1.14.73), obtemos

$$5 = -9e^{-0,03t} + 10 \quad ou \quad t = -\frac{1}{0,03}\ln\frac{5}{9} = 23,105\ min. \tag{1.14.75}$$

1.14.3 Problemas de variação de temperatura

Comecemos por invocar a lei de Newton seguinte para a variação da temperatura num corpo.

Lei (Lei de Newton para a Variação de Temperatura)**.** A taxa de variação de temperatura de um corpo é proporcional à diferença de temperatura entre o corpo e o meio ambiente.

Seja $T(t)$ a temperatura do corpo e $T_m(t)$ a temperatura do meio ambiente, ambas num instante arbitrário t. Então, a variação da temperatura do corpo entre os instantes t e $t + \Delta\, t$ é dada pela equação seguinte

$$T(t + \Delta\, t) = T(t) - k(T(\xi) - T_m(\xi))\,, \tag{1.14.76}$$

onde k é uma constante positiva de proporcionalidade - é uma característica do corpo, e $\xi \in [t, t + \Delta\, t]$ é um instante de referência. Fazendo $\Delta\, t \to 0$ em (1.14.76), implica que $\xi \to t$ e a Lei de Newton relativa à variação de temperatura pode ser formulada como:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m), \tag{1.14.77}$$

Num processo de **arrefecimento**, escolhemos para k um valor positivo de modo que, na lei de Newton, a taxa de variação de temperatura seja negativa . Note-se que, neste caso, T é maior do que T_m e, por consequência, $T - T_m > 0$. No caso de $T - T_m < 0$, estamos num processo de **aquecimento**. Para determinar a temperatura do corpo, temos de completar a lei de Newton na equação (1.14.77) com a condição inicial

$$T(0) = T_0. \tag{1.14.78}$$

As equações (1.14.77)-(1.14.78) dão-nos, assim, um modelo matemático completo. Convém referir que a lei de Newton é válida apenas para pequenas diferenças de temperatura. Por outro lado, as equações (1.14.77)-(1.14.78) representam apenas uma primeira aproximação da situação física real.

Exemplo 1.14.4. Coloca-se uma barra de metal, à temperatura de T_0 num quarto com temperatura constante de T_m. Pretende-se determinar a temperatura $T(t)$ para qualquer que seja o valor do tempo t.
Resolução. Introduzindo em (1.14.77)-(1.14.78)

$$u(t) = T - T_m,$$

obtemos, para $u(t)$, o problema seguinte

$$\frac{du}{dt} = -ku, \tag{1.14.79}$$

$$u(0) = u_0 = T_0 - T_m. \tag{1.14.80}$$

A única solução do problema (1.14.79)-(1.14.80) é

$$u(t) = T - T_m = u_0 e^{-kt} = (T_0 - T_m)e^{-kt}, \tag{1.14.81}$$

ou

$$T = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt}. \tag{1.14.82}$$

É fácil verificar que

$$|T - T_m| = |T_0 - T_m|e^{-kt} \ e \ \lim_{t\to+\infty} T(t) = T_m. \tag{1.14.83}$$

Isto é, a temperatura do corpo tende para a temperatura do meio ambiente quando $t \to +\infty$. No caso em que a temperatura do meio ambiente é variável, isto é, $T_m = T_m(t)$, então a solução do problema (1.14.77)-(1.14.78) tem a forma

$$T(t) = T_0 e^{-kt} + ke^{-kt} \int_0^t e^{ks} T_m(s) ds. \tag{1.14.84}$$

Para analisar o comportamento desta solução quando $t \to \infty$, vamos supor que

$$|T_m(t) - T_m^\infty| \leq Ce^{-\delta t}, \quad T_m^\infty = constante > 0, \quad \delta = constante > 0. \tag{1.14.85}$$

Então, (1.14.84) pode ser reescrita como

$$T(t) = T_m^\infty + (T_0 - T_m^\infty)e^{-kt} + ke^{-kt} \int_0^t e^{ks}(T_m(s) - T_m^\infty) ds. \tag{1.14.86}$$

Pondo

$$I_1 = ke^{-kt} \int_0^t e^{ks}(T_m(s) - T_m^\infty) ds \tag{1.14.87}$$

e aplicando (1.14.85), podemos avaliar I_1 do modo seguinte:

$$|I_1| = \left| ke^{-kt} \int_0^t e^{ks}(T_m(s) - T_m^\infty)ds \right| \leq \frac{kC}{k-\delta}\left(e^{-\delta t} - e^{-kt}\right), \ se\ k \neq \delta\,,$$

$$|I_1| = kCte^{-kt}, \ se\ k = \delta.$$

Então

$$|T(t) - T_m^\infty| \leq \widetilde{C}e^{-\lambda t}, \ \lambda = \min(k, \delta), \ se\ k \neq \delta, \tag{1.14.88}$$

$$|T(t) - T_m^\infty| \leq \widetilde{C}te^{-kt}, \ \ se\ k = \delta. \tag{1.14.89}$$

As fórmulas (1.14.83) e (1.14.88) mostram-nos que, de acordo com o modelo matemático considerado, o corpo atinge a temperatura do meio ambiente apenas no momento de tempo $t = +\infty$. No entanto, isto não corresponde à situação física real. Cada corpo, em tais circunstâncias, atinge a temperatura do meio ambiente num tempo finito. Para colmatar esta lacuna, existe uma outra lei, que podemos expressar através da equação diferencial seguinte

$$\frac{dT}{dt} = -k(T^\alpha - T_m^\alpha)\,, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{1.14.90}$$

Esta, trata-se de uma equação diferencial não linear e é designada comummente por **Lei de Stefan para a Variação de Temperatura**. Pondo, por simplicidade de escrita, $T_m = 0$, e considerando a condição inicial

$$T(0) = T_0, \tag{1.14.91}$$

podemos escrever a solução

$$T(t) = \left(T_0^{1-\alpha} - k(1-\alpha)t\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{1.14.92}$$

Neste caso, é fácil verificar que o corpo atingirá a temperatura do meio ambiente $T_m = 0$, num tempo finito

$$t^* = \frac{T_0^{1-\alpha}}{k(1-\alpha)}. \tag{1.14.93}$$

Portanto, a Lei de Stefan é mais adequada à situação física real relativa ao comportamento da temperatura para grandes intervalos de tempo.

1.14.4 2ª Lei de Newton

Em Cinemática, ramo da Mecânica que estuda o movimento dos corpos, o momento linear p, também designado por quantidade de movimento, é definido como sendo o produto entre a massa m de um corpo e a sua velocidade v:

$$p = mv\,.$$

Lei (2ª Lei de Newton)**.** A taxa de variação do momento linear de um corpo é igual à resultante das forças que nele actuam.

Em termos matemáticos a lei anterior pode ser expressa através da equação seguinte

$$\frac{dp}{dt} = F\,,$$

onde F designa a resultante das forças que actuam sobre o corpo. No caso de um corpo rígido, a massa permanece constante ao longo do tempo, pelo que a equação anterior pode ser escrita na forma

$$m\frac{dv}{dt} = F\,.$$

A parte mais delicada do problema consiste na representação das forças que actuam sobre o corpo.

Exemplo 1.14.5 (Corpo em cada queda livre com massa constante)**.** Neste caso as forças que actuam sobre o corpo são o seu peso devido à aceleração da gravidade e a resistência ao movimento que o meio oferece. O peso do corpo, digamos P, representa-se por

$$P = mg\,,$$

onde g representa a aceleração da gravidade. A resistência ao movimento, também designada por atrito, contraria o movimento do corpo e habitualmente supõe-se que é proporcional à velocidade do corpo

$$R = -kv\,,$$

onde k é uma constante de proporcionalidade que está relacionada com as características de cada corpo. Neste caso, a 2ª lei de Newton é descrita pela equação diferencial linear seguinte

$$m\frac{d\,v}{d\,t} = mg - kv \quad \Leftrightarrow \quad v' + \frac{k}{m}v = g\,.$$

De acordo com (1.7.20), a solução da equação diferencial anterior é dada por

$$\begin{aligned} v(t) &= e^{-\int_{t_0}^{t}\frac{k}{m}\,ds}\left(\int_{t_0}^{t} g e^{\int_{s_0}^{s}\frac{k}{m}\,dt} ds + C\right), \qquad C = constante\,, \\ &= Ce^{-\frac{kt}{m}} + \frac{mg}{k}\,. \end{aligned}$$

No caso de se conhecer a velocidade v_0 em determinado instante, digamos t_0, podemos determinar o valor da constante C:

$$v(t_0) = v_0 \Leftrightarrow Ce^{-\frac{kt_0}{m}} + \frac{mg}{k} = v_0 \Leftrightarrow C = \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right)e^{\frac{kt_0}{m}}\,.$$

Podemos então escrever uma equação que nos permite determinar a velocidade do corpo em qualquer instante t da sua trajectória em queda livre:

$$v(t) = \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right)e^{\frac{k(t_0-t)}{m}} + \frac{mg}{k}\,.$$

No caso de um corpo com massa variável, a 2ª Lei de Newton vem escrita na forma

$$\frac{(d\,mv}{d\,t} = F\,, \quad m = m(t)\,.$$

Exemplo 1.14.6 (Corpo em cada queda livre com massa variável)**.** Este exemplo é muito parecido com o anterior, com a excepção da massa que agora varia no tempo. Neste caso, a 2ª lei de Newton é descrita pela equação diferencial linear seguinte

$$\frac{d\,mv}{d\,t} = mg - kv \quad \Leftrightarrow \quad m(t)v' + m'(t)v = m(t)g - kv \quad \Leftrightarrow \quad v' + \frac{m'(t)+k}{m(t)}v = g\,.$$

De acordo com (1.7.20), a solução da equação diferencial anterior é dada por

$$v(t) = e^{-\int_{t_0}^{t}\frac{m'(t)+k}{m(t)}\,ds}\left(\int_{t_0}^{t} g e^{\int_{s_0}^{s}\frac{m'(t)+k}{m(t)}\,dt} ds + C\right), \qquad C = constante\,.$$

Conhecida a lei de acordo com a qual a massa do corpo varia, bem como a sua velocidade inicial, podemos, desde que as primitivas sejam calculáveis, escrever uma equação que nos permite determinara a velocidade do corpo em qualquer instante.

1.14.5 Trajectórias ortogonais

Consideremos uma família de curvas no plano xy, dependentes de um parâmetro c, definida do modo seguinte

$$F(x,y,c) = 0. \tag{1.14.94}$$

onde c é um parâmetro real. Pretende-se determinar uma outra família de curvas, designadas por **trajectórias ortogonais** da família (1.14.94). Suponhamos que estas são definidas analiticamente por

$$G(x,y,k) = 0 \tag{1.14.95}$$

e são tais que cada curva da família (1.14.95) intercepta ortogonalmente cada curva da família original (1.14.94). Para obter uma expressão das trajectórias ortogonais, começamos por derivar implicitamente (1.14.94) em relação a x:

$$\frac{\partial F(x,y,c)}{\partial x} + \frac{\partial F(x,y,c)}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

De seguida, eliminamos o parâmetro c entre esta equação derivada e a equação (1.14.94). Obtemos, assim, uma equação entre x, y e y'. Resolvemos esta última em relação a y' e chegamos a uma equação diferencial da forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y). \tag{1.14.96}$$

As **trajectórias ortogonais** de (1.14.94) são as soluções da equação diferencial seguinte

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f(x,y)}. \tag{1.14.97}$$

Para muitas famílias de curvas não é possível explicitar y' para obter uma equação diferencial da forma (1.14.97).

Exemplo 1.14.7. Determine as trajectórias ortogonais da família de curvas

$$F(x,y,c) \equiv x^2 + y^2 - c^2 = 0. \tag{1.14.98}$$

Resolução. A família dada por (1.14.98) é constituída por circunferências de raio c e centradas na origem. Derivando implicitamente a equação (1.14.98) em relação a x, obtemos

$$2x + 2yy' = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = f(x,y) = -\frac{x}{y}. \tag{1.14.99}$$

De acordo com (1.14.97), para determinar as trajectórias ortogonais, temos de resolver a equação diferencial seguinte

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f(x,y)} = \frac{y}{x}. \tag{1.14.100}$$

Esta, é uma equação de variáveis separáveis e a sua solução á dada por

$$G(x,y,k) \equiv y - kx = 0. \tag{1.14.101}$$

As trajectórias ortogonais são, pois, as rectas que passam pela origem.

Exercícios

1. Considere uma piscina contendo uma mistura de 30000 litros de água e cloro, este último com constante de concentração β. No instante $t = 0$ começa a entrar água pura na piscina à velocidade constante de 3 litros por segundo. Passados 30 segundos, a mistura que se forma na piscina, e se supõe sempre homogénea, começa a saír à velocidade constante de 5 litros por segundo.

   a) Escreva uma expressão da função $m(t)$, quantidade de cloro na piscina no instante t, admitindo $t \geq 0$ e t suficientemente pequeno para que a piscina não esvazie.

   b) Determine a quantidade de cloro na piscina quando esta estiver a metade da sua capacidade no instante $t = 30$ segundos.

2. Desde a descoberta da radioactividade que se sabe que determinadas substâncias emitem continuamente partículas α, β e γ. A emissão destas partículas corresponde a modificações na estrutura atómica de tal modo que os átomos da substância inicial se vão transformando em átomos de outras substâncias, numa cadeia característica de cada elemento radioactivo. Da substância inicial sobra sempre uma porção correspondente aos átomos que ainda não se desintegraram e que, evidentemente, diminui com o tempo. Designemos por $m(t)$ a massa da substância que ainda não se desintegrou, e que é proporcional ao número de átomos que ainda não sofreram o chamado decaimento[4] radioactivo. Determine:

   a) uma expressão da massa de determinada substância radioactiva que ainda não se desintegrou no instante t.

   b) o tempo que a massa da substância que ainda não se desintegrou leva a reduzir-se a metade.

3. Um tanque com 50 litros de capacidade contém inicialmente 10 litros de água fresca. No instante $t = 0$, adiciona-se ao tanque uma solução de salmoura com 0,2 Kg de sal por litro, à razão de 4 litros por minuto, enquanto que a mistura se escoa à razão de 2 litros por minuto. Determine:

   a) o tempo necessário para que o tanque transborde;

   b) a quantidade de sal presente no tanque por ocasião em que o tanque transborda.

4. Um tanque com 500 litros de capacidade contém inicialmente 100 litros de água pura. No instante $t = 0$ começa a entrar líquido no tanque à velocidade de 2 l/s, sendo este líquido constituído por uma mistura homogénea de 50% de água e 50% de poluentes. Simultaneamente, a mistura que se forma no tanque e se supõe sempre homogénea, sai do tanque à velocidade constante de 1 l/s. Escreva uma equação diferencial a que satisfaça a função $p(t)$, quantidade de poluentes existente no tanque no instante t, sendo t suficientemente pequeno para que o tanque ainda não tenha transbordado.

5. Em Ciências Forenses é muito habitual a aplicação da Lei da Variação de Temperatura de Newton para determinar a hora exacta da morte de uma pessoa, quando se investiga um crime. Suponhamos que o cadáver de uma pessoa é encontrado e, medindo-lhe a temperatura nesse instante, esta é de 30ºC. Duas horas depois a temperatura do cadáver já é de 20ºC. Admitindo que a temperatura ambiente é de 15ºC, determine o tempo decorrido entre a morte e a descoberta do cadáver.

6. Considere um foguete em repouso e que é propulsionado por uma força horizontal constante de 1000 Kg durante 20 s. Suponhamos que, à medida que o propulsionador é queimado, a massa do foguete varia de acordo com a lei $m = 50 - t$ e que a força que o meio oferece é o triplo da velocidade.
   Determine uma equação diferencial a que deve satisfazer a velocidade $v(t)$ do foguete.

7. Determine as trajectórias ortogonais das famílias de curvas seguintes:

   $$\text{a) } y = cx^2\,; \qquad \text{a) } y = ce^{\frac{x^2}{2}}\,; \qquad \text{a) } x = ce^{\frac{y}{4}}\,; \qquad \text{a) } x^2 + (y-c)^2 = c^2\,.$$

8. Recordemos que a distância d de uma recta $y = mx + p$ à origem do referencial é dada por

   $$d = \frac{|p|}{\sqrt{1+m^2}}\,.$$

[4] Do inglês "decay".

Determine uma equação diferencial a que satisfaçam as funções deriváveis ϕ tais que a distância à origem da recta tangente ao gráfico de ϕ em cada ponto $(x,\ y)$ é igual a $|x|$.

9. De acordo com a Lei de Verhulst-Pearl, o crescimento da população de determinadas espécies de seres vivos pode ser modelado de acordo com a equação diferencial

$$P'(t) = kP(t)\left(1 - \frac{P(t)}{L}\right).$$

Aqui, $P(t)$ mede a população em função do tempo, medido em anos, k é uma constante relacionada com a taxa de crescimento ($k > 0$) ou de decrescimento ($k < 0$) da população e L é outra constante que indica a capacidade do ambiente, *i.e.* o limite máximo que a população pode atingir nesse ambiente. Considere uma espécie com taxa de crescimento $k = \frac{1}{5}$ num ambiente com capacidade $L = 1000$. Determine a população desta espécie após 5 anos, sabendo que no início existiam 10 indivíduos.

10. No alvéolo processam-se trocas gasosas do alvéolo para o sangue e do sangue para o alvéolo de acordo com a equação diferencial seguinte para a função $C(x)$, que expressa a concentração, de soluto em escoamento, em função da distância x medida até à entrada do capilar:

$$\frac{d}{d\,x}C(x) + KC(x) = J\,.$$

Neste modelo, $K = P/(vR)$ e $J = KC_{\text{ext}}$ são constantes: C_{ext} é a concentração de soluto, em $\text{mol}\,\text{cm}^{-3}$, na parede extravascular, P é a permeabilidade, em $\text{cm}\,\text{s}^{-1}$, da parede vascular ao soluto, R é o raio, em cm, da secção recta do alvéolo e v é a velocidade média, em $\text{cm}\,\text{s}^{-1}$, do escoamento. Sabe-se que quando o sangue entra no capilar, a concentração de soluto em escoamento é nula.

Determine a concentração de soluto em escoamento quando a distância medida até à entrada do capilar é $x = 2$ cm.

11. Numa reacção química bimolecular

$$A + B \to M$$

2 moles por litro da substância A são combinadas com 3 moles por litro da substância B de acordo com a Lei de Acção da Massa:

$$y'(t) = k(2 - y(t))(3 - y(t))\,,$$

onde $y(t)$ é o número de moles por litro que reagiram após o instante t e k é uma constante de proporcionalidade.

Supondo que no instante inicial ($t = 0$) o número de moles que reagiram é nulo, determine a solução exacta $y(t)$ do problema.

Capítulo 2

Equações diferenciais de ordem superior

Nesta capítulo iremos trabalhar com equações diferenciais de ordem superior. Por superior, subentende-se que a maior ordem das derivadas da função incógnita que intervêm na equação diferencial é $n > 1$. Por simplicidade de exposição iremos considerar, em grande parte dos exemplos apresentados nesta secção, equações diferenciais de ordem 2. Esta secção será praticamente toda dedicada a equações diferenciais lineares.

2.1 Noções gerais

Definição 2.1.1. Designa-se por **equação diferencial de ordem** n a toda a equação que estabelece uma relação entre a variável independente x, a função incógnita $y(x)$ e as suas derivadas sucessivas $y'(x)$, $y''(x)$, ..., $y^{(n)}(x)$, isto é, uma equação do tipo

$$F\left(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)\right) = 0,$$

onde F é uma função dada, definida em certo subconjunto de $\mathbb{R}^{n+2}$:

$$F : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}.$$

Se $n = 0$, obtemos uma equação que não é diferencial. No caso $n = 1$, reduz-se a uma equação diferencial de 1ª ordem. Notando que x é a variável independente e y é a variável dependente, podemos escrever a equação diferencial de ordem n na forma seguinte mais simples:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0\,.$$

Definição 2.1.2. Chama-se **solução de uma equação diferencial de ordem** n, no intervalo (a, b), a uma função $y = \varphi(x)$ n-vezes derivável em (a,b), tal que, ao substituirmos y por $\varphi(x)$ na equação diferencial, esta transforma-se numa identidade em ordem a x, em (a, b).

Sempre que é possível encontrar uma expressão explícita $y = \varphi(x)$, dizemos que a **solução** da equação diferencial é **explícita**. Por vezes não é possível apresentar uma solução explícita para dada equação diferencial. Apenas conseguimos apresentar uma equação

$$G(x, y) = 0$$

que define, num intervalo (a, b), pelo menos, uma função real $y = \varphi(x)$ que é solução explícita da equação diferencial. Neste caso, dizemos que a **solução** $y = \varphi(x)$ está definida de forma **implícita** pela equação $G(x, y) = 0$.

A família de funções

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)\,,$$

dependente de n constantes arbitrárias C_1, C_2, ..., C_n, que resolvem uma equação diferencial num intervalo, designa-se por **solução geral** da equação diferencial. Chama-se **solução particular** a toda a função que se obtém da solução geral $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, quando se concretizam as constantes C_1, C_2, ..., C_n, isto é, a uma função

$$y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0)\,, \quad \text{com} \quad C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0 \text{ constantes fixas}\,.$$

Designa-se por **solução singular** de uma equação diferencial, uma função

$$y = \phi(x)\,,$$

que resolve uma equação diferencial num intervalo, mas que não se obtém a partir da solução geral.

Uma equação diferencial de ordem n diz-se escrita na **forma normal**, se puder ser escrita do modo seguinte:

$$y^{(n)}(x) = f\left(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)\right)\,;$$

onde $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ é uma função contínua, definida num domínio de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Designa-se por **curva integral** duma equação diferencial de ordem n

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

ao gráfico de uma solução $y = \varphi(x)$ dessa equação.

Exercícios

1. Considere a equação diferencial

$$y'' + 4y = 0\,.$$

   (a) Mostre que as funções $y_1 = \cos(2x)$ e $y_2 = \operatorname{sen}(2x)$ são suas soluções (soluções particulares).

   (b) Sendo c_1 e c_2 constantes arbitrárias, mostre que $y_* = c_1 y_1 + c_2 y_2$ é, também sua solução(solução geral).

   (c) Verifique, agora, que

$$y = -3\operatorname{sen}(x)\cos(2x) + \left[\frac{3}{2}\ln|\csc(x) - \cot(x)| + 3\cos(x)\right]\operatorname{sen}(2x)$$

   é uma solução (solução particular) da equação diferencial $y'' + 4y = 3\csc(x)$.

   (d) Mostre, ainda, que

$$y = -3\operatorname{sen}(x)\cos(2x) + \left[\frac{3}{2}\ln|\csc(x) - \cot(x)| + 3\cos(x)\right]\operatorname{sen}(2x) + y_*$$

   é solução desta última equação diferencial (solução geral)

2. Mostre que as funções $y_1 = x^2$ e $y_2 = x^2\ln(x)$ são soluções da equação diferencial

$$x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0 \qquad x > 0\,.$$

   Verifique se $y = y_1 + y_2$ é solução desta equação diferencial.

2.2 Equações diferenciais lineares

A teoria das equações diferenciais lineares de ordem superior está bem desenvolvida, pelo que as podemos estudar em pormenor.

Definição 2.2.1. Chama-se **equação diferencial linear de ordem** $n > 1$ a toda a equação diferencial da forma

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)\,, \tag{2.2.1}$$

com $a_n \neq 0$ e onde a_n, a_{n-1}, $\ldots$, a_1, a_0 e f são funções reais de variável real, contínuas num mesmo intervalo $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$.

As funções a_n, a_{n-1}, $\ldots$, a_1, a_0 designam-se por (funções) **coeficientes** da equação diferencial. No caso destas funções serem constantes, (2.2.1) designa-se por **equação diferencial linear de ordem** $n > 1$ **de coeficientes constantes**. Se $f(x) = 0$, então (2.2.1) vem na forma

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0\,, \tag{2.2.2}$$

e recebe o nome de **equação diferencial linear homogénea**. Por outro lado, atendendo a que $a_n \neq 0$, as equações diferenciais (2.2.1) e (2.2.2) podem ser escritas, respectivamente, nas formas seguintes:

$$y^{(n)} + \mathrm{a}_n(x)y^{(n-1)} + \cdots + \mathrm{a}_2(x)y' + \mathrm{a}_1(x)y = \mathrm{f}(x)\,; \tag{2.2.3}$$

$$y^{(n)} + \mathrm{a}_n(x)y^{(n-1)} + \cdots + \mathrm{a}_2(x)y' + \mathrm{a}_1(x)y = 0\,; \tag{2.2.4}$$

para as novas funções

$$\mathrm{a}_n(x) = \frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)}\,,\ \ldots\,,\ \mathrm{a}_2(x) = \frac{a_1(x)}{a_n(x)}\,,\ \mathrm{a}_1(x) = \frac{a_0(x)}{a_n(x)} \quad \text{e} \quad \mathrm{f}(x) = \frac{f(x)}{a_n(x)}\,.$$

A proposição seguinte afirma que a combinação linear de soluções de uma equação diferencial linear homogénea é, ainda, uma solução dessa equação diferencial.

Proposição 2.2.1. Sejam y_1, y_2, $\ldots$, y_k, com $k \in \mathbb{N}$, soluções da equação diferencial linear homogénea (2.2.2) e sejam c_1, c_2, $\ldots$, c_k constantes arbitrárias. Então

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ky_k$$

é também uma solução da equação diferencial (2.2.2).

Exemplo 2.2.1. Mostre que as funções $y_1 = x^2$ e $y_2 = x^2 \ln(x)$ são soluções da equação diferencial

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0 \qquad x > 0\,.$$

Justifique que $y = y_1 + y_2$ é, ainda, solução desta equação diferencial. Verifique isto.

A proposição seguinte diz-nos quantas soluções verdadeiramente diferentes admite a equação diferencial (2.2.2).

Proposição 2.2.2. Para a equação diferencial linear homogénea (2.2.2) existem n soluções y_1, y_2, $\ldots$, y_n linearmente independentes em (a, b).

Portanto, o número máximo de soluções linearmente independentes da equação diferencial linear homogénea (2.2.2) forma um espaço vectorial cuja dimensão é igual à ordem dessa equação diferencial.

Definição 2.2.2. Chama-se **sistema fundamental de soluções** de uma equação diferencial linear homogénea, num intervalo $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$, ao subconjunto formado pelas suas soluções que são linearmente independentes nesse intervalo.

Podemos, então, dizer que o sistema fundamental de soluções de uma equação diferencial linear homogénea é uma base vectorial do conjunto de todas as soluções da equação diferencial no intervalo referido.

Proposição 2.2.3. Sejam y_1, y_2, $\ldots$, y_n soluções da equação diferencial (2.2.2). Então, as funções y_1, y_2, $\ldots$, y_n são soluções linearmente independentes de (2.2.2), no intervalo (a, b), se e só se $W(x_0) \neq 0$ para algum $x_0 \in (a, b)$, onde

$$W(x) = \det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}. \tag{2.2.5}$$

A $W(x)$ chama-se **determinante de Wronsk** ou, simplesmente, **Wronskiano**. Convém frisar que para a condição suficiente da proposição anterior valer, basta que $W(x) \neq 0$ num ponto x_0 do intervalo (a, b). A proposição anterior permite-nos afirmar a alternativa seguinte: *As funções y_1, y_2, $\ldots$, y_n são soluções linearmente dependentes de (2.2.2) se e só $W(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$.* Então, podemos dizer que as afirmações seguintes são equivalentes, no sentido de que uma implica as outras três:

- As funções y_1, y_2, $\ldots$, y_n formam um sistema fundamental de soluções de (2.2.2);
- As funções y_1, y_2, $\ldots$, y_n são soluções linearmente independentes de (2.2.2);
- $W(x_0) \neq 0$ para algum $x_0 \in (a, b)$;
- $W(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$.

Exemplo 2.2.2. Verifique se as funções y_1 e y_2 formam um sistema fundamental de soluções da equação diferencial seguinte:

$$2x^2y'' + 3xy' - y = 0\,, \quad x > 0\,, \qquad \text{onde} \quad y_1(x) = \sqrt{x}\,, \quad y_2(x) = \frac{1}{x}\,.$$

A proposição seguinte diz-nos como é a forma da solução geral de uma equação diferencial linear homogénea.

Proposição 2.2.4. Consideremos a equação diferencial linear homogénea (2.2.2) e suponhamos que a_n, a_{n-1}, $\ldots$, a_1, a_0 são funções reais de variável real, contínuas num mesmo intervalo $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$. Se y_1, y_2, $\ldots$, y_n é um sistema fundamental de soluções de (2.2.2) em (a, b), então toda a solução y de (2.2.2) tem a forma

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n\,, \tag{2.2.6}$$

onde c_1, c_2, $\ldots$, c_n são constantes arbitrárias.

Resulta desta proposição que a equação diferencial linear homogénea (2.2.2) não tem soluções singulares. Portanto, a solução geral (2.2.6) contém todas as soluções possíveis da equação diferencial (2.2.2).

Exemplo 2.2.3. Verifique que as funções $y_1(x) = x$ e $y_2(x) = x^2$ formam um sistema fundamental de soluções de uma equação diferencial linear homogénea de ordem 2. Determine essa equação diferencial.

Vamos, agora, considerar a equação diferencial linear completa (2.2.1) e estabelecer qual a forma da sua solução geral.

Proposição 2.2.5. Consideremos a equação diferencial linear completa (2.2.1) e suponhamos que a_n, a_{n-1}, $\ldots$, a_1, a_0 e f são funções reais de variável real, contínuas num mesmo intervalo $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$. A solução geral da equação diferencial (2.2.1) é dada por

$$y = y_h + y_p \,, \tag{2.2.7}$$

onde y_h é a solução geral da equação diferencial homogénea associada a (2.2.1) e y_p é uma qualquer solução particular da equação diferencial (2.2.1) em (a, b) e livre de constantes.

A equação diferencial linear homogénea associada a (2.2.1) é dada por (2.2.2). Por (2.2.6), vemos que

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n \,, \tag{2.2.8}$$

onde y_1, y_2, $\ldots$, y_n é um sistema fundamental de soluções de (2.2.2) em (a, b) e c_1, c_2, $\ldots$, c_n são constantes arbitrárias. Então, de (2.2.7) e (2.2.8), resulta que a solução geral de (2.2.1) é dada por

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n + y_p \,.$$

A proposição seguinte permite-nos resolver uma equação diferencial linear não homogénea onde o termo independente do segundo membro da equação diferencial é a soma finita de funções elementares. A resolução de tal equação diferencial, reduz-se à resolução de um número de equações diferenciais igual ao número de funções envolvidas nesse termo independente, onde cada uma tem apenas uma função no termo independente.

Proposição 2.2.6 (Princípio de Superposição de Soluções)**.** Consideremos a equação diferencial linear completa (2.2.1). Suponhamos que o termo independente de (2.2.1) é a soma de k funções:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_k(x) \,, \quad k \in \mathbb{N} \,.$$

Para cada $i = 1, \ \ldots \ , \ k$, seja y_i a solução geral da equação diferencial

$$a_n(x) y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x) y' + a_0(x) y = f_i(x) \,,$$

que se obtém de (2.2.1) substituindo $f(x)$ por $f_i(x)$. Então a soma

$$y = y_1 + y_2 + \cdots + y_k$$

é a solução geral da equação diferencial (2.2.1).

Exemplo 2.2.4. Verifique que

$$y_1(x) = c_1 + c_2 \cos(2x) + c_3 \operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{3} \cos(x) \quad \text{e} \quad y_2(x) = c_1 + c_2 \cos(2x) + c_3 \operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{8} x + \frac{1}{12} x^3$$

são, respectivamente, as soluções gerais das equações diferenciais

$$y''' + 4y' = \operatorname{sen}(x) \quad \text{e} \quad y''' + 4y' = x^2$$

e onde c_1, c_2 e c_3 são constantes arbitrárias. Verifique, também, que

$$y(x) = c_1 + c_2\cos(2x) + c_3\operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{3}\cos(x) - \frac{1}{8}x + \frac{1}{12}x^3$$

é a solução geral da equação diferencial

$$y''' + 4y' = \operatorname{sen}(x) + x^2\,.$$

2.3 Redução de ordem

Vamos, agora, considerar equações diferenciais lineares homogéneas (2.2.2). O resultado seguinte permite-nos reduzir a resolução de uma tal equação diferencial de ordem $n > 1$ a outra de ordem $n - 1$. Isto é particularmente útil para as equações diferenciais de ordem 2, pois a sua resolução pode reduzir-se à de equações diferenciais de ordem 1 que já sabemos resolver. O único senão, é que temos de conhecer uma solução da equação diferencial inicial.

Proposição 2.3.1. Consideremos a equação diferencial linear homogénea (2.2.2). Se y_* é uma solução não trivial da equação diferencial (2.2.2), então a substituição

$$y = y_* v\,, \qquad v = v(x)\,, \tag{2.3.9}$$

seguida da substituição

$$w = v'\,, \qquad w = w(x)\,, \tag{2.3.10}$$

reduz (2.2.2) a uma equação diferencial linear homogénea de ordem $n - 1$ na variável dependente w.

Exemplo 2.3.1. Resolva a equação diferencial seguinte, sabendo que $y_* = e^{-x}$ é uma sua solução:

$$y'' + 3y' + 2y = 0\,.$$

Uma situação de resolução mais simples, e que não obriga ao conhecimento de uma solução, é a de uma equação diferencial linear homogénea onde intervêm, apenas, duas derivadas sucessivas da função incógnita. Neste caso, a redução de ordem, ou a integração sucessiva, permite-nos resolver a equação diferencial. No final, apenas temos de verificar que o conjunto de soluções encontradas é um sistema fundamental de soluções.

Exemplo 2.3.2. Resolva a equação diferencial seguinte:

$$xy'' + y' = 0\,.$$

Exercícios

1. Resolva as equações diferenciais seguintes, sabendo que as funções y_* indicadas são suas soluções:
   a) $y'' + \operatorname{tg}(x)y' + \cos^2(x)y = 0, \qquad y_* = \cos(\operatorname{sen}(x))$.
   b) $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0, \qquad y_* = x, \qquad \text{para} \quad -1 < x < 1$.

2. Resolva a equação diferencial seguinte:

$$xy''' + y'' = 0\,.$$

2.4 Equações diferenciais lineares de coeficientes constantes

Nesta secção, vamos considerar equações diferenciais lineares de coeficientes constantes

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0(x) y = f(x)\,, \tag{2.4.11}$$

com $a_n \neq 0$ e onde a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 são, agora, constantes e f é uma função real de variável real, contínuas num intervalo $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$. A equação diferencial linear homogénea associada a (2.4.11) é dada por

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0(x) y = 0\,. \tag{2.4.12}$$

Do mesmo modo que para (2.2.3) e (2.2.4), por vezes, poderemos ter necessidade de usar as escritas de (2.4.11) e (2.4.12) nas formas, respectivas, seguintes:

$$y^{(n)} + \mathrm{a}_n y^{(n-1)} + \cdots + \mathrm{a}_2 y' + \mathrm{a}_1 y = \mathrm{f}(x)\,; \tag{2.4.13}$$

$$y^{(n)} + \mathrm{a}_n y^{(n-1)} + \cdots + \mathrm{a}_2 y' + \mathrm{a}_1 y = 0\,; \tag{2.4.14}$$

para os novos coeficientes e função, respectivamente,

$$\mathrm{a}_n = \frac{a_{n-1}}{a_n}\,,\ \ldots\,,\ \mathrm{a}_2 = \frac{a_1}{a_n}\,,\ \mathrm{a}_1 = \frac{a_0}{a_n} \quad \text{e} \quad \mathrm{f}(x) = \frac{f(x)}{a_n}\,.$$

Definição 2.4.1. Chamamos **polinómio característico** associado à equação diferencial linear homogénea de coeficientes constantes (2.4.12), ao polinómio seguinte

$$P_n(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1}^{n-1} \lambda + \cdots + a_1 \lambda + a_0\,, \quad \lambda \in \mathbb{C}\,. \tag{2.4.15}$$

Proposição 2.4.1. Consideremos a equação diferencial linear homogénea de coeficientes constantes (2.4.12). Se o polinómio característico (2.4.15) associado a esta equação diferencial tem:

1. λ_1, λ_2, ..., λ_n raízes reais distintas, então a solução geral da equação diferencial (2.4.12) é dada por
$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + c_n e^{\lambda_n x}\,, \tag{2.4.16}$$
onde c_1, c_2, ..., c_n são constantes arbitrárias.

2. λ raízes reais repetidas, então a solução geral da equação diferencial (2.4.12) contém termos da forma
$$y = \left(c_1 + c_2 x + \cdots + c_k x^{k-1}\right) e^{\lambda\, x}\,, \tag{2.4.17}$$
onde c_1, c_2, ..., c_λ são constantes arbitrárias e k é a multiplicidade algébrica da raiz λ.

3. raízes complexas $\lambda = \alpha \pm i\beta$, então, para cada par de tais raízes, a solução geral da equação diferencial (2.4.12) contém termos da forma
$$y = \left(c_1 \cos(\beta\, x) + c_2 \operatorname{sen}(\beta\, x)\right) e^{\alpha\, x}\,, \tag{2.4.18}$$
onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

Demonstração. Por simplicidade, consideremos apenas o caso de $n = 2$ na equação diferencial linear homogénea de coeficientes constantes (2.4.12). Procuremos soluções desta equação diferencial linear de 2ª ordem na forma

$$y = e^{\lambda\, x}, \quad \text{onde } \lambda \in \mathbb{C}\,.$$

Substituindo nesta equação, temos

$$(\lambda^2 a_2 + \lambda a_1 + \lambda a_0)e^{\lambda x} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 a_2 + \lambda a_1 + \lambda a_0 = 0 \lambda = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - a_2 a_0}}{2a_2}\,.$$

Consoante o valor do discriminante $\Delta = a_1^2 - a_2 a_0$, temos três situações possíveis.

1. Se $\Delta > 0$, o polinómio característico associado tem duas raízes reais distintas:

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}\,, \quad \lambda_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - a_2 a_0}}{2a_2}\,, \qquad y_2 = e^{\lambda_2 x}\,, \quad \lambda_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - a_2 a_0}}{2a_2}\,.$$

Por outro lado, o Wronskiano de $\{y_1, y_2\}$ é um sistema fundamental de soluções, pois

$$\begin{aligned} W(x) =& \det \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ \lambda_1 y_1 & \lambda_2 y_2 \end{bmatrix} \\ =& (\lambda_2 - \lambda_1) y_1 y_2 = -\frac{\sqrt{a_1^2 - a_2 a_0}}{a_2} e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x} \neq 0 \quad \forall\, x\,. \end{aligned}$$

Deste modo, a solução geral é dada por

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2\,.$$

2. Se $\Delta = 0$, o polinómio característico associado tem uma raiz real com multiplicidade algébrica 2: $\lambda = \frac{-a_1}{2a_2}$; pelo que

$$y_\lambda = e^{\lambda x}\,, \quad \lambda = \frac{-a_1}{2a_2}\,.$$

Procuremos uma outra solução da forma $y = y_\lambda y_p$, onde y_p será uma função a determinar. Substituindo, na equação diferencial dada, y por $y = y_\lambda y_p$

$$\begin{aligned} a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y =& y_p(a_2 y_\lambda'' + a_1 y_\lambda' + a_0 y_\lambda) + (a_2 y_p'' + 2a_2 y_\lambda' y_p' + a_1 y_p') y_\lambda \\ =& a_2 y_p'' e^{\lambda x}\,. \end{aligned}$$

Assim, $y = y_\lambda y_p$ será uma solução da equação diferencial somente se

$$y_p'' = 0 \quad \Rightarrow \quad y_p = C_1 x + C_2\,.$$

Deste modo, a solução geral da equação diferencial é

$$y = (C_1 x + C_2) e^{\lambda x} = (C_1 x + C_2) e^{\frac{-a_1}{2a_2} x}\,.$$

Observemos que $\{y_1 = e^{\lambda x}, y_2 = x e^{\lambda x}\}$ é um sistema fundamental de soluções, pois

$$\begin{aligned} W(x) =& \det \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1 & y_1 + y_2 \end{bmatrix} \\ =& y_1^2 + y_1 y_2 - y_1 y_2 = e^{2\lambda x} \neq 0 \quad \forall\, x\,. \end{aligned}$$

3. No caso de $\Delta < 0$, o polinómio característico associado tem duas raízes complexas

$$\lambda = \frac{-a_1 \pm \sqrt{-\delta}}{2a_2} = \frac{-a_1 \pm i\sqrt{\delta}}{2a_2} = \frac{-a_1}{2a_2} \pm i\frac{\sqrt{\delta}}{2a_2}\,, \quad \delta = |\Delta| \equiv |a_1^2 - a_2 a_0|\,.$$

Então a forma da solução geral é

$$y = e^{\left(\frac{-a_1}{2a_2} \pm i\frac{\sqrt{\delta}}{2a_2}\right)x} = e^{(\alpha \pm i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{\pm i\beta x}\,, \quad \alpha = \frac{-a_1}{2a_2}\,,\ \beta = \frac{\sqrt{\delta}}{2a_2}\,.$$

Usando, agora a Fórmula de Euler

$$e^{i\,\theta} = cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)\,,$$

podemos escrever

$$y = e^{\alpha x}\left[\cos(\beta x) \pm i\,\mathrm{sen}(\beta x)\right] = e^{\alpha x}\cos(\beta x) \pm ie^{\alpha x}\,\mathrm{sen}(\beta x)\,.$$

O conjunto $\{y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x), y_2 = e^{\alpha x}\,\mathrm{sen}(\beta x)\}$ é um sistema fundamental de soluções, já que

$$\begin{aligned} W(x) =& \det\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ \alpha y_1 - \beta y_2 & \alpha y_2 + \beta y_1 \end{bmatrix} \\ =& \alpha y_1 y_2 + \beta y_1^2 - \alpha y_1 y_2 + \beta y_2^2 = \beta(y_1^2 + y_2^2) = \beta e^{2\alpha x} \neq 0 \quad \forall\, x\,. \end{aligned}$$

Deste modo a solução geral é dada por

$$y = C_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x}\,\mathrm{sen}(\beta x) = e^{\alpha x}\left[C_1\cos(\beta x) + C_2\,\mathrm{sen}(\beta x)\right]\,, \quad C_1,\ C_2 \in \mathbb{C}\,.$$

Para equações diferenciais de ordem superior à segunda, poderemos ter duas mais das situações em análise. Por exemplo, o polinómio característico associado a uma equação diferencial de ordem 6, poderá ter uma raiz real com multiplicidade algébrica 2, duas raízes reais distintas e 2 raízes complexas. □

Observação.

A proposição anterior garante-nos que as soluções encontradas formam um sistema fundamental de soluções. Portanto, não há necessidade de determinar o Wronskiano dessas funções.

Exemplo 2.4.1. Determine a solução geral das equações diferenciais seguintes:

$$\text{a) } y'' + 3y' + 2y = 0\,; \qquad \text{b) } y'' - 6y' + 9y = 0\,; \qquad \text{c) } y'' + 2y' + 4y = 0\,.$$

Como se depreende facilmente, existem equações diferenciais que poderão ter os três tipos de soluções da proposição anterior. Isto só depende da equação diferencial em si e, em particular, da sua ordem.

Exemplo 2.4.2. Determine a solução geral da equação diferencial

$$y^{(\mathrm{v})} - 2y^{(\mathrm{iv})} + 2y''' - 2y'' + y' = 0\,.$$

Por outro lado, o polinómio característico, bem como o conhecimento da proposição anterior, permitem-nos determinar a expressão da equação diferencial respectiva ao polinómio.

Exemplo 2.4.3. Mostre que o conjunto de funções

$$\{y_1(x) = e^x,\ y_2(x) = xe^x,\ y_3(x) = x^2e^x\}$$

é um sistema fundamental de determinada equação diferencial e determine-a.

Consideremos, agora, a equação diferencial linear não homogénea (2.4.11). Pela Proposição 2.2.5, sabemos que a solução geral de (2.4.11) consiste na soma entre a solução geral da equação diferencial linear homogénea associada (2.4.12) e uma qualquer solução particular de (2.4.11). Pela proposição anterior, sabemos como determinar a solução geral da equação diferencial linear homogénea associada (2.4.12). Vamos, agora, aprender a determinar uma solução particular da equação diferencial linear completa (2.4.11). Para isto, existem dois métodos à nossa disposição. O primeiro dos quais é designado por **Método dos Coeficientes Indeterminados** e é explicado a seguir.

Definição 2.4.2. Chama-se **família diferencial** de uma função ao conjunto formado pela função e por todas as suas derivadas de modo que esse conjunto seja um sistema linearmente independente.

Exemplo 2.4.4. Famílias diferenciais das funções mais habituais para usar este método

- $f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{N}$: $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$.
- $f(x) = e^{ax}$, com $a \in \mathbb{R}$: $\{e^{ax}\}$.
- $f(x) = \operatorname{sen}(\alpha\, x)$ ou $f(x) = \cos(\alpha\, x)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$: $\{\operatorname{sen}(\alpha\, x), \cos(\alpha\, x)\}$.
- $f(x) = x^n e^{ax}$, com $n \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{R}$: $\{e^{ax}, xe^{ax}, x^2e^{ax}, \ldots, x^n e^{ax}\}$.
- $f(x) = x^n \operatorname{sen}(\alpha\, x)$ ou $f(x) = x^n \cos(\alpha\, x)$, com $n \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$: $\{\operatorname{sen}(\alpha\, x), \cos(\alpha\, x), \operatorname{sen}(\alpha\, x)x, \cos(\alpha\, x)x, \ldots, \operatorname{se}$
- $f(x) = e^{ax} \operatorname{sen}(\alpha\, x)$ ou $f(x) = e^{ax} \cos(\alpha\, x)$, com $a,\ \alpha \in \mathbb{R}$: $\{e^{ax} \operatorname{sen}(\alpha\, x), e^{ax} \cos(\alpha\, x)\}$.

Proposição 2.4.2 (Método dos Coeficientes Indeterminados)**.** Consideremos a equação diferencial linear completa de coeficientes constantes (2.4.11). Consoante a função $f(x)$, a solução particular de (2.4.11) é dada por:

- $f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{N}$: $y_p(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_nx^n$;
- $f(x) = e^{ax}$, com $a \in \mathbb{R}$: $y_p(x) = Ae^{ax}$;
- $f(x) = \operatorname{sen}(\alpha\, x)$ ou $f(x) = \cos(\alpha\, x)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$: $y_p(x) = A \operatorname{sen}(\alpha\, x) + B \cos(\alpha\, x)$;
- $f(x) = x^n e^{ax}$, com $n \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{R}$: $y_p(x) = e^{ax} \left(A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_nx^n\right)$;
- $f(x) = x^n \operatorname{sen}(\alpha\, x)$ ou $f(x) = x^n \cos(\alpha\, x)$, com $n \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$: $y_p(x) = \operatorname{sen}(\alpha\, x) \left(A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_nx^n\right) + \cos(\alpha\, x) \left(B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_nx^n\right)$;
- $f(x) = e^{ax} \operatorname{sen}(\alpha\, x)$ ou $f(x) = e^{ax} \cos(\alpha\, x)$, com $a,\ \alpha \in \mathbb{R}$: $y_p(x) = Ae^{ax} \operatorname{sen}(\alpha\, x) + Be^{ax} \cos(\alpha\, x)$;

onde A_0, A_1, A_2, $\ldots$, A_n, B_0, B_1, B_2, $\ldots$, B_n, A e B são os coeficientes a determinar.

Observação. Se algum termo de y_p, determinado pela proposição anterior, aparece na solução geral y_h da solução da equação diferencial linear homogénea associada a (2.4.11), isto é (2.4.12), então, esse termo tem de ser multiplicado pela menor potência de x de modo que todos os termos de

$$y = y_h + y_p$$

sejam linearmente independentes.

Exemplo 2.4.5. Usando o Método dos Coeficientes Indeterminados, determine a solução geral da equação diferencial seguinte:

$$y'' + 3y' + 2y = 5x^2\,.$$

Apesar de ser muito simples, o método dos coeficientes indeterminados tem como principal limitação a impossibilidade de aplicá-lo a todas equações diferenciais (2.4.11). De facto, vemos que este método pode ser aplicado apenas quando obtemos uma família diferencial, da função $f(x)$, finita. Ora, por exemplo, para funções $f(x)$ irracionais, as famílias diferenciais irão ser infinitas o que torna impossível aplicar este método. A seguir, vamos ver um outro método para determinar uma solução particular de uma equação diferencial (2.4.11) e que é conhecido na literatura por **Método de Variação das Constantes Arbitrárias de Lagrange**, ou, mais abreviadamente, **Método de Variação das Constantes**.

Proposição 2.4.3 (Método de Variação das Constantes)**.** Consideremos a equação diferencial linear completa de coeficientes constantes (2.4.11). Seja $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ um sistema fundamental de soluções da equação diferencial homogénea associada (2.4.12). Então a solução particular é dada por

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \cdots + c_n(x)y_n(x)\,, \tag{2.4.19}$$

onde as funções $c_1(x)$, $c_2(x)$, ..., $c_n(x)$ satisfazem ao sistema seguinte:

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) + \cdots + c_n'(x)y_n(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) + \cdots + c_n'(x)y_n'(x) = 0 \\ \vdots \\ c_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + c_2'(x)y_2^{(n-2)}(x) + \cdots + c_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + c_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = f(x)\,. \end{cases} \tag{2.4.20}$$

Exemplo 2.4.6. Resolva o exercício do Exemplo 2.4.5, usando o Método de Variação das Constantes.

Exemplo 2.4.7. Verifique que só pode resolver a equação diferencial seguinte usando o Método de Variação das Constantes:

$$y''' + y'' = \frac{x-1}{x^2}\,.$$

Usando os conhecimentos desta secção conjugados com o Princípio de Superposição de Soluções (Proposição 2.2.6), podemos resolver uma equação diferencial linear não homogénea de coeficientes constantes onde o termo independente do segundo membro da equação diferencial é a soma finita de funções elementares.

Exemplo 2.4.8. Usando o Princípio de Superposição de Soluções, resolva a equação diferencial seguinte:

$$y''' + 4y' = x^2 + \operatorname{sen}(x)\,.$$

Nota: A solução geral desta equação diferencial foi apresentada no exercício do Exemplo 2.2.4.

Exercícios

1. Mostre que o conjunto de funções

$$\{y_1(x) = e^{-x}\operatorname{sen}(2x),\ y_2(x) = e^{-x}cos(2x),\ y_3(x) = 1\}$$

   é um sistema fundamental de determinada equação diferencial e determine-a:

2. Usando o Método dos Coeficientes Indeterminados, resolva as equações diferenciais seguintes:

$$\text{a) } y''' + 4y' = x\,; \quad \text{b) } y'' + 4y = -x\operatorname{sen}(2x)\,; \quad \text{c) } y''' - 4y' = x + 3\cos(x) + e^{-2x}\,.$$

3. Usando o Método de Variação das Constantes, resolva as equações diferenciais seguintes:

$$\text{a) } 4y'' + y = 2\sec\left(\frac{x}{2}\right)\,; \quad \text{b) } y''' + y' = \operatorname{tg}(x)\,; \quad \text{c) } y'' + 4y = x^2e^{-3x}\operatorname{sen}(x) - x\operatorname{sen}(x)\,.$$

2.5 Equações Euler

Nesta secção, vamos considerar equações diferenciais lineares de coeficientes não-constantes com as funções coeficientes com uma forma geral.

Definição 2.5.1. Chama-se **equação diferencial de Euler** a uma equação diferencial linear de coeficientes não-constantes da forma

$$(ax+b)^n y^{(n)} + A_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + A_{n-1}(ax+b)y' + A_n y = f(x)\,, \tag{2.5.21}$$

onde a, b, A_1, ..., A_n são constantes.

Em alguma bibliografia, (2.5.21) recebe o nome de equação diferencial de Euler-Cauchy. A resolução desta equação diferencial vai reduzir-se à resolução das equações diferenciais lineares de coeficientes constantes que estudamos na secção anterior.

Proposição 2.5.1. Consideremos a equação diferencial de Euler (2.5.21).

1. Se $ax+b>0$, então a substituição
$$a+bx=e^t \tag{2.5.22}$$
transforma (2.5.21) numa equação diferencial de coeficientes constantes.
2. Se $ax+b<0$, então a substituição
$$a+bx=-e^t \tag{2.5.23}$$
transforma (2.5.21) numa equação diferencial de coeficientes constantes.

Na resolução de uma equação diferencial de Euler, depois de se fazer a substituição (2.5.22) ou (2.5.23), há que voltar à variável inicial pelas substituições inversas, respectivamente

$$t=\ln(a+bx) \quad \text{ou} \quad t=\ln[-(ax+b)]\,.$$

Exemplo 2.5.1. Resolva a equação diferencial seguinte

$$x^2y''+xy'+y=1\,.$$

Consideremos uma equação diferencial de Euler homogénea com as funções coeficientes escritas na forma mais simples $ax+b\equiv x$:

$$x^n y^{(n)} + A_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + A_{n-1}xy' + A_n y = 0\,. \tag{2.5.24}$$

Se $x>0$, a substituição

$$y=x^k\,, \quad k\in\mathbb{C}\,, \tag{2.5.25}$$

permite-nos obter, de (2.5.24), a equação seguinte

$$\frac{k!}{(k-n)!} + \frac{k!}{(k-(n-1))}!A_1 + \cdots + \frac{k!}{(k-1)!}A_{n-1} + \frac{k!}{(k-0)!}A_n = 0\,. \tag{2.5.26}$$

Esta equação é denominada por **equação característica** associada à equação diferencial de Euler homogénea (2.5.24) por (2.5.25). As soluções da equação diferencial (2.5.24) serão dadas em função das raízes de (2.5.26).

Proposição 2.5.2. Consideremos a equação diferencial de Euler homogénea (2.5.24) e a sua equação característica associada (2.5.26) por meio da substituição (2.5.25).

1. Se k é uma raiz real de (2.5.26), com multiplicidade algébrica $m \in \mathbb{N}$, então temos m soluções linearmente independentes
$$y_1(x) = x^k\,, \quad y_2(x) = x^k \ln(x)\,, \quad y_3(x) = x^k(\ln(x))^2\,, \quad \ldots\,, \quad y_m(x) = x^k(\ln(x))^{m-1}\,.$$

2. Se $k = \alpha \pm i\beta$ é uma raiz complexa de (2.5.26), com multiplicidade algébrica $m \in \mathbb{N}$, então temos $2m$ soluções linearmente independentes
$$\begin{aligned} y_1(x) &= x^\alpha \cos(\beta \ln(x))\,, & y_2(x) &= x^\alpha \operatorname{sen}(\beta \ln(x))\,, \\ y_3(x) &= x^\alpha \ln(x) \cos(\beta \ln(x))\,, & y_4(x) &= x^\alpha \ln(x) \operatorname{sen}(\beta \ln(x))\,, \\ y_5(x) &= x^\alpha (\ln(x))^2 \cos(\beta \ln(x))\,, & y_2(x) &= x^\alpha (\ln(x))^2 \operatorname{sen}(\beta \ln(x))\,, \\ &\vdots\,, & &\vdots \\ y_{2m-1}(x) &= x^\alpha (\ln(x))^{m-1} \cos(\beta \ln(x))\,, & y_{2m}(x) &= x^\alpha (\ln(x))^{m-1} \operatorname{sen}(\beta \ln(x))\,. \end{aligned}$$

Exemplo 2.5.2. Resolva a equação diferencial seguinte:
$$2x^2y'' + 3xy' - y = 0\,.$$

Exercícios

Resolva as equações diferenciais seguintes:
$$\text{a) } (3x+2)y'' + 7y' = 0\,; \quad \text{b) } x^2y'' - xy' + y = 12x\ln(x)\,.$$

2.6 Problema de Cauchy

Consideremos uma equação diferencial de ordem n escrita do modo seguinte:
$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0\,.$$

Definição 2.6.1. O **Problema de Cauchy** consiste em, dado um ponto $(x_0, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$ na projecção relativa de um ponto do domínio de $\mathbb{R}^{n+2}$ da função F, encontrar soluções $y = y(x)$, definidas em algum intervalo $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$, tais que $x_0 \in (a, b)$ e
$$\begin{cases} F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}\,. \end{cases}$$

O $(n+1)$-uplo $(x_0, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$ designa-se por **dados de Cauchy** e as correspondentes equações $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, ..., $y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ por **condições de Cauchy**. Vamos, agora, generalizar o resultado de existência e unicidade de solução que estabelecemos para o Problema de Cauchy de uma equação diferencial de primeira ordem. Tal como aí, iremos considerar equações diferenciais escritas na forma normal, *i.e.*
$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})\,.$$

Como se trata de uma generalização de um resultado anterior, vamos considerar equações diferenciais de qualquer ordem $n \geq 1$.

Proposição 2.6.1. Consideremos o problema de Cauchy seguinte para uma equação diferencial de uma ordem qualquer $n \geq 1$:

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}\,. \end{cases} \tag{2.6.27}$$

Suponhamos que a função $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ satisfaz as condições seguintes:

1. f é uma função contínua em relação às variáveis x, y, y', $\ldots$, $y^{(n-1)}$ numa vizinhança $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ do ponto $(x_0, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$;
2. f tem as derivadas parciais seguintes limitadas em $\mathbb{D}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y}\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y'}\,, \quad \ldots\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}\,.$$

Então, existem $\varepsilon > 0$ e um intervalo $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ da variável x, no qual está definida uma única solução $y = y(x)$ do problema de Cauchy (2.6.27).

Demonstração: Análoga à respectiva demonstração para o caso de uma equação diferencial de primeira ordem. □

Observação. A condição 1 da proposição anterior garante-nos a existência de solução do Problema de Cauchy (2.6.27). Enquanto que a condição 2 nos garante a unicidade de solução.

Exemplo 2.6.1. Mostre que, para quaisquer que sejam as condições de Cauchy (x_0, y_0, y_1), o problema de Cauchy seguinte tem uma única solução:

$$\begin{cases} y'' = e^{-x^2} y + \operatorname{sen}(y') \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1\,. \end{cases}$$

Apesar de, no exemplo anterior, podermos mostrar a existência de uma única solução, infelizmente, não a conseguimos determinar. Como apenas desenvolvemos a teoria para resolver as equações diferenciais de ordem superior lineares, vamos considerar, apenas, Problemas de Cauchy que fazem envolver essas equações.

Exemplo 2.6.2. Considere o Problema de Cauchy seguinte:

$$\begin{cases} y'' - y' = 1 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1\,. \end{cases}$$

a) Mostre que este problema tem uma única solução.
b) Determine a sua solução.

Exercícios

1. Mostre que os Problemas de Cauchy seguintes têm uma única solução e determine-as:

$$\text{a)} \begin{cases} y'' + y' = 2e^x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2\,; \end{cases} \qquad \text{b)} \begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 2te^t \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 7\,; \end{cases} \qquad \text{c)} \begin{cases} 2x^2y'' + xy' - 3y = 0 \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 4\,. \end{cases}$$

2. Resolva os Problemas de Cauchy seguintes:

$$\text{a)} \begin{cases} y''' + 4y' = x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 1\,; \end{cases} \qquad \text{b)} \begin{cases} y^{(iv)} + 2y'' + y = 3x + 4 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 0 \\ y'''(0) = 1\,. \end{cases}$$

2.7 Aplicações

Vibrações Mecânicas e Eléctricas

Consideremos uma massa $\mathcal{M}$ presa numa extremidade de uma mola. Admitamos que a soma do comprimento da mola com o da massa é L. Iremos investigar como as forças que actuam na massa $\mathcal{M}$ dão origem a uma equação diferencial. A Lei de Hook diz que uma mola produz uma força $F_{\mathcal{M}}$ proporcional ao deslocamento sofrido pela massa $\mathcal{M}$, *i.e.*

$$F_{\mathcal{M}} = -k(x + L)\,, \tag{2.7.28}$$

onde x é o deslocamento sofrido pela mola e k é uma constante de proporcionalidade que depende, apenas, do material de que é feita a mola. Por isso, a força $F_{\mathcal{M}}$ é comummente designada por força de restauro. Como não existem molas ideais, temos de considerar uma força que é proporcional à velocidade, *i.e.*

$$F_{\mathcal{L}} = -\gamma\, x'\,, \tag{2.7.29}$$

onde γ é uma constante positiva. Esta força expressa a resistência do meio ao deslocamento da massa. Por outro lado, no sistema, poderão existir forças externas, dependendo apenas do tempo, tais como o vento ou uma corrente de água:

$$F_{\mathcal{E}} = f\,. \tag{2.7.30}$$

Então, juntando a informação das equações (2.7.28)-(2.7.30) e a 2ª lei de Newton

$$F = ma\,, \tag{2.7.31}$$

obtemos a equação diferencial de segunda ordem

$$m\,x'' + \gamma\,x' + k\,x = f(t) - k\,L\,, \qquad x = x(t)\,.$$

Exemplo 2.7.1. Uma massa pesando 4 Kg alonga 2 cm uma mola. Suponhamos que a massa é deslocada 6 cm na direcção positiva e depois é libertada. Sabe-se que a massa está num meio viscoso que exerce uma força de 6 Kg quando a massa tem uma velocidade de 3 ms^{-1}. Formule o problema de Cauchy que governa o movimento da massa.

Bibliografia

[1] S.N. Antontsev. *Equações Diferenciais Ordinárias.* Universidade da Beira Interior, Covilhã, 2004.

[2] T.M. Apostol. *Calculus.* John Wiley & Sons, New York, 1969.

[3] A. Bivar Weinholtz. *Equações Diferenciais - Uma Introdução.* Textos de Matemática, Faculdade de Ciências de Lisboa, 2000.

[4] W. E. Boyce, R.C. Diprima. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems.* John Wiley & Sons, New York, 1992.

[5] B. Demidovitch (sob a redacção). *Problemas e Exercícios de Análise Matemática.* Editora Mir, Moscovo, 1987.

[6] F.R. Dias Agudo. *Análise Real.* Escolar Editora, Lisboa, 1989.

[7] F.R. Dias Agudo. *Equações Diferenciais.* Universidade da Beira Interior, 1990.

[8] D.G. de Figueiredo, A.F. Neves. *Equações Diferenciais Aplicadas.* Colecção Matemática Universitária. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1997.

[9] V. Kravchenko. Apontamentos das aulas teóricas de Equações Diferenciais. Universidade do Algarve, 2000.

[10] M. Krasnov, A. Kiselev, G. Makarenko. *Problemas de Equações Diferenciais Ordinárias.* McGraw-Hill, Lisboa, 1994.

[11] E. Kreyszig. *Advanced Engineering Mathematics.* John Wiley & Sons, New York, 1999.

[12] J.E. Marsden e M.J. Hoffman. *Elementary Classical Analysis.* Second Edition. W.E. Freeman and Company, New York, 1995.

[13] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis.* McGraw-Hill International Editions, 1976.

[14] V. Zorich. *Mathematical Analysis.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2004.