UAlg
UNIVERSIDADE DO ALGARVE

Apontamentos de Cálculo II

para os cursos de

Bioquímica, Engenharia do Ambiente e Engenharia Biológica

Hermenegildo Borges de Oliveira

Junho de 2013

Conteúdo

Capítulo 1

Sucessões Numéricas

Neste capítulo, vamos considerar um caso particular de funções reais de variável real que, pela sua importância em todas as áreas da Matemática, merece ser estudado num capítulo à parte.

1.1 Introdução

Definição 1.1.1 (Sucessão numérica)**.** *Uma sucessão numérica infinita de termos reais é uma função de variável natural e com valores reais. Usando a escrita habitual para as funções, uma sucessão, digamos f, escreve-se da forma seguinte:*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \mapsto & f(n). \end{array}$$

Por simplicidade de escrita, iremos designar apenas por sucessão uma sucessão infinita de termos reais. O conjunto de partida da sucessão poderá ser qualquer subconjunto do conjunto dos naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ ou, ainda, o conjunto dos inteiros não negativos $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Os valores

$$f(1),\ f(2),\ \ldots,\ f(n),\ \ldots$$

denominam-se **termos da sucessão**: primeiro termo, segundo termo, $\ldots$, n-ésimo termo, $\ldots$. O contra-domínio da função f denomina-se por **conjunto dos termos da sucessão**. Habitualmente os termos da sucessão são denotados por letras indexadas nos números naturais. Por exemplo, podemos denotar os termos da sucessão acima por

$$u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots\ .$$

Chama-se **termo geral da sucessão** à expressão designatória $f(n)$ e, usando a mesma notação indexada, é habitual denotá-lo por u_n. Cada termo da uma sucessão, digamos u_n, tem um termo sucessor, u_{n+1}, e, assim, podemos dizer que não existe um último termo da sucessão. As operações algébricas habituais dos números reais estendem-se naturalmente às sucessões. A **soma** e **diferença de** duas **sucessões** u_n e v_n definem-se, respectivamente, por:

$$(u+v)_n = u_n + v_n \quad \text{e} \quad (u-v)_n = u_n - v_n.$$

O **produto** e **quociente de** duas **sucessões** u_n e v_n define-se, respectivamente, por:

$$(u\,v)_n = u_n\,v_n \quad \text{e} \quad \left(\frac{u}{v}\right)_n = \frac{u_n}{v_n}\ \ (v_n \neq 0\ \ \forall\ n \in \mathbb{N})\,.$$

Modos de designar uma sucessão

- **Ordenação**. Para designar uma sucessão, é habitual escrever ordenadamente uma quantidade suficiente de termos da sucessão, de modo a termos uma ideia do comportamento da sucessão. Por exemplo, a sucessão cujos três primeiros termos são 1, 3, 5, é escrita do modo seguinte:
$$1,\ 3,\ 5,\ \ldots\ .$$

- **Fórmula**. A forma mais comum para designar uma sucessão, consiste em indicar uma fórmula por meio da qual se pode obter, para cada natural n, o correspondente n-ésimo termo. Por exemplo, a fórmula
$$u_n = \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N},$$
permite-nos obter a sucessão seguinte de termos ordenados:
$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots\ .$$
A fórmula
$$v_n = 1, \quad n \in \mathbb{N},$$
designa a sucessão constante com todos os termos iguais a 1, e que, ordenada, se escreve
$$1,\ 1,\ 1,\ \ldots,\ 1,\ \ldots\ .$$
Por vezes, duas ou mais fórmulas podem ser indicadas para designar a sucessão. Por exemplo, as fórmulas
$$u_{2n-1} = \frac{1}{n^2}, \quad u_{2n} = n^2, \quad n \in \mathbb{N},$$
definem a sucessão cujos oito primeiros termos ordenados são
$$1,\ 1,\ \frac{1}{4},\ 4,\ \frac{1}{9},\ 9,\ \frac{1}{16},\ 16,\ \ldots\ .$$
Isto é, a sucessão cujos quatro primeiros termos de ordem ímpar $(2n-1)$ são
$$1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{16},\ \ldots$$
e os quatro primeiros termos de ordem par $(2n)$ são
$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \ldots\ .$$

- **Recorrência**. Outro modo de designar uma sucessão, consiste em indicar as instruções de como obter os termos sucessores conhecido um ou mais dos primeiros termos. Por exemplo, as fórmulas
$$u_1 = u_2 = 1, \quad u_{n+1} = u_n + u_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

definem a sucessão (de Fibonacci[1]) cujos oito primeiros termos ordenados são

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ \ldots\ .$$

Uma sucessão determinada por este processo, diz-se uma sucessão definida por recorrência.

Por simplicidade de escrita, denota-se qualquer sucessão por u_n, qualquer que seja a forma por que é definida.

Representação gráfica de uma sucessão

A representação gráfica de uma sucessão, num sistema de eixos cartesianos, faz-se do mesmo modo como para qualquer função. No eixo das abcissas indicamos os números naturais e no das ordenadas as correspondentes imagens por meio da sucessão (termos da sucessão). O **gráfico** de uma sucessão u_n é o conjunto de pontos discretos

$$\{(n, u_n) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Exemplo 1.1.1 (`AULA TEÓRICA`). *Fazer a representação gráfica dos seis primeiros termos da sucessão*

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Princípio de indução matemática

O Princípio de Indução Matemática é um método de demonstração elaborado com base no Princípio de Indução Finita, frequentemente utilizado para provar que certas propriedades são verdadeiras para todos os números naturais. Para uma determinada afirmação matemática que dependa de um natural n, digamos $P(n)$, podemos enunciar este princípio do modo seguinte.

Se

1. $P(n)$ é verificada para $n = 1$;
2. $P(n)$ sendo verificada para $n = k$ implicar ser também verificada para o seu sucessor $n = k + 1$, com $k > 1$;

então a afirmação $P(n)$ é válida para todo o natural n.

O passo 1, em que se estabelece a propriedade para o primeiro dos números naturais, designa-se por **base de indução**. O passo 2 designa-se por **passo de indução**, em que se estabelece que, caso a propriedade se verifique, para um número natural k (**hipótese de indução**) então ela também é verificada para o número natural seguinte, $k+1$. A validade de $P(n)$ para todos os números naturais, depende essencialmente da possibilidade em provar que a observação da propriedade num natural n implica a verificação da mesma propriedade para o natural seguinte, $n+1$ (**passo de indução**). Se isso suceder, então podemos concluir a veracidade de $P(n)$ para todos os números naturais desde que o primeiro deles (o número 1) a verifique. Na realidade, a

[1] Leonardo Fibonacci (1170-1250), matemático italiano natural de Pisa.

validade da propriedade para o primeiro natural (base de indução) implica a sua validade para o segundo (o número 2) e deste para o terceiro (o número 3), e assim sucessivamente, cobrindo-se deste modo a totalidade dos naturais, como peças de um dominó em linha, em que as quedas das sucessivas peças são provocadas umas a partir das outras após a queda da primeira peça. Por vezes, certas afirmações $P(n)$ só são verificadas a partir de um número natural $n_1 > 1$. Neste caso, temos de substituir, no passo 1, "$P(n)$ é verificada para n_1". De um modo sucinto, podemos enunciar o Princípio de Indução Matemática na forma seguinte.

Definição 1.1.2 (Princípio de indução matemática). *Se:*

1. $P(n_1)$ *é verificada;*
2. $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, $n > n_1$;

então $P(n)$ *é verdadeira para todo natural* $n \geq n_1$.

Exemplo 1.1.2 (AULA TEÓRICA). *Usando o Princípio de Indução Matemática, mostre que para todo o natural* n *a igualdade seguinte é verificada:*

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1 = n^2\,.$$

Exemplos

Definição 1.1.3 (Progressão aritmética). *Uma progressão aritmética é uma sucessão cuja fórmula para o seu termo geral é*

$$u_n = u_1 + (n-1)r, \quad n \in \mathbb{N},$$

onde $r \neq 0$ *é uma constante conhecida que se denomina* ***razão***.

Este tipo de sucessões caracteriza-se por a diferença de quaisquer dois dos seus termos sucessivos ser constante:

$$u_{n+1} - u_n = r \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad (r = constante \neq 0).$$

Deste modo, podemos definir tal sucessão por recorrência:

$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = u_n + r; \end{cases}$$

sendo a e $r \neq 0$ reais conhecidos.

Proposição 1.1.1. *A soma* S_n *dos* n *primeiros termos de uma progressão aritmética* u_n *é dada por*

$$S_n = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n.$$

Demonstração. Seja u_n uma progressão aritmética. Então existem $a,\ r \in \mathbb{R}$, com $r \neq 0$, tais que

$$u_1 = a, \quad u_2 = a + r, \quad u_3 = a + 2r, \quad \ldots, \quad u_n = a + (n-1)r, \quad \ldots.$$

A soma dos n primeiros termos é dada por

$$S_n = a + (a + r) + (a + 2r) + \cdots + [a + (n-1)r]. \tag{1.1.1}$$

Invertendo a ordem desta soma, temos

$$S_n = [a + (n-1)r] + \cdots + (a + 2r) + (a + r) + a. \tag{1.1.2}$$

Somando (1.1.1) e (1.1.2) termo a termo, obtemos

$$\begin{aligned} 2S_n &= [2a + (n-1)r] + \cdots + [2a + (n-1)r] + [2a + (n-1)r] + \cdots + [2a + (n-1)r] \\ &= [2a + (n-1)r]n = \{a + [a + (n-1)r]\}n \\ \Leftrightarrow \quad S_n &= \frac{u_1 + u_n}{2} n, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. □

Exemplo 1.1.3 (`AULA TEÓRICA`)**.** *Calcule a soma, S_{100}, dos 100 primeiros termos da progressão aritmética $u_n = n$, com $n \in \mathbb{N}$.*

Definição 1.1.4 (Progressão geométrica)**.** *Uma progressão geométrica é uma sucessão cuja fórmula para o seu termos geral é*

$$u_n = u_1 r^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

*onde $r \neq 1$ é uma constante conhecida que se denomina **razão**.*

Esta sucessão caracteriza-se por o quociente entre quaisquer dois dos seus termos sucessivos ser constante:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = r \quad \forall\ n \in \mathbb{N} \quad (r = constante \neq 1).$$

Podemos, assim, definir tal sucessão também por recorrência:

$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = u_n r; \end{cases}$$

sendo a e $r \neq 1$ reais conhecidos.

Proposição 1.1.2. *A soma S_n dos n primeiros termos de uma progressão geométrica u_n de razão $r \neq 1$ é dada por*

$$S_n = u_1 \frac{1 - r^n}{1 - r}.$$

Demonstração. Seja u_n uma progressão geométrica. Então existem $a,\ r \in \mathbb{R}$, com $r \neq 1$, tais que

$$u_1 = a, \quad u_2 = ar, \quad u_3 = ar^2, \quad \ldots, \quad u_n = ar^{n-1}, \quad \ldots .$$

A soma dos n primeiros termos é dada por

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}. \tag{1.1.3}$$

Multiplicando (1.1.3) por $(1-r)$, obtemos

$$\begin{aligned} (1-r)S_n &= a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} - \left(ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n\right) \\ &= a - ar^n = u_1(1-r^n) \\ \Leftrightarrow \quad S_n &= u_1 \frac{1-r^n}{1-r}, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. □

Exemplo 1.1.4 (`AULA TEÓRICA`)**.** *Calcule a soma dos 100 primeiros termos da progressão geométrica*

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

1.2 Propriedades principais

Sucessão limitada

Uma sucessão diz-se majorada, se o conjunto dos seus termos for majorado, isto é, se existir um real maior ou igual do que todos os termos da sucessão. Ou seja, u_n é uma **sucessão majorada**, se

$$\exists\ L \in \mathbb{R} : u_n \leq L \quad \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Uma sucessão diz-se minorada, se o conjunto dos seus termos for minorado, isto é, se existir um real menor ou igual do que todos os termos da sucessão. Ou seja, u_n é uma **sucessão minorada**, se

$$\exists\ l \in \mathbb{R} : u_n \geq l \quad \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Uma sucessão diz-se limitada, se for majorada e minorada.

Definição 1.2.1 (Sucessão limitada)**.** *Uma sucessão u_n é limitada, se*

$$\exists\ L,\ l \in \mathbb{R} : l \leq u_n \leq L \quad \forall\ n \in \mathbb{N}. \tag{1.2.4}$$

Exemplo 1.2.1 (`AULA TEÓRICA`)**.** *Verifique se as seguintes sucessões são limitadas:*

$$u_n = n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad e \quad v_n = \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Proposição 1.2.1. *Uma sucessão u_n é limitada se e só se*

$$\exists\ C \in \mathbb{R}^+ : |u_n| \leq C \quad \forall\ n \in \mathbb{N}. \tag{1.2.5}$$

Demonstração. Suponhamos que u_n é limitada. Sendo $C = \max\{|l|, |L|\}$, concluímos facilmente que (1.2.4) implica (1.2.5). Reciprocamente, se (1.2.5) é verificada, então

$$-C \leq u_n \leq C \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Assim, podemos tomar $l = -C$ e $L = C$ para obter (1.2.4). □

Monotonia

Uma sucessão diz-se monótona crescente, se qualquer dos seus termos for menor ou igual do que o seu sucessor. Diz-se que uma sucessão é monótona decrescente, se qualquer dos seus termos for maior ou igual do que o seu sucessor. Uma sucessão diz-se, apenas, monótona, se for monótona crescente ou decrescente.

Definição 1.2.2. *Uma sucessão u_n diz-se **monótona crescente**, se*

$$u_n \leq u_{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

*A sucessão u_n diz-se **monótona decrescente**, se*

$$u_n \geq u_{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

No caso de termos

$$u_n < u_{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

dizemos que u_n é uma **sucessão monótona estritamente crescente**. Se

$$u_n > u_{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

diz-se que u_n é uma **sucessão monótona estritamente decrescente**. Quando houver necessidade de fazer distinção, iremos referir-nos à **monotonia** da definição anterior como sendo **em sentido lato**. As sucessões que não são monótonas, podem ser constantes ou oscilantes. Convém referir que, por vezes, a monotonia ou não de uma sucessão só se descortina após um número finito de termos. Neste caso, diremos que a sucessão é monótona a partir do termo da ordem (número natural, digamos p) em que se verifica a condição da definição. Em termos práticos, para se estudar a monotonia de uma dada sucessão, determinamos a diferença

$$u_{n+1} - u_n$$

e comparamo-la com 0. Se for maior do que 0, é monótona crescente, caso contrário é monótona decrescente. Existem casos em que se torna mais fácil determinar o quociente

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

e compará-lo com 1. Obviamente, aqui, este quociente só é possível se $u_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Nesses casos, a sucessão é crescente se for maior do que 1 e decrescente se for menor. Esta forma de terminar a monotonia é mais indicada para progressões geométricas, enquanto que a anterior é mais apropriada para progressões aritméticas.

Exemplo 1.2.2 (`AULA TEÓRICA`). *Estude as seguintes sucessões quanto à monotonia:*

$$u_n = 2n - 1, \quad n \in \mathbb{N}, \quad e \quad v_n = \frac{1}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Subsucessão

Uma subsucessão é uma sucessão cujo conjunto dos seus termos é um subconjunto do conjunto dos termos de dada sucessão. Para a definição de subsucessão, necessitamos de introduzir o conceito de composição de sucessões, que é um caso particular da composição de funções. Sejam u_n e v_n duas sucessões, a última das quais de termos naturais. Define-se a **composição das sucessões** u_n e v_n como sendo a sucessão $(u \circ v)_n$ que tem por termo de ordem k o termo de ordem v_k (repare que v_n é uma sucessão de termos naturais) da sucessão u_n. Ou seja,

$$(u \circ v)_k = u_{v_k}.$$

Definição 1.2.3 (Subsucessão). *Sejam u_n uma sucessão de termos reais e k_n uma sucessão de termos naturais estritamente crescente. A sucessão composta $(u \circ k)_n$ designa-se por subsucessão da sucessão u_n e o seu termo geral é denotado por u_{k_n}.*

Dada uma sucessão qualquer u_n de termos reais, podemos considerar sempre as seguintes subsucessões.

- Fazendo $k_n = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, obtemos a sucessão v_n de termo geral
$$v_n = u_n.$$
Isto é, toda a sucessão é subsucessão de si própria.

- Fazendo $k_n = 2n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, obtemos a sucessão v_n de termo geral
$$v_n = u_{2n}$$
Portanto, podemos sempre considerar a subsucessão dos termos de ordem par.

- Fazendo $k_n = 2n - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, obtemos a subsucessão v_n de termo geral
$$v_n = u_{2n-1}.$$
Ou seja, podemos também sempre considerar a subsucessão dos termos de ordem ímpar.

Exemplo 1.2.3 (`AULA TEÓRICA`). *Determine duas subsucessões da seguinte sucessão*

$$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots .$$

1.3 Convergência

Sucessão convergente

Dizemos que uma **sucessão** u_n de termos reais **tende** para determinada quantidade A, finita ou não, se, a partir de determinada ordem (número natural), os termos da sucessão vão estar tão próximos de A quanto se queira. Convém ressalvar aqui o caso em que A é infinito e a proximidade de infinito ser sempre um abuso de linguagem. Abreviadamente, podemos escrever

$$u_n \longrightarrow A.$$

No caso de A ser finito, isto é, um número real, dizemos que a sucessão u_n converge.

Definição 1.3.1 (sucessão convergente)**.** *Uma sucessão u_n converge para $a \in \mathbb{R}$, se*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ p = p(\varepsilon) \in \mathbb{N} : (\ \forall\ n \in \mathbb{N}\ \ e\ n > p\ ) \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon. \tag{1.3.6}$$

O real a da definição anterior chama-se **limite da sucessão** e, habitualmente, escrevemos

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = a.$$

A definição de sucessão convergente anterior, pode ser traduzida do modo seguinte: a partir de certa ordem ($n > p$) os termos da sucessão vão estar tão próximos do limite ($|u_n - a| < \varepsilon$) quanto se queira ($\forall\ \varepsilon$). Para percebermos melhor este conceito, consideremos, por exemplo, a sucessão de números racionais seguinte que aproxima o irracional $\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned}
&u_0 = 1\\
&u_1 = 1.4\\
&u_2 = 1.41\\
&u_3 = 1.414\\
&u_4 = 1.4142\\
&u_5 = 1.41421\\
&u_6 = 1.414213\\
&u_7 = 1.4142135\\
&u_8 = 1.41421356\\
&u_9 = 1.414213562\\
&\cdots
\end{aligned}$$

Escolhamos, agora, $\varepsilon = 10^{-4}$ e vejamos, para este ε, a partir de que ordem p a definição anterior se verifica. Resolvendo,

$$|u_n - \sqrt{2}| < 10^{-4} \Leftrightarrow u_n > 1.4142 \Rightarrow n \geq 4\,.$$

Deste modo, para o valor de $\varepsilon = 10^{-4}$, a definição anterior verifica-se a partir da ordem $p = 4$ ($n \geq 4$). Apesar de ser um indicativo, isto não prova nada. O importante é que para cada $\varepsilon > 0$ que se escolha, consigamos sempre encontrar uma ordem p a partir da qual a definição anterior seja verificada.

Exemplo 1.3.1 (`AULA TEÓRICA`)**.** *Usando a definição, mostre que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

As **sucessões** que não são convergentes dizem-se **divergentes**. Caso particularmente importante das sucessões divergentes são aquelas que tendem para $+\infty$ ou $-\infty$. Uma sucessão tende para $+\infty$, se, a partir de certa ordem, os seus termos são tão grandes quanto se queira. De modo análogo, uma sucessão tende para $-\infty$, se, a partir de certa ordem, os seus termos são tão pequenos quanto se queira.

Definição 1.3.2. *Uma* ***sucessão*** *u_n* ***tende para*** *$+\infty$, se*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ p = p(\varepsilon) \in \mathbb{N} : (\ \forall\ n \in \mathbb{N}\ \ e\ n > p\ ) \Rightarrow u_n > \frac{1}{\varepsilon}. \tag{1.3.7}$$

Uma ***sucessão*** u_n ***tende para*** $-\infty$*, se*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \ \ \exists\ p = p(\varepsilon) \in \mathbb{N} : (\ \forall\ n \in \mathbb{N}\ \ e\ n > p\ ) \Rightarrow u_n < -\frac{1}{\varepsilon}. \tag{1.3.8}$$

Por extensão da noção de limite a $+\infty$ e $-\infty$, podemos escrever também

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty,$$

no caso da sucessão u_n tender para $+\infty$ ou $-\infty$, respectivamente.

Exemplo 1.3.2 (`AULA TEÓRICA`). *Usando a definição, mostre que*

$$\lim_{n\to+\infty} 2(n+1) = +\infty \quad e \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1-n}{2} = -\infty.$$

Uma sucessão u_n designa-se por um **infinitamente grande positivo**, se tender para $+\infty$:

$$u_n \longrightarrow +\infty.$$

Diz-se que é um **infinitamente grande negativo**, se tender para $-\infty$:

$$u_n \longrightarrow -\infty.$$

Chama-se **infinitésimo**, ou **infinitamente pequeno**, a uma sucessão u_n que tenda para 0:

$$u_n \longrightarrow 0.$$

O limite de uma subsucessão de uma sucessão é designado por **sublimite** dessa sucessão.

Definição 1.3.3. *O maior dos sublimites de uma sucessão* u_n *denomina-se* ***limite superior*** *e definimo-lo por:*

$$\limsup_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \sup\{a : a \ \textit{é sublimite de}\ u_n\}.$$

O menor dos sublimites de uma sucessão u_n *denomina-se* ***limite inferior*** *e definimo-lo por:*

$$\liminf_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \inf\{a : a \ \textit{é sublimite de}\ u_n\}.$$

Resulta da definição anterior que, para qualquer sucessão u_n, no caso de existirem sublimites,

$$\liminf_{n\longrightarrow+\infty} u_n \leq \limsup_{n\longrightarrow+\infty} u_n.$$

Tal como para o limite de uma sucessão, podemos, também, estender as noções de limite superior e inferior a $+\infty$ e $-\infty$. Isto acontece no caso em que o conjunto dos sublimites da sucessão não é majorado ou não é minorado, respectivamente.

Exemplo 1.3.3 (`AULA TEÓRICA`). *Determine os limites superior e inferior da sucessão*

$$u_n = \frac{n+(-1)^n n}{n}.$$

Propriedades

A afirmação da proposição seguinte diz-nos que o limite de uma sucessão, a existir, é único.

Proposição 1.3.1. *Sejam u_n uma sucessão e $a,\ b \in \mathbb{R}$. Se*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = a \quad e \quad \lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = b,$$

então $a = b$.

Demonstração. Suponhamos que u_n era uma sucessão convergente simultaneamente para a e b, números reais. Então, por definição, teríamos

$$\forall\ \varepsilon > 0 \ \ \exists\ p_1 = p_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} : (\ \forall\ n \in \mathbb{N} \text{ e } n > p_1\ ) \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon,$$

$$\forall\ \varepsilon > 0 \ \ \exists\ p_2 = p_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} : (\ \forall\ n \in \mathbb{N} \text{ e } n > p_2\ ) \Rightarrow |u_n - b| < \varepsilon,$$

com p_1 e p_2 não necessariamente iguais. Daqui vem que para $n > p := \max\{p_1, p_2\}$

$$|a - b| = |u_n - b - (u_n - a)| \leq |u_n - b| + |u_n - a| < 2\varepsilon.$$

Como ε é arbitrário, podemos fazer $\varepsilon \to 0$ e obter

$$|a - b| \leq 0 \Rightarrow a - b = 0 \Leftrightarrow a = b,$$

como queríamos demonstrar. □

Proposição 1.3.2. *Se u_n é uma sucessão convergente, então u_n é limitada.*

Demonstração. Seja u_n uma sucessão convergente, digamos para $a \in \mathbb{R}$. Então de (1.3.6) sai que para todo $n > p$

$$a - \varepsilon < u_n < a + \varepsilon.$$

Consideremos o conjunto de termos $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ e sejam

$$m := \min\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}, \quad M := \max\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}.$$

Temos então para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\min\{a - \varepsilon, m\} \leq u_n \leq \max\{a + \varepsilon, M\},$$

o que mostra, de acordo com (1.2.4), que u_n é limitada. □

A afirmação recíproca da proposição anterior é falsa como mostra o contra-exemplo da sucessão $u_n = (-1)^n$ que é limitada, mas divergente. No entanto, se além de limitada, a sucessão for monótona, a recíproca já é válida.

Proposição 1.3.3. *Se u_n é uma sucessão monótona e limitada, então u_n é convergente. Mais:*

- *se u_n é crescente, então*

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \sup\{u_n : n \in \mathbb{N}\};$$

- *se u_n é decrescente, então*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \inf\{u_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Demonstração. Seja u_n uma sucessão monótona e limitada. Admitamos, primeiro, que u_n é monótona crescente. Então, usando a monotonia crescente e o facto de u_n ser limitada, podemos definir

$$a := \sup\{u_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Pela caracterização do supremo, podemos escrever

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ p_* \in \mathbb{N} : (\ \forall\ n \in \mathbb{N} \text{ e } n > p_*\ ) \Rightarrow a - \varepsilon < u_{p_*}.$$

Assim, pela monotonia crescente, vem que

$$n > p_* \Rightarrow a - \varepsilon < u_{p_*} \leq u_n \leq a < a + \varepsilon.$$

Deste modo, (1.3.6) é verificada, ou seja, u_n é convergente.

No caso de u_n ser monótona decrescente, a demonstração é análoga. □

Exemplo 1.3.4 (`AULA TEÓRICA`). *Usando a proposição anterior, mostre que a sucessão seguinte é convergente e calcule o seu limite:*

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases}.$$

A afirmação recíproca da proposição anterior é falsa, pois existem sucessões convergentes que não são monótonas.

Exemplo 1.3.5 (`AULA TEÓRICA`). *Mostre que a sucessão seguinte é convergente, mas não é monótona:*

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n}.$$

Proposição 1.3.4. *Uma sucessão u_n é convergente se e só se qualquer sua subsucessão u_{n_k} converge para o mesmo limite.*

Demonstração. Suponhamos que u_n é uma sucessão convergente, digamos para $a \in \mathbb{R}$. Seja u_{n_k} uma subsucessão de u_n. Então n_k é uma subsucessão de naturais estritamente crescente, pelo que $n_k \geq k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim, de (1.3.6) vem

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ p \in \mathbb{N} : k > p \Rightarrow n_k \geq k > p \Rightarrow |u_{n_k} - a| \leq |u_n - a| < \varepsilon.$$

Portanto, u_{n_k} converge para a.

Reciprocamente, como u_n é uma subsucessão de si própria, implica que trivialmente u_n é convergente. □

Observe-se que, pela proposição anterior, se uma sucessão tem, pelo menos, duas subsucessões com limites diferentes, então é divergente. Depois do resultado anterior, levanta-se a questão de saber em que condições uma sucessão tem subsucessões convergentes.

Proposição 1.3.5. *Seja u_n uma sucessão (de termos reais). Então existe, pelo menos, uma subsucessão u_{n_k} monótona.*

Demonstração. Suponhamos, primeiro, que existem infinitos naturais $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < \ldots$ tais que, para cada $j = 1, \ldots, k$, x_j é maior que qualquer termo na sucessão, *i.e.*

$$m > n_j \Rightarrow u_{n_j} > u_m \, .$$

Então a subsucessão u_{n_k} é monótona decrescente. Suponhamos, agora, que existe apenas uma quantidade finita de naturais $n_1 < n_2 < \cdots < n_N$ nas condições anteriores. Seja agora $m_1 = N + 1$. Então, como $m_1 > N$, existe $m_2 > m_1$ com $x_{m_2} > x_{m_1}$. Novamente, como $m_2 > N$, existe $m_3 > m_2$ com $x_{m_3} > x_{m_2}$. Repetindo este processo, leva-nos a uma subsucessão (infinita) crescente x_{m_j} como desejado. □

Proposição 1.3.6. *Seja u_n uma sucessão limitada. Então u_n tem, pelo menos, uma subsucessão u_{n_k} convergente.*

Demonstração. Se u_n é uma sucessão limitada, então qualquer sua subsucessão também é limitada. Pela Proposição 1.3.5, sabemos que de u_n podemos extrair uma subsucessão u_{n_k} monótona. Então, sendo u_{n_k} monótona e limitada, pela Proposição 1.3.3, u_{n_k} é convergente. □

O resultado da proposição anterior é, por vezes, denominado Teorema de Bolzano[2]-Weierstrass[3]. Daqui, resulta que é condição necessária e suficiente para uma sucessão limitada u_n convergir que

$$\liminf_{n \longrightarrow +\infty} u_n = \limsup_{n \longrightarrow +\infty} u_n .$$

Exemplo 1.3.6 (`AULA TEÓRICA`). *A sucessão $u_n = (-1)^n$ é divergente.*

Sucessão de Cauchy

Por vezes, torna-se muito difícil provar, pela Definição 1.3.1, que uma sucessão é convergente, apesar de verificarmos que converge usando técnicas de cálculo de limites de que iremos escrever mais adiante. Torna-se, portanto, útil encontrar formas equivalentes de provar que uma sucessão é convergente. Nesse intuito, introduzimos de seguida o conceito de sucessão de Cauchy[4]

Definição 1.3.4 (Sucessão de Cauchy). *Diz-se que uma sucessão u_n é de Cauchy, se*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, p = p(\varepsilon) \in \mathbb{N} : (\; \forall\, m,\; n \in \mathbb{N} \text{ e } m, n \geq p \;) \Rightarrow |u_m - u_n| < \varepsilon. \tag{1.3.9}$$

O significado desta definição é o de que a partir de certa ordem, digamos p ($m,\; n \geq p$), os termos correspondentes da sucessão (u_m e u_n) estarão tão próximos ($|u_m - u_n| < \varepsilon$) quanto se queira ($\forall \varepsilon > 0$). Observe-se que nada se diz sobre a relação de ordem entre m e n.

Exemplo 1.3.7 (`AULA TEÓRICA`). *Mostre que a sucessão $u_n = \frac{1}{n}$ é de Cauchy.*

[2]Bernhard Bolzano (1781-1848), matemático checo natural de Praga.
[3]Karl Weierstrass (1815-1897), matemático alemão natural de Ostenfelde.
[4]Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), matemático francês natural de Paris.

Tal como para as sucessões convergentes, a proposição abaixo mostra que toda a sucessão de Cauchy é limitada.

Proposição 1.3.7. *Toda a sucessão de Cauchy é limitada.*

Demonstração. Por (1.3.9), podemos escolher $p \in \mathbb{N}$ tão grande de modo que

$$m,\ n > p \Rightarrow |u_m - u_n| < 1.$$

Em particular,

$$n > p \Rightarrow |u_n| \leq |u_p + (u_n - u_p)| \leq |u_p| + |u_n - u_p| < |u_p| + 1.$$

Assim, para todo $n \in \mathbb{N}$ temos

$$|u_n| \leq \max\{|u_1|, |u_2|, \cdots, |u_p|\} + 1$$

e, por (1.2.5), u_n é limitada. $\square$

A grande utilidade da noção de sucessão de Cauchy, é provar, de um modo mais simples, que uma dada sucessão é convergente. O resultado estabelecido na proposição seguinte é, pois, esperado.

Proposição 1.3.8. *Uma sucessão é convergente se e só se for sucessão de Cauchy.*

Demonstração. Seja u_n uma sucessão convergente. Então, de (1.3.6), temos para todo $m > p$ e todo $n > p$

$$|u_m - u_n| = |u_m - a - (u_n - a)| \leq |u_m - a| + |u_n - a| \leq 2\varepsilon.$$

Portanto, (1.3.9) é verificada e, assim, u_n é uma sucessão de Cauchy.

Reciprocamente, se u_n é uma sucessão de Cauchy, vem de (1.3.9) que

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ p_1 =\in \mathbb{N} : m,\, n \geq p \Rightarrow |u_m - u_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por outro lado, pela Proposição 1.3.7, u_n é limitada e, pela Proposição 1.3.6, u_n tem, pelo menos, uma subsucessão, digamos u_{n_k}, convergente para algum $u \in \mathbb{R}$. Logo

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ p_2 =\in \mathbb{N} : k \geq p \Rightarrow |u_{n_k} - u| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tomemos, agora, $p = \max\{p_1, p_2\}$ e observemos que

$$n_k \geq k\,, \quad k > p \Rightarrow k,\ n_k > p_1, \quad n_k > p_2\,.$$

Então

$$k > p \Rightarrow |u_n - u| \leq |u_n - u_{n_k}| + |u_{n_k} - u| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,,$$

o que mostra que (1.3.6) é verificada e, portanto, u_n é convergente. $\square$

Dada a equivalência entre as noções de sucessão convergente e de sucessão de Cauchy, por vezes a definição de sucessão de Cauchy é designada por Princípio Geral de Convergência de Cauchy. Existem mesmo muitos autores que falam de definição de sucessão convergente no sentido de Cauchy. Neste sentido, e para a distinguir, a primeira (Definição 1.3.1) é designada por noção de sucessão convergente no sentido de Heine[5]. O exemplo seguinte mostra-nos a grande utilidade da noção de sucessão de Cauchy.

[5]Heinrich Eduard Heine (1821-1881), matemático alemão natural de Berlim.

Exemplo 1.3.8 (`AULA TEÓRICA`). *Usando a noção de sucessão de Cauchy, mostre que as sucessões seguintes são, respectivamente, convergente e divergente:*

$$\text{a)}\ \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}; \qquad \text{b)}\ s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\,.$$

Critérios de convergência

As proposições seguintes estabelecem relações de ordem entre os limites de sucessões a partir dos seus termos gerais.

Proposição 1.3.9. *Sejam u_n e v_n duas sucessões convergentes para a e b, respectivamente. Se, a partir de certa ordem, $u_n \leq v_n$, então $a \leq b$.*

Demonstração. Se u_n e v_n são duas sucessões convergentes, respectivamente, para a e b, temos a partir de (1.3.6)

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ p_1 \in \mathbb{N} : n > p_1 \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon,$$
$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ p_2 \in \mathbb{N} : n > p_2 \Rightarrow |v_n - b| < \varepsilon.$$

Suponhamos que

$$\exists\ p_3 \in \mathbb{N} : n > p_3 \Rightarrow u_n \leq v_n.$$

Observe-se que p_1, p_2 e p_3 poderão ser distintos. Definindo $p := \max\{p_1, p_2, p_3\}$, temos pelas afirmações anteriores

$$\begin{aligned} n > p \Rightarrow a - b = a - u_n + u_n - b &\leq a - u_n + v_n - b \\ &\leq |a - u_n + v_n - b| \leq |a - u_n| + |v_n - b| < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Como ε é arbitrário, podemos fazer $\varepsilon \to 0$ e obtemos $a \leq b$. $\square$

Esta proposição tem uma grande aplicação prática no cálculo de limites. Essa aplicação é mais visível na utilização do seguinte resultado também conhecido por Princípio do Encaixe.

Proposição 1.3.10 (Critério da Sucessão Enquadrada)**.** *Sejam u_n, v_n, x_n sucessões tais que, a partir de certa ordem, $u_n \leq v_n \leq x_n$. Se u_n e x_n são convergentes e*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = a = \lim_{n \longrightarrow +\infty} x_n, \quad a \in \mathbb{R},$$

então v_n é convergente e

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} v_n = a.$$

Demonstração. Se u_n e x_n são duas sucessões convergentes, ambas para a, temos

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ p_1 \in \mathbb{N} : n > p_1 \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < u_n < a + \varepsilon,$$

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ p_2 \in \mathbb{N} : n > p_2 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Suponhamos que

$$\exists\ p_3 \in \mathbb{N} : n > p_3 \Rightarrow u_n \leq v_n \leq x_n.$$

Definindo $p := \max\{p_1, p_2, p_3\}$, temos pelo exposto acima

$$n > p \Rightarrow a - \varepsilon < u_n \leq v_n \leq x_n < a + \varepsilon \Rightarrow |v_n - a| < \varepsilon.$$

Pela definição (1.3.6), sai que v_n é uma sucessão convergente para a. □

Exemplo 1.3.9 (`AULA TEÓRICA`)**.** *Usando o critério anterior, mostre que a sucessão seguinte é convergente e calcule o seu limite:*

$$u_n = \frac{1}{n^2+1} + \cdots + \frac{1}{n^2+n}.$$

O resultado da Proposição 1.3.9 pode-se estender, em determinadas condições, ao caso em que os limites são infinitos

Proposição 1.3.11 (Critério de Comparação)**.** *Sejam u_n e v_n sucessões tais que, a partir de certa ordem, $u_n \leq v_n$.*

1. *Se v_n tende para $-\infty$, então u_n tende para $-\infty$.*
2. *Se u_n tende para $+\infty$, então v_n tende para $+\infty$.*

Demonstração. Suponhamos que

$$\exists\, p_1 \in \mathbb{N} : n > p_1 \Rightarrow u_n \leq v_n.$$

Se v_n tende para $-\infty$, temos por (1.3.8)

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, p_2 \in \mathbb{N} : n > p_2 \Rightarrow v_n < -\frac{1}{\varepsilon}.$$

Tomando $p := \max\{p_1, p_2\}$ tem-se pelo exposto

$$n > p \Rightarrow u_n \leq v_n < -\frac{1}{\varepsilon},$$

pelo que u_n tende para $-\infty$.

Se u_n tende para $+\infty$, por (1.3.7) tem-se

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, p_3 \in \mathbb{N} : n > p_3 \Rightarrow u_n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Tomando agora $p := \max\{p_1, p_3\}$ temos

$$n > p \Rightarrow v_n \geq u_n > \frac{1}{\varepsilon}$$

e, portanto, v_n tende para $+\infty$. □

Exemplo 1.3.10 (`AULA TEÓRICA`)**.** *Usando o critério anterior, mostre que a sucessão $u_n = 2(n+1)^2$ tende para $+\infty$.*

O resultado seguinte diz-nos que a afirmação recíproca da Proposição 1.3.9 também é válida.

Proposição 1.3.12. *Sejam u_n e v_n duas sucessões convergentes e suponhamos que*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

Então, a partir de certa ordem, $u_n \leq v_n$.

Demonstração. Se u_n e v_n são sucessões convergentes, digamos para a e b, respectivamente, então por (1.3.6) temos

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ p_1 \in \mathbb{N} : n > p_1 \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon,$$

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ p_2 \in \mathbb{N} : n > p_2 \Rightarrow |v_n - b| < \varepsilon.$$

Suponhamos que $a \leq b$. Então, tomando $p := \max\{p_1, p_2\}$, temos pelo exposto acima

$$\begin{aligned} n > p \Rightarrow u_n - v_n = u_n - a + (a - v_n) &\leq u_n - a + (b - v_n) \\ &\leq |u_n - a| + |v_n - b| < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Dado que ε é arbitrário, podemos fazer $\varepsilon \to 0$ e obtemos $u_n \leq v_n$ para todo $n > p$. □

A proposição seguinte diz-nos que o produto de um infinitésimo por uma sucessão limitada é, ainda, um infinitésimo.

Proposição 1.3.13. *Sejam u_n uma sucessão limitada e v_n uma sucessão convergente tal que*

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 0.$$

Então $(u\,v)_n = u_n\,v_n$ é uma sucessão convergente e

$$\lim_{n\to+\infty} u_n\,v_n = 0.$$

Demonstração. Suponhamos que v_n é uma sucessão convergentes para 0. Então de (1.3.6) sai que

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ p \in \mathbb{N} : n > p \Rightarrow |v_n| < \varepsilon.$$

Por outro lado, se u_n é uma sucessão limitada, podemos conjugar a afirmação anterior com (1.2.5) para obter

$$n > p \Rightarrow |u_n v_n| = |u_n||v_n| \leq C|v_n| < C\varepsilon.$$

Como $C\varepsilon$ é arbitrário, acabamos de mostrar que $u_n v_n$ converge para 0. □

Exemplo 1.3.11 (`AULA TEÓRICA`). *Usando a proposição anterior, mostre que a sucessão seguinte é um infinitésimo:*

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n}.$$

1.4 Limites de sucessões

A recta acabada

A recta acabada surge da necessidade de estender as operações algébricas habituais do conjunto dos números reais de modo a poder-se operar com os elementos $+\infty$ e $-\infty$. Estes elementos satisfazem a relação de ordem seguinte:

$$-\infty < x < +\infty \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Definição 1.4.1 (Recta acabada)**.** *Define-se a recta acabada e denota-se por $\overline{\mathbb{R}}$ como sendo o conjunto seguinte:*

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Com a introdução da recta acabada $\overline{\mathbb{R}}$, torna-se necessário definir as operações algébricas entre os elementos desse conjunto. Se os elementos de $\overline{\mathbb{R}}$ forem ainda reais, isto é elementos de $\mathbb{R}$, as operações são como habitualmente.

Definição 1.4.2 (operações com $+\infty$ e $-\infty$)**.** *Para a* ***adição*** *tem-se:*

$$a + (+\infty) = +\infty, \quad a + (-\infty) = -\infty \quad \forall\, a \in \mathbb{R};$$

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty, \quad (-\infty) + (-\infty) = -\infty.$$

Para a ***multiplicação*** *tem-se:*

$$a \times (+\infty) = +\infty, \quad a \times (-\infty) = -\infty \quad \forall\, a > 0;$$

$$a \times (+\infty) = -\infty, \quad a \times (-\infty) = +\infty \quad \forall\, a < 0;$$

$$(+\infty) \times (+\infty) = +\infty, \quad (+\infty) \times (-\infty) = -\infty, \quad (-\infty) \times (-\infty) = +\infty.$$

As operações de subtracção e divisão são operações inversas da adição e multiplicação, respectivamente. Assim, tem-se para a **subtracção**:

$$a - (+\infty) = a + (-\infty) = -\infty, \quad a - (-\infty) = a + (+\infty) = +\infty \quad \forall\, a \in \mathbb{R};$$

$$(+\infty) - (-\infty) = (+\infty) + (+\infty) = +\infty.$$

E para a **divisão** tem-se:

$$\frac{+\infty}{a} = +\infty, \quad \frac{-\infty}{a} = -\infty \quad \forall\, a \geq 0;$$

$$\frac{+\infty}{a} = -\infty, \quad \frac{-\infty}{a} = +\infty \quad \forall\, a \leq 0;$$

Pela sua importância, também consideramos a operação de **potenciação**:

$$a^b, \quad a \geq 0.$$

Nos casos em que o expoente b é um natural, a potenciação não é mais do que uma multiplicação repetida. As potências entre números reais definem-se como habitualmente. No caso em que intervêm os elementos $+\infty$ e $-\infty$, temos:

$$a^{+\infty} = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq a < 1 \\ +\infty & \text{se } a > 1 \end{cases} ; \quad a^{-\infty} = \frac{1}{a^{+\infty}} = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0 \leq a < 1 \\ 0 & \text{se } a > 1 \end{cases} ;$$

$$(+\infty)^b = \begin{cases} 0 & \text{se } b < 0 \\ +\infty & \text{se } b > 0. \end{cases}$$

Indeterminações

Pelo exposto na secção anterior, verifica-se a existência de omissões na definição das operações algébricas entre alguns elementos de $\overline{\mathbb{R}}$. Em $\mathbb{R}$ já conhecemos as seguintes situações em que as operações não estão definidas:

$$\frac{0}{0} \qquad \text{e} \qquad 0^0.$$

Em $\overline{\mathbb{R}}$, quando não for possível determinar uma operação, diremos que estamos perante uma **indeterminação**.

Definição 1.4.3 (Indeterminações)**.** *As indeterminações em $\overline{\mathbb{R}}$ são dos tipos:*

- $\infty - \infty$
$$+\infty + (-\infty) = +\infty - \infty, \quad +\infty - (+\infty) = +\infty - \infty;$$
- $0 \times \infty$
$$0 \times (+\infty), \quad 0 \times (-\infty);$$
- 1^∞
$$1^{+\infty}, \quad 1^{-\infty} = \frac{1}{1^{+\infty}};$$
- ∞^0
$$(+\infty)^0.$$

Existem outras indeterminações, mas que poderão ser analisadas como casos particulares dos dados na definição anterior. Esses casos, são as indeterminações dos tipos:

- $\dfrac{\infty}{\infty}$
$$\frac{\infty}{\infty} = \frac{1}{\infty} \times \infty = 0 \times \infty;$$
- $\dfrac{0}{0}$ - já existente em $\mathbb{R}$
$$\frac{0}{0} = 0 \times \frac{1}{0} = 0 \times \infty;$$
- 0^0 - já existente em $\mathbb{R}$
$$0^0 = \left(\frac{1}{+\infty}\right)^0 = \frac{1}{(+\infty)^0}.$$

Convém referir que, como sai da parte final da secção anterior, não são indeterminações os casos particulares seguintes:

$$0^{+\infty} = 0, \quad 0^{-\infty} = \frac{1}{0^{+\infty}} = \frac{1}{0} = +\infty;$$

$$(+\infty)^{+\infty} = +\infty; \quad (+\infty)^{-\infty} = \frac{1}{(+\infty)^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Cálculo de limites

Nesta altura podemos, então, definir as operações algébricas entre os limites de sucessões, limites esses que poderão ser infinitos.

Proposição 1.4.1. *Sejam u_n e v_n sucessões e $a,\ b \in \overline{\mathbb{R}}$ tais que*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = a \quad e \quad \lim_{n \longrightarrow +\infty} v_n = b.$$

Então, salvo os casos em que se obtêm indeterminações, temos:

1. $$\lim_{n \longrightarrow +\infty} (u_n \pm v_n) = a \pm b;$$

2. $$\lim_{n \longrightarrow \infty} (u_n \times v_n) = a \times b;$$

3. *se $b \neq 0$ e $v_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$,*
$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \left(\frac{u_n}{v_n} \right) = \frac{a}{b};$$

4. *se u_n é uma sucessão de termos positivos,*
$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \left({u_n}^{v_n} \right) = a^b.$$

Demonstração. Ver, por exemplo, J. Campos Ferreira, Capítulo II.1. □

No cálculo de limites podemos usar a Proposição 1.4.1 sempre que não obtenhamos indeterminações. Mas, em muitas situações de cálculo de limites, surgem indeterminações. Ao processo de resolver determinada indeterminação, vamos designar por **levantamento da indeterminação**.

Regra 1 (levantamento de indeterminações do tipo $\infty - \infty$)**.** *As indeterminações dos tipos*

$$\infty - \infty,$$

podem, normalmente, ser levantadas pondo em evidência o termo de maior grau, ou, no caso em que envolvem raízes, multiplicando pelo conjugado.

Exemplo 1.4.1 (AULA TEÓRICA)**.** *Calcule os limites seguintes:*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} (n^2 - 2n) \qquad e \qquad \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right).$$

Regra 2 (levantamento de indeterminações do tipo $0 \times \infty$)**.** *As indeterminações dos tipos*

$$0 \times \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0},$$

podem, normalmente, ser levantadas pondo em evidência os termos de maior grau.

Exemplo 1.4.2 (AULA TEÓRICA)**.** *Calcule os limites seguintes:*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+2}}{n-1} \qquad e \qquad \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{3^{2n} - 5^{n+1}}{4^{n+1} + 2^{2n}}.$$

Limites importantes

Para o levantamento de indeterminações do tipo 1^∞, temos de introduzir um resultado importante.

Proposição 1.4.2. *A sucessão*

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

é estritamente crescente e $2 \leq u_n < 3$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Mais,*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{n!}\right). \tag{1.4.10}$$

Demonstração. Comecemos por mostrar que u_n é monótona crescente. Pela fórmula do Binómio de Newton[6], temos depois de simplificarmos

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\frac{n-1}{n}+\frac{1}{3!}\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\frac{(n-1)!}{n^{n-2}}+\frac{1}{n!}\frac{(n-1)!}{n^{n-1}}\\
&= 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\\
&\quad \frac{1}{(n-1)!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-2}{n}\right)+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).\\
&> 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n-1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n-1}\right)\left(1-\frac{2}{n-1}\right)+\cdots\\
&\quad +\frac{1}{(n-1)!}\left(1-\frac{1}{n-1}\right)\left(1-\frac{2}{n-1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-2}{n-1}\right)\\
&= 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\frac{n-2}{n-1}+\frac{1}{3!}\frac{(n-2)(n-3)}{(n-1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\frac{(n-2)!}{(n-1)^{n-2}}=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

A segunda igualdade resulta do facto de se ter para quaisquer $n,\ k \in \mathbb{N}$, com $k+1 \leq n$,

$$\frac{(n-1)!}{(n-(k+1))!n^k} = \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k)}{n^k} = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k}{n}\right)$$

A desigualdade resulta de se ter suprimido o último termo na igualdade imediatamente anterior e de se ter aumentado todos os subtractivos. A última igualdade resulta da simplificação motivada pelo regresso à fórmula do Bínómio de Newton para u_{n-1}. Portanto, podemos concluir que u_n é estritamente monótona crescente.

Para a segunda parte da proposição, comecemos por observar que da monotonia crescente sai que

$$u_n \geq u_1 = 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

[6]**Binómio de Newton**: Para quaisquer $a\,,\ b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
(a+b)^n =& a^n + na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2+\cdots+\frac{n!}{k!(n-k)!}a^{n-k}b^k+\cdots+\frac{n(n-1)}{2}a^2b^{n-2}+nab^{n-1}+b^n\\
=&\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}a^{n-k}b^k\,.
\end{aligned}$$

Isaac Newton (1642-1726), físico, matemático, astrónomo e teólogo inglês, natural de Lincolnshire.

Por outro lado, a expansão do Binómio de Newton como foi feita acima e o facto de $k! > 2^{k-1}$ para todo $k \geq 3$, bem como as propriedades das progressões geométricas, implicam

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots \\ &\quad +\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \\ &< 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} \\ &< 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n} = 1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 3-\frac{1}{2^{n-1}} < 3.\end{aligned}$$

Assim, $2 \leq u_n < 3$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e, portanto, u_n é limitada. Nesta primeira parte mostramos que u_n é monótona e limitada. Logo, pela Proposição 1.3.3, u_n é convergente.

Para provar (1.4.10), comecemos por observar que acima já vimos que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

e

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+ \\ &\quad \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).\end{aligned}$$

Fazendo $n \to +\infty$ na última expressão, temos

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{k!}.$$

Pelo exposto, temos então

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{k!} \leq \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right).$$

Fazendo agora $k \to +\infty$, temos

$$\lim_{k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{k!}\right) \leq \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right).$$

Como k e n são variáveis mudas, pelo Critério da Sucessão Enquadrada provamos que a igualdade (1.4.10) é verificada. □

Definição 1.4.4 (Número de Neper). *Define-se o número de Neper* **e** *como sendo o limite finito seguinte:*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

A existência do limite anterior resulta da proposição seguinte. O valor do número de Neper que habitualmente se utiliza é obtido à custa do resultado expresso na proposição anterior. De facto, somando os cinco primeiros termos da sucessão do segundo membro de (1.4.10), obtemos uma aproximação às casas das centésimas do número de Neper [7]

$$e \simeq 2,71\,;$$

valor este que é o que habitualmente se usa em cálculos numéricos. O número e, apesar de já aparecer implícito nos trabalhos de Napier sobre logaritmos, só se tornou conhecido nos trabalhos de Euler[8] sobre a função exponencial. É por isso que denotamos este número com a letra inicial de Euler, apesar de o designarmos por número de Neper.

Proposição 1.4.3. *Sejam $a \in \mathbb{R}$ e u_n uma sucessão tal que*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} |u_n| = +\infty.$$

Então

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \left(1+\frac{a}{u_n}\right)^{u_n} = e^a. \tag{1.4.11}$$

Demonstração. Suponhamos primeiro que $u_n \to +\infty$ e $a = 1$. Sabemos que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, p \in \mathbb{N} : n > p \Rightarrow e - \varepsilon < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e + \varepsilon.$$

Se a sucessão u_n tem os termos todos inteiros, é imediato, pois usando a igualdade anterior tem-se

$$\exists q \in \mathbb{N} : n > q \Rightarrow u_n > p \quad \Rightarrow \quad e - \varepsilon < \left(1+\frac{1}{u_n}\right)^{u_n} < e + \varepsilon.$$

No caso de u_n ser qualquer, definamos uma nova sucessão por

$$v_n := \max\{z \in \mathbb{Z} : z \leq u_n\}.$$

Facilmente se verifica que o facto de $u_n \to +\infty$ implica que também $v_n \to +\infty$. Daqui e da definição de v_n sai que

$$\exists p \in \mathbb{N} : n > p \Rightarrow 0 < v_n \leq u_n < v_n + 1 \Rightarrow 1 + \frac{1}{v_n+1} < 1 + \frac{1}{u_n} \leq 1 + \frac{1}{v_n}.$$

Isto implica

$$\begin{aligned} &\left(1+\frac{1}{v_n+1}\right)^{v_n} < \left(1+\frac{1}{u_n}\right)^{u_n} \leq \left(1+\frac{1}{v_n}\right)^{v_n+1} \\ \Leftrightarrow &\left(1+\frac{1}{v_n+1}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{v_n+1}\right)^{v_n+1} < \left(1+\frac{1}{u_n}\right)^{u_n} \leq \left(1+\frac{1}{v_n}\right)^{v_n}\left(1+\frac{1}{v_n}\right). \end{aligned}$$

[7] John Napier (1550-1617), mais conhecido por Neper, e também por Nepair. Matemático, físico e astrónomo escocês, natural de Edimburgo.

[8] Leonhard Euler (1707-1783), matemátio e físico suiço, natural de Basileia.

Passando ao limite nesta última desigualdade e usando o Critério da Sucessão Enquadrada, provamos (1.4.11) no caso de $a = 1$ e $u_n \to +\infty$.

O caso de $u_n \to -\infty$ e $a = 1$ reduz-se ao anterior, pois

$$\left(1+\frac{1}{u_n}\right)^{u_n} = \left(1+\frac{1}{-(u_n+1)}\right)^{-(u_n+1)}\left(1+\frac{1}{-(u_n+1)}\right) \to e\times 1 = e,$$

dado que $u_n + 1 \to -\infty$.

Por fim, se a é um real qualquer, temos

$$\left(1+\frac{a}{u_n}\right)^{u_n} = \left[\left(1+\frac{1}{\frac{u_n}{a}}\right)^{\frac{u_n}{a}}\right]^a \longrightarrow e^a,$$

pois $u_n \to \infty$ implica $\frac{u_n}{a} \to \infty$ qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$. $\square$

Regra 3 (Levantamento de indeterminações do tipo 1^∞)**.** *As indeterminações do tipo*

$$1^\infty$$

podem, normalmente, ser levantadas usando a Definição 1.4.4 ou a Proposição 1.4.3.

Exemplo 1.4.3. *Calcule o limite seguinte:*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{n^3}\right)^{4n^3}.$$

Para o levantamento de grande parte das indeterminações do tipo ∞^0, introduzimos o resultado seguinte.

Proposição 1.4.4. *Sejam $a \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$ e u_n uma sucessão de termos positivos tal que*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = a.$$

Então

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\sqrt[n]{u_n} = a.$$

Demonstração. Suponhamos que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to a$ e admitamos primeiramente que $0 < a < +\infty$. Então por (1.3.6) temos

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, p \in \mathbb{N} : n \geq p \Rightarrow a-\varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < a+\varepsilon.$$

Então, usando um raciocínio indutivo, tem-se para qualquer $\varepsilon : 0 < \varepsilon < a$ e todo $n \geq p$ que

$$\begin{aligned}
&a-\varepsilon < \frac{u_n}{u_{n-1}} < a+\varepsilon \Leftrightarrow (a-\varepsilon)u_{n-1} < u_n < (a+\varepsilon)u_{n-1}\\
\Leftrightarrow&(a-\varepsilon)\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}u_{n-2} < u_n < (a+\varepsilon)\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}u_{n-2} \Rightarrow (a-\varepsilon)^2u_{n-2} < u_n < (a+\varepsilon)^2u_{n-2}\\
\Leftrightarrow&\cdots\\
\Leftrightarrow&(a-\varepsilon)^{n-(p+1)}\frac{u_{p+1}}{u_p}u_p < u_n < (a+\varepsilon)^{n-(p+1)}\frac{u_{p+1}}{u_p}u_p \Rightarrow (a-\varepsilon)^{n-p}u_p < u_n < (a+\varepsilon)^{n-p}u_p.
\end{aligned}$$

Assim,

$$0 < \varepsilon < a \ \wedge \ n > p \Rightarrow (a-\varepsilon)^n \frac{u_p}{(a-\varepsilon)^p} < u_n < (a+\varepsilon)^n \frac{u_p}{(a+\varepsilon)^p}$$
$$\Rightarrow (a-\varepsilon)\sqrt[n]{\frac{u_p}{(a-\varepsilon)^p}} < \sqrt[n]{u_n} < (a+\varepsilon)\sqrt[n]{\frac{u_p}{(a+\varepsilon)^p}}.$$

Como

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{u_p}{(a-\varepsilon)^p}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{u_p}{(a+\varepsilon)^p}} = 1,$$

tem-se, pelo Critério da Sucessão Enquadrada, que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = a$. A restrição $\varepsilon < a$ pode ser levantada, porque na definição (1.3.6) o que é importante é que ε seja arbitrariamente pequeno.

Se $a = 0$, temos

$$n \geq p \Rightarrow \left|\frac{u_n}{u_p}\right| = \left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right| \left|\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}\right| \cdots \left|\frac{u_{p+1}}{u_p}\right| < \varepsilon^{n-p} \Rightarrow -\varepsilon \sqrt[n]{\frac{u_p}{\varepsilon^p}} < \sqrt[n]{u_n} < \varepsilon \sqrt[n]{\frac{u_p}{\varepsilon^p}}.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário e

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{u_p}{\varepsilon^p}} = 1,$$

tem-se, pelo Critério da Sucessão Enquadrada, que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = 0$.

Finalmente, se $a = +\infty$, temos

$$n \geq p \Rightarrow \frac{u_n}{u_p} = \frac{u_n}{u_{n-1}} \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \cdots \frac{u_{p+1}}{u_p} > \frac{1}{\varepsilon^{n-p}} \Rightarrow \sqrt[n]{u_n} > \frac{1}{\varepsilon} \sqrt[n]{u_p\, \varepsilon^p}$$

e como $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_p\, \varepsilon^p} = 1$, vem, pela Proposição 1.3.11 que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = +\infty$. □

Regra 4 (Levantamento de indeterminações do tipo $(+\infty)^0$)**.** *As indeterminações do tipo*

$$(+\infty)^0$$

podem, normalmente, ser levantadas usando a Proposição 1.4.4.

Exemplo 1.4.4 (AULA TEÓRICA)**.** *Calcule o limite seguinte:*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt[n]{n^2+1}.$$

Existem muitas outras possibilidades de levantar indeterminações. Por exemplo, para levantar indeterminações do tipo $\infty \times 0$, ∞/∞ ou $0/0$, por vezes, temos de conjugar os resultados do Critério da Sucessão Enquadrada (Proposição 1.3.10) e da Proposição 1.4.4.

Proposição 1.4.5. *Sejam $a > 1$ um real e $p \in \mathbb{N}$ arbitrários. Temos:*

$$\text{a)} \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{n^p}{a^n} = 0, \qquad \text{b)} \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \qquad \text{c)} \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Demonstração. a) Usando a Proposição 1.4.4, podemos mostrar que, dados um real $a > 1$ e $p \in \mathbb{N}$, se tem

$$\frac{(n+1)^p}{n^p} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p \to 1 \Rightarrow \sqrt[n]{n^p} \to 1 \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{n^p}{a^n}} = \frac{\sqrt[n]{n^p}}{a} \longrightarrow \frac{1}{a} < 1.$$

Então para qualquer $\varepsilon : 0 < \varepsilon < 1$ existe $p_* \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > p_* \Rightarrow 0 < \sqrt[n]{\frac{n^p}{a^n}} < 1 - \varepsilon \Rightarrow 0 < \frac{n^p}{a^n} < (1-\varepsilon)^n \longrightarrow 0.$$

Logo, pelo Critério da Sucessão Enquadrada, $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n^p}{a^n} = 0$.

b) Novamente pela Proposição 1.4.4, podemos mostrar que para um dado real $a > 1$ se tem

$$\frac{(n+1)!}{n!} = n + 1 \to +\infty \Rightarrow \sqrt[n]{n!} \to +\infty \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{a^n}{n!}} = \frac{a}{\sqrt[n]{n!}} \longrightarrow 0.$$

Então para qualquer $\varepsilon : 0 < \varepsilon < 1$ existe $p_* \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > p_* \Rightarrow 0 < \sqrt[n]{\frac{a^n}{n!}} < 1 - \varepsilon \Rightarrow 0 < \frac{a^n}{n!} < (1-\varepsilon)^n \longrightarrow 0$$

e, pelo Critério da Sucessão Enquadrada, $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

c) Observemos que para todo $n \geq 2$ se tem

$$0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{n}{n} \times \frac{n-1}{n} \times \cdots \times \frac{2}{n} \times \frac{1}{n} \leq \frac{n^{n-1}}{n^n} = \frac{1}{n} \longrightarrow 0.$$

Assim, pelo Critério da Sucessão Enquadrada, $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$. $\square$

Observe-se que, da proposição anterior, podemos tirar o limite seguinte:

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n^p}{n!} = 0 \quad \forall\, p \in \mathbb{N}.$$

Outro exemplo para levantar indeterminações do tipo $\infty \times 0$, ∞/∞ ou $0/0$, consiste em usar o conhecimento de limites notáveis de funções. Alguns exemplos são os seguintes:

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} n\left(\sqrt[n]{e} - 1\right) = 1;$$

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1;$$

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} n \,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{n}\right) = 1;$$

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{(\ln\, n)^a}{n^b} = 0 \quad \text{para todos } a > 0,\ b > 0.$$

1.5 Ficha de exercícios nº 1

1. Calcule o primeiro termo, assim como os termos de ordem $n-1$, $2n$ e $2n-1$ das sucessões seguintes:

(a) $u_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n}$;

(b) $v_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{2^n}$;

(c) $x_n = (-1)^{n+1}\dfrac{n^2+2}{2n+3}$;

(d) $y_n = \dfrac{1}{n!}$;

(e) $w_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \dfrac{3}{n^2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$;

(f) $z_n = \begin{cases} z_1 = 1 \\ z_{n+1} = \sqrt{2+z_n} \end{cases}$.

2. Escreva o termo geral das sucessões cujos termos das primeiras ordens são os seguintes:

(a) $2, 5, 8, 11, \ldots$;

(b) $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \ldots$;

(c) $1,\ -\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{9},\ -\dfrac{1}{16},\ \dfrac{1}{25},\ \ldots$;

(d) $\dfrac{3}{7}, \dfrac{8}{11}, \dfrac{13}{15}, \dfrac{18}{19}, \ldots$;

(e) $1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13 \ldots$;

(f) $0,\ \dfrac{3}{2},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{5}{4},\ \dfrac{4}{5}, \ldots$.

3. Usando o Princípio de Indução Matemática, prove as afirmações seguintes:

(a) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$;

(b) $\dfrac{1}{1.3} + \dfrac{1}{3.5} + \dfrac{1}{5.7} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}$;

(c) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 < \dfrac{n^3}{3} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$;

(d) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$ [**Sugestão:** Usar a)];

(e) $2^n > n^2 \quad \forall\, n \geq 5$.

4. Calcule a soma dos 10 primeiros termos das progressões seguintes:

(a) $u_n = 2n - 1$;

(b) $v_n = \dfrac{2}{3^{n-1}}$;

(c) $x_n = (-1)^n$;

(d) $y_n = \dfrac{2}{3}(n+1)$.

5. Indique quais das sucessões do exercício 1 são majoradas, minoradas e limitadas.

6. Estude as sucessões seguintes quanto à monotonia:

(a) $s_n = \dfrac{n+1}{2n+4}$;

(b) $t_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;

(c) $u_n = \dfrac{n}{2^n}$;

(d) $v_n = \dfrac{n!}{n^n}$;

(e) $y_n = 1 + 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}$.

7. Calcule os limites seguintes:

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+3}{3n-1}$;

(b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2-1}{n^4+3}$;

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+7n-1}}{n+2}$;

(d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n(n+1)} - \sqrt{n(n-1)}\right)$;

(e) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n+1}{2^n-1}$;

(f) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3^{2n}+4^{n+1}}{5^n-2^{2n}}$.

8. Calcule os limites seguintes:

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n}$;

(b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{(n+1)!-n!}$;

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n^2+n-1}{n-3}}$;

(d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{\dfrac{n!}{n+1}}$.

9. Calcule os limites seguintes:

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n^3}$;

(b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2n+1}{2n+3}\right)^{4n}$;

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2n^2-5n+2}{2n^2+3n+1}\right)^{2n}$;

(d) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{n^2}(1+n^2)^{-\frac{n^2}{2}}$.

10. Usando o Princípio das Sucessões Enquadradas, calcule os limites seguintes:

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^2}\right)$;

(b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$;

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n^2+1}$;

(d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{n^n}$;

(e) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+\operatorname{sen}(n)}{n}$;

(f) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{3^n+5^n}$.

11. Calcule os limites superior e inferior das sucessões seguintes:

(a) $u_n = \dfrac{(-1)^n n^2+1}{n^2+2}$;

(b) $v_n = 1+\cos\left((n+1)\pi\right)$;

(c) $x_n = \dfrac{n+\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n}$;

(d) $y_n = \left(\dfrac{n^2+\cos(n\pi)}{n^2}\right)^{n^2+1}$.

Capítulo 2

Séries Numéricas

Neste capítulo vamos considerar somas de termos de sucessões, as quais se designam por séries. No entanto, é habitual designar as séries finitas por somatórios, deixando-se a designação de séries para as somas infinitas.

2.1 Somatórios

Os somatórios surgem como uma necessidade de simplificação da escrita de somas de termos de uma sucessão.

Definição 2.1.1 (Somatório)**.** *Sejam u_k uma sucessão de termos reais e $n \in \mathbb{N}$. O símbolo de somatório*

$$\sum_{k=1}^{n} u_k$$

define-se por recorrência da forma seguinte:

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 \quad se \quad n = 1 \qquad\qquad e \qquad\qquad \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n-1} u_k + u_n \quad se \quad n > 1.$$

Assim, para quaisquer $p,\ q \in \mathbb{N}$, com $p \leq q$, usamos o somatório

$$\sum_{k=p}^{q} u_k$$

para denotar a soma

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_q.$$

Neste caso, p diz-se o **limite inferior do somatório**, q o **limite superior** e u_k o **termo geral**.

Exemplo 2.1.1. *A soma S_n dos n primeiros termos de uma progressão aritmética ou geométrica u_k pode ser escrita do modo seguinte:*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Proposição 2.1.1. *Sejam u_k e v_k sucessões de termos reais e $c \in \mathbb{R}$. Então são válidas as propriedades seguintes:*

1. ***Aditiva***
$$\sum_{k=1}^{n}(u_k+v_k)=\sum_{k=1}^{n}u_k+\sum_{k=1}^{n}v_k;$$

2. ***Homogénea***
$$\sum_{k=1}^{n}(c\,u_k)=c\sum_{k=1}^{n}u_k;$$

3. ***Telescópica***
$$\sum_{k=1}^{n}(u_k-u_{k-1})=u_n-u_0.$$

Demonstração. A demonstração realiza-se facilmente, usando o método de indução matemática em n, pelo que a deixamos como exercício. □

2.2 Séries numéricas

A noção de série numérica infinita é introduzida para permitir a generalização do conceito de somatório com uma infinidade de parcelas numéricas.

Definição 2.2.1 (Série numérica)**.** *Seja u_n uma sucessão numérica. Designa-se por série numérica infinita o par formado pela sucessão u_n:*

$$u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots$$

e pela sucessão S_n seguinte:

$$S_1=u_1,\quad S_2=\sum_{k=1}^{2}u_k=u_1+u_2,\quad \ldots,\quad S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k=u_1+u_2+\cdots+u_n,\quad \ldots.$$

Os números u_1, u_2,..., u_n, ... denominam-se **termos da série**, sendo u_n o **termo geral da série**, e a sucessão de termos S_1, S_2, ..., S_n, ... designa-se por **sucessão das somas parciais**. Habitualmente, a série de termo geral u_n pode ser representada por um dos quatro modos seguintes:

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\ldots,\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}u_n,\qquad \sum_{n\geq 1}u_n,\qquad \sum u_n.$$

O limite inferior da série poderá ser qualquer outro número natural e, em muitas situações, poderá ser 0. Por norma, o limite inferior é o menor inteiro não negativo, a partir do qual, o termo geral da sucessão está definido em $\mathbb{R}$. Para simplificarmos a escrita, iremos designar toda a série numérica infinita apenas por série.

Definição 2.2.2 (Convergência). *Seja $\sum u_n$ uma série e S_n a sucessão das suas somas parciais.*

1. *Diz-se que a* ***série*** *$\sum u_n$ é* ***convergente****, se a sucessão S_n for convergente.*
2. *Se a sucessão S_n é divergente, a* ***série*** *$\sum u_n$ diz-se* ***divergente****.*

A convergência de uma série reduz-se, portanto, à convergência da sucessão das somas parciais. No caso em que a série $\sum u_n$ é convergente, existe, então, um real S tal que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} S_n = S.$$

O limite S denomina-se por **soma da série** e podemos escrever

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = S.$$

Exemplo 2.2.1 (Série finita). *Uma série finita é uma série (infinita), digamos $\sum u_n$, com os termos quase todos nulos, isto é, para a qual:*

$$\exists\ p \in \mathbb{N} : n > p \Rightarrow u_n = 0.$$

Proposição 2.2.1. *Toda a série finita é convergente e, no caso do Exemplo 2.2.1, a soma da série é dada por:*

$$S = \sum_{n=1}^{p} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_p.$$

Demonstração. Se $\sum u_n$ é uma série finita, então

$$(\exists\ p \in \mathbb{N} : n > p \Rightarrow u_n = 0) \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_p \longrightarrow u_1 + u_2 + \cdots + u_p = S$$

e, portanto, $S \in \mathbb{R}$. $\square$

Exemplo 2.2.2 (Série geométrica). *Designa-se por série geométrica toda a série da forma:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots ;$$

onde x é um real que se denomina ***razão da série****.*

Por vezes, as séries geométricas poderão aparecer na forma seguinte:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots .$$

Com esta notação evita-se de, no caso particular $x = 0$, termos a indeterminação 0^0.

Proposição 2.2.2. *A série geométrica*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

é convergente para $|x| < 1$ *e divergente para* $|x| \geq 1$*. Mais, no caso em que é convergente, a sua soma é dada por:*

$$S = \frac{1}{1-x}\,.$$

Demonstração. Comecemos por observar que a sucessão das somas parciais é dada por

$$S_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n.$$

Se $x = 1$, a série é divergente já que, neste caso,

$$S_n = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = n + 1 \longrightarrow +\infty.$$

Suponhamos então que $x \neq 1$. Neste caso, temos

$$(1-x)S_n = 1 - x^{n+1} \Leftrightarrow S_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} = \frac{1 - x^n x}{1-x}.$$

A convergência da série vai, assim, depender da convergência de x^n. Analisando esta última, temos

$$\lim_{n\to+\infty} x^n = \begin{cases} 0, & \text{se } |x| < 1 \\ \infty, & \text{se } |x| > 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & \text{se } |x| < 1 \\ \infty, & \text{se } |x| > 1. \end{cases}$$

Por fim, quando $x = -1$, tem-se

$$S_n = \frac{1 - (-1)^{n+1}}{1 - (-1)} = \frac{1 + (-1)^n}{2} = \begin{cases} 1, & \text{se } n \text{ é par} \\ 0, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}.$$

Logo S_n não converge, pelo que, neste caso, a série é divergente. □

Se a série geométrica aparecer na forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$

e for convergente, então a sua soma é dada por

$$S = \frac{x}{1-x}\,.$$

Exemplo 2.2.3 (`AULA TEÓRICA`)**.** *Verifique que a série seguinte é convergente e calcule a sua soma:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n}.$$

Exemplo 2.2.4 (Série de Mengoli[1]). *Designa-se por série de Mengoli, ou série redutível ou, ainda, série telescópica, a toda a série da forma:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n - u_{n+1}) \ .$$

Dado $p \in \mathbb{N}$, podemos generalizar o conceito de série de Mengoli à série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n - u_{n+p}) \ .$$

Proposição 2.2.3. *A série de Mengoli $\sum (u_n - u_{n+1})$ é convergente se a sucessão u_n for convergente. É divergente, se o limite de u_n não existe (ou não é finito). No caso em que é convergente, a soma é dada por:*

$$S = u_1 - \lim_{n \longrightarrow +\infty} u_{n+1} \, .$$

Demonstração. A sucessão das somas parciais é

$$S_n = (u_1 - u_2) + (u_2 - u_3) + \cdots + (u_{n-1} - u_n) + (u_n - u_{n+1}) = u_1 - u_{n+1}.$$

Logo

$$S = \lim_{n \to +\infty} S_n = u_1 - \lim_{n \longrightarrow +\infty} u_{n+1}$$

e a série é convergente se existir o limite de u_n. □

Por um raciocínio indutivo, podemos estender o resultado da proposição anterior a toda a série de Mengoli da forma $\sum (u_n - u_{n+p})$, com $p \in \mathbb{N}$ arbitrário. Assim, a série $\sum (u_n - u_{n+p})$ é convergente, se a sucessão u_n for convergente e divergente se o limite de u_n não existe. Mais, no caso de convergir, a soma é dada por:

$$\begin{aligned} S = \sum_{k=1}^{p} \left(u_k - \lim_{n \longrightarrow +\infty} u_{n+k} \right) &= u_1 + u_2 + \cdots + u_p - \lim_{n \longrightarrow +\infty} (u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}) \\ &= u_1 + u_2 + \cdots + u_p - p \lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n. \end{aligned}$$

Exemplo 2.2.5 (`AULA TEÓRICA`). *Verifique que a série seguinte é convergente e calcule a sua soma:*

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)}.$$

2.3 Propriedades gerais

Na maior parte dos casos em estudo, não é possível calcular a soma das séries convergentes. Por isso, o nosso estudo sobre as séries irá centrar-se essencialmente na natureza das séries, isto é, em saber se determinada série é convergente ou divergente.

[1] Pietro Mengoli (1626-1686), matemático italiano natural de Bolonha.

Proposição 2.3.1 (Critério Geral de Cauchy)**.** *Uma série* $\sum u_n$ *é convergente se e só se*

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ p = p(\varepsilon) \in \mathbb{N} : (\ \forall\ n,\ k \in \mathbb{N}\ \ e\ n > p) \Rightarrow |S_{n+k} - S_n| < \varepsilon. \qquad (2.3.1)$$

Demonstração. A demonstração usa o conceito de sucessão de Cauchy que, como vimos no capítulo anterior, é equivalente ao conceito de sucessão convergente. Portanto, a série $\sum u_n$ é convergente equivale a dizer que a sucessão das somas parciais S_n é convergente que, por sua vez, equivale a dizer que S_n é uma sucessão de Cauchy e esta última é equivalente à afirmação (2.3.1). □

Observe-se que em (2.3.1) se tem

$$|S_{n+k} - S_n| = \left|\sum_{i=1}^{k} u_{n+i}\right| = |u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+k}|.$$

Exemplo 2.3.1 (Série harmónica)**.** *Designa-se por série harmónica, a série seguinte:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots\ .$$

Proposição 2.3.2. *A série harmónica é divergente.*

Demonstração. Para a série harmónica, temos

$$\begin{aligned} S_{2n} - S_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+n} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+n} \\ &\geq \frac{1}{n+n} + \cdots + \frac{1}{n+n} = \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Então, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$|S_{2n} - S_n| \geq S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2},$$

pelo que S_n não é sucessão de Cauchy. Assim, S_n não é convergente e a série harmónica é divergente. □

Uma consequência imediata do Critério Geral de Cauchy, é o resultado seguinte que, por vezes, é muito útil para mostrar a divergência de determinada série.

Proposição 2.3.3. *Se* $\sum u_n$ *é uma série convergente, então* $u_n \longrightarrow 0$.

Demonstração. Se $\sum u_n$ é convergente, então, pelo Critério Geral de Cauchy, (2.3.1) é satisfeita. Em particular, tomando $m = n + 1$ em (2.3.1), temos

$$|S_{n+1} - S_n| < \varepsilon \Leftrightarrow |u_1 + \cdots + u_n + u_{n+1} - (u_1 + \cdots + u_n)| < \varepsilon \Leftrightarrow |u_n| < \varepsilon.$$

Ora sai daqui e de (2.3.1) que

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ p \in \mathbb{N} : n > p \Rightarrow |u_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0,$$

o que conclui a demonstração. □

Na prática, o mais importante do resultado exposto na proposição anterior, é a informação que nos é dada pela sua contra-recíproca:

$$\text{se } u_n \nrightarrow 0, \text{ então } \sum u_n \text{ é divergente.}$$

Observe-se que se $u_n \longrightarrow 0$, nada podemos inferir sobre a natureza da série. Vejam-se os exemplos da série geométrica do Exemplo 2.2.3 e da série harmónica (Exemplo 2.3.1), cujos termos gerais ambos tendem para 0 e somente a série geométrica é convergente.

Exemplo 2.3.2 (`AULA TEÓRICA`). *Estude a natureza da série seguinte:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{2^n}.$$

Proposição 2.3.4. *Sejam $\sum u_n$ e $\sum v_n$ séries convergentes de somas S_u e S_v, respectivamente, e seja $c \in \mathbb{R}$. Então:*

1. *A série $\sum(u_n + v_n)$ é convergente e a sua soma é $S_u + S_v$;*

2. *A série $\sum(c\,u_n)$ é convergente e a sua soma é $c\,S_u$.*

Demonstração. Sejam $\sum u_n$ e $\sum v_n$ duas séries convergentes de somas S^u e S^v, respectivamente. Consideremos a série $\sum(u_n + v_n)$ e seja S_n^{u+v} a sucessão das suas somas parciais. Temos

$$\begin{aligned} S_n^{u+v} &= (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \cdots + (u_n + v_n) \\ &= (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) + (v_1 + v_2 + \cdots + v_n) \to S_u + S_v. \end{aligned}$$

Portanto, a série $\sum(u_n + v_n)$ é convergente e tem soma igual a $S_u + S_v$.

De modo análogo, sendo $c \in \mathbb{R}$ arbitrário e $S_n^{c\,u}$ a sucessão das somas parciais da série $\sum(c\,u_n)$, temos

$$S_n^{c\,u} = c\,u_1 + c\,u_2 + \cdots + c\,u_n = c\,(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) \to c\,S_u.$$

Assim, a série $\sum c\,u_n$ é convergente e tem soma igual a $c\,S_u$. □

Exemplo 2.3.3 (`AULA TEÓRICA`). *Calcule a soma da série seguinte:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n-1}}{6^n}.$$

Como consequência da proposição anterior, temos o resultado enunciado a seguir que poderá ser utilizado para estabelecer a divergência de determinada série.

Proposição 2.3.5. *Sejam $\sum u_n$ uma série convergente e $\sum v_n$ uma série divergente. Então a série $\sum(u_n + v_n)$ é divergente.*

Demonstração. Suponhamos que $\sum u_n$ é uma série convergente e $\sum v_n$ é uma série divergente. Admitamos, com vista a um absurdo, que a série $\sum(u_n + v_n)$ era convergente. Então, pela proposição anterior, a série $\sum(u_n + v_n - u_n)$ também era convergente. Mas isto é um absurdo, pois $\sum(u_n + v_n - u_n) = \sum v_n$ e a série $\sum v_n$ é divergente por hipótese. □

Exemplo 2.3.4 (AULA TEÓRICA). *Justifique que a série seguinte é divergente:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n + 2^n}{n\, 2^n}.$$

A proposição seguinte mostra-nos que séries praticamente iguais têm a mesma natureza.

Proposição 2.3.6. *Sejam $\sum u_n$ e $\sum v_n$ duas séries tais que*

$$\exists\ k \in \mathbb{Z} : v_n = u_{n+k}\,. \tag{2.3.2}$$

Então as duas séries têm a mesma natureza.

Demonstração. Sejam S_n^u e S_n^v as sucessões das somas parciais das séries $\sum u_n$ e $\sum v_n$, respectivamente. Suponhamos que a série $\sum u_n$ era convergente. Então pelo Critério Geral de Cauchy

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ p \in \mathbb{N} : m,\ n > p \Rightarrow |S_m^u - S_n^u| < \varepsilon. \tag{2.3.3}$$

Então, por (2.3.2) e (2.3.3), tem-se

$$m,\ n > p \Rightarrow |S_m^v - S_n^v| = |S_{m+k}^u - S_{n+k}^u| < \varepsilon.$$

Logo, pelo Critério Geral de Cauchy, $\sum v_n$ é convergente.

De forma análoga se prova que, nas condições de (2.3.2), se $\sum u_n$ é divergente, então $\sum v_n$ também é divergente. □

Exemplo 2.3.5 (AULA TEÓRICA). *Verifique que as séries seguintes têm a mesma natureza:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \quad e \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}}\,; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \quad e \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+2}\,.$$

2.4 Séries de termos não negativos

As séries de termos não negativos convêm ser estudadas em separado, uma vez que, neste caso, é mais fácil estabelecer critérios de convergência. Começamos por observar que, para estas séries, podemos obter um critério de convergência mais fraco do que o enunciado na Proposição 2.3.1.

Proposição 2.4.1. *Seja $\sum u_n$ uma série de termos não negativos e S_n a respectiva sucessão das somas parciais. Então $\sum u_n$ é convergente se e só se S_n for limitada.*

Demonstração. Suponhamos que $\sum u_n$ é uma série convergente. Então a respectiva sucessão das somas parciais S_n é convergente, logo limitada.

Reciprocamente, suponhamos que S_n é uma sucessão limitada. Como $\sum u_n$ é uma série de termos não negativos, tem-se que $u_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$S_{n+1} = u_1 + \cdots + u_n + u_{n+1} = S_n + u_{n+1} \geq S_n,$$

pelo que S_n é uma sucessão monótona crescente. Então, sendo monótona e limitada, S_n é convergente e tem-se

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \sup\{S_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Portanto, a série $\sum u_n$ é convergente. $\square$

Como estamos a considerar séries de termos não negativos, podemos dizer que qualquer destas séries divergente tende automaticamente para $+\infty$.

Exemplo 2.4.1 (`AULA TEÓRICA`)**.** *Usando a proposição anterior, mostre que a série seguinte é convergente:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}.$$

Proposição 2.4.2 (Critério Geral de Comparação)**.** *Sejam $\sum u_n$ e $\sum v_n$ séries de termos não negativos. Suponhamos que, a partir de certa ordem, $u_n \leq v_n$. Tem-se:*

1. *Se $\sum v_n$ é convergente, então $\sum u_n$ também é convergente.*

2. *Se $\sum u_n$ é divergente, então $\sum v_n$ também é divergente.*

Demonstração. Sejam S_n^u e S_n^v as sucessões das somas parciais de duas séries, $\sum u_n$ e $\sum v_n$, de termos não negativos e suponhamos que

$$\exists\, p \in \mathbb{N} : n > p \Rightarrow u_n \leq v_n. \tag{2.4.4}$$

1. Se $\sum v_n$ é convergente, tem-se, pelo facto de $\sum v_n$ ser uma série de termos não negativos, que S_n^v é crescente e

$$S^v = \lim_{n\to+\infty} S_n^v = \sup\{S_n^v : n \in \mathbb{N}\} < +\infty. \tag{2.4.5}$$

Por outro lado, pelo facto de $\sum u_n$ também ser uma série de termos não negativos e por (2.4.4) e (2.4.5), tem-se para todo $n > p$

$$\begin{aligned} 0 \leq S_n^u &= u_1 + \cdots + u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n \leq u_1 + \cdots + u_p + v_{p+1} + \cdots + v_n \\ &\leq u_1 + \cdots + u_p + v_1 + \cdots + v_p + v_{p+1} + \cdots + v_n = u_1 + \cdots + u_p + S_n^v \\ &\leq u_1 + \cdots + u_p + S^v. \end{aligned}$$

Portanto, S_n^u é uma sucessão limitada e, pela proposição anterior, concluímos que $\sum u_n$ é convergente.

2. Suponhamos agora que $\sum u_n$ é divergente. Então, sendo $\sum u_n$ uma série de termos não negativos, S_n^u é crescente e

$$S^u = \lim_{n\to+\infty} S_n^u = \sup\{S_n^u : n \in \mathbb{N}\} = +\infty. \tag{2.4.6}$$

Então, usando o facto de $\sum v_n$ também ser uma série de termos não negativos, (2.4.4) e (2.4.6), temos

$$\begin{aligned} S_n^v &= v_1 + \cdots + v_p + v_{p+1} + \cdots + v_n \\ &\geq v_1 + \cdots + v_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = v_1 + \cdots + v_p + S_n^u - (u_1 + \cdots + u_p) \\ &\longrightarrow u_1 + \cdots + u_p + \infty - (u_1 + \cdots + u_p) = +\infty. \end{aligned}$$

Donde se conclui que a série $\sum v_n$ é divergente. □

Exemplo 2.4.2 (`AULA TEÓRICA`)**.** *Usando a proposição anterior, mostre que as séries*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n} \qquad e \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

são, respectivamente, convergente e divergente.

O Critério Geral de Comparação permite-nos obter um resultado de mais simples aplicação, que enunciamos na proposição seguinte.

Proposição 2.4.3 (Critério de Comparação)**.** *Sejam $\sum u_n$ uma série de termos não negativos e $\sum v_n$ uma série de termos positivos tais que*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = L. \tag{2.4.7}$$

Se $0 < L < +\infty$, então as séries $\sum u_n$ e $\sum v_n$ têm a mesma natureza, isto é, são ambas convergentes ou ambas divergentes.

Demonstração. Sejam u_n e v_n os termos gerais de duas séries. Se (2.4.7) é verificada, então a sucessão dada pelo quociente $\frac{u_n}{v_n}$ é limitada. Como $\sum u_n$ e $\sum v_n$ são séries, respectivamente, de termos não negativos e de termos positivos, e $\frac{u_n}{v_n}$ é limitada, então

$$\exists\, C_1,\ C_2 > 0 \ :\ C_1 \leq \frac{u_n}{v_n} \leq C_2 \ \Leftrightarrow\ C_1 v_n \leq u_n \leq C_2 v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Então, pelo Critério Geral de Comparação, as séries $\sum u_n$ e $\sum v_n$ têm a mesma natureza. □

No caso de, na proposição anterior, se verificar $L = 0$, então

$$\exists\, p \in \mathbb{N} : n > p \Rightarrow u_n \leq v_n\,.$$

Deste modo, pelo Critério Geral de Comparação, podemos deduzir da convergência de $\sum v_n$ a de $\sum u_n$ e da divergência de $\sum u_n$ a de $\sum v_n$. Analogamente, no caso de $L = +\infty$, então

$$\exists\, p \in \mathbb{N} : n > p \Rightarrow u_n \geq v_n\,,$$

podendo deduzir da convergência de $\sum u_n$ a de $\sum v_n$ e da divergência de $\sum v_n$ a de $\sum u_n$. Nos outros casos, porém, nada podemos concluir.

Exemplo 2.4.3 (AULA TEÓRICA). *Utilize o resultado anterior para mostrar que as séries seguintes são, respectivamente, divergente e convergente*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}\,; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,.$$

Exemplo 2.4.4 (Série de Dirichlet[2]). *Designa-se por série de Dirichlet toda a série da forma:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha} + \cdots\,;$$

onde α é um real.

Observemos que a série harmónica, referida no Exemplo 2.3.1, é um caso particular da série de Dirichlet com $\alpha = 1$.

Proposição 2.4.4. *A série de Dirichlet é convergente para $\alpha > 1$ e divergente para $\alpha \leq 1$.*

Demonstração. Consideremos primeiramente o caso de $\alpha \leq 1$. Neste caso, temos

$$\alpha \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como a série (harmónica) $\sum \frac{1}{n}$ é divergente, pelo Critério Geral de Comparação, também a série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ é divergente.

Suponhamos, agora, que $\alpha < 1$. Consideremos a sucessão das somas parciais de ordem $2^{n+1} - 1$. Temos:

$$\begin{aligned} S_{2^{n+1}-1} &= 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2^{n+1}-1)^\alpha} \\ &= 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha}\right) + \cdots + \frac{1}{(2^{n+1}-1)^\alpha} \\ &= 1 + \left[\frac{1}{(2^1)^\alpha} + \frac{1}{(2^{1+1}-1)^\alpha}\right] + \left[\frac{1}{(2^2)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2^{2+1}-1)^\alpha}\right] + \cdots + \left[\frac{1}{(2^n)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2^{n+1}-1)^\alpha}\right]. \end{aligned}$$

Observemos que para cada $p \in \mathbb{N}$ se tem

$$\frac{1}{(2^p)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2^{p+1}-1)^\alpha} \leq \left(2^{p+1} - 2^p\right) \frac{1}{(2^p)^\alpha} = \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^p.$$

Por outro lado, prova-se facilmente por indução matemática que

$$2^{n+1} - 1 > n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Temos então, pelo exposto acima e pelo facto de $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ ser uma série de termos positivos, que

$$\begin{aligned} 0 < S_n < S_{2^{n+1}-1} &\leq 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^2 + \cdots + \cdots + \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n \\ &< \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n}{1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}} = \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}-1}. \end{aligned}$$

[2] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), matemático alemão com ascendência belga, natural de Düren.

As últimas igualdades resultam do facto de $\sum \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n$ ser uma série geométrica convergente, pois $\alpha > 1$ implica que $\frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$. Assim, neste caso, a série de Dirichlet é limitada e, tratando-se de uma série de termos positivos, é convergente. $\square$

Pela sua simplicidade no cálculo de limites, utilizam-se muitas vezes as séries de Dirichlet no Critério de Comparação (Proposição 2.4.3).

Proposição 2.4.5 (Comparação com as séries de Dirichlet)**.** *Seja* $\sum u_n$ *uma série de termos não negativos. Tem-se:*

1. *Se existe um real* $\alpha > 1$ *tal que*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} (n^\alpha u_n) < +\infty,$$

então a série $\sum u_n$ *é convergente.*

2. *Se existe um real* $\alpha \leq 1$ *tal que*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} (n^\alpha u_n) > 0,$$

então a série $\sum u_n$ *é divergente.*

Demonstração. A demonstração é uma consequência imediata da Proposição 2.4.3. $\square$

Exemplo 2.4.5 (`AULA TEÓRICA`)**.** *Usando a proposição anterior, mostre que as séries*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} \qquad e \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n}$$

são, respectivamente, convergente e divergente.

Em muitas situações de aplicação prática torna-se muito complicado utilizar o Critério de Comparação. Nesses casos, podemos recorrer a um dos dois critérios que enunciamos a seguir e cuja aplicação é mais fácil.

Proposição 2.4.6 (Critério da Razão - D'Alembert[3])**.** *Seja* $\sum u_n$ *uma série de termos positivos. Tem-se:*

1. *Se*

$$\limsup_{n\longrightarrow+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1\,, \tag{2.4.8}$$

então a série $\sum u_n$ *é convergente.*

2. *Se*

$$\exists\, p \in \mathbb{N} : n > p \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1\,, \tag{2.4.9}$$

então a série $\sum u_n$ *é divergente.*

[3]Jean le Rond d'Alembert (1717-1783), filósofo, matemático e físico francês, natural de Paris.

Em particular, se existe o limite

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=L\,,$$

então a série $\sum u_n$ *é convergente se* $L<1$ *e é divergente se* $L>1$.

Demonstração. 1. Se (2.4.8) é verificada, então

$$\exists\ r\in(0,1):\limsup_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}\leq r.$$

Logo

$$\exists\ p\in\mathbb{N}:n>p\Rightarrow\frac{u_{n+1}}{u_n}<r\Leftrightarrow\frac{u_{n+1}}{r^{n+1}}<\frac{u_n}{r^n},$$

o que quer dizer que a sucessão $\frac{u_n}{r^n}$ é monótona decrescente. Isto implica que

$$\exists\ p_*\in\mathbb{N}:n>p_*\Rightarrow\frac{u_n}{r^n}<C,\quad C=\frac{u_{p_*}}{r^{p_*}}\ \Leftrightarrow\ u_n\leq Cr^n.$$

Ora, $\sum r^n$ é uma série geométrica convergente, pois $r<1$ por hipótese, pelo que, usando o Critério Geral de Comparação, a série $\sum u_n$ também é convergente.

2. Se (2.4.8) é verificada, então u_n é uma sucessão monótona crescente a partir da ordem p. Logo, como $\sum u_n$ é uma série de termos positivos, teremos que $u_n\nrightarrow 0$. Portanto, a série $\sum u_n$ é divergente. □

Exemplo 2.4.6 (`AULA TEÓRICA`). *Usando a proposição anterior, mostre que as séries*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{2^n}\qquad e\qquad\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{3^n}$$

são, respectivamente, convergente e divergente.

Proposição 2.4.7 (Critério da Raiz - Cauchy). *Seja* $\sum u_n$ *uma série de termos não negativos. Tem-se:*

1. *Se*

$$\limsup_{n\longrightarrow+\infty}\sqrt[n]{u_n}<1\,,\tag{2.4.10}$$

então a série $\sum u_n$ *é convergente.*

2. *Se*

$$\limsup_{n\longrightarrow+\infty}\sqrt[n]{u_n}>1\,,\tag{2.4.11}$$

então a série $\sum u_n$ *é divergente.*

Em particular, se existe o limite

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\sqrt[n]{u_n}=L\,,$$

então a série $\sum u_n$ *é convergente se* $L<1$ *e é divergente se* $L>1$.

Demonstração. 1. Se (2.4.10) é verificada, então

$$\exists\ r \in [0,1) : \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} \leq r,$$

o que implica

$$\exists\ p \in \mathbb{N} : n > p \ \Rightarrow\ \sqrt[n]{u_n} \leq r \ \Rightarrow\ u_n \leq r^n.$$

Como $\sum r^n$ é uma série geométrica convergente, pois $r < 1$ por hipótese, pelo Critério Geral de Comparação, a série $\sum u_n$ também é convergente.

2. Se se verifica (2.4.11), então

$$\exists\ p \in \mathbb{N} : n > p \ \Rightarrow\ \sqrt[n]{u_n} > 1 \ \Rightarrow\ u_n > 1.$$

Assim, dado que $\sum u_n$ é uma série de termos não negativos, a sucessão u_n não tende para 0, pelo que $\sum u_n$ é divergente. ☐

Exemplo 2.4.7 (`AULA TEÓRICA`). *Usando a proposição anterior, mostre que as séries*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^n} \qquad e \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$$

são, respectivamente, convergente e divergente.

Como se observa das respectivas demonstrações, os dois critérios anteriores são consequências do Critério Geral de Comparação, tal como o Critério de Comparação. O **Critério da Razão** e o **Critério da Raiz** tornam o estudo da natureza das séries de termos não negativos mais simples. No entanto, o preço a pagar por esta simplificação no estudo, é que, em ambos os critérios, **nada se pode concluir se** $L = 1$.

Exemplo 2.4.8 (`AULA TEÓRICA`). *Verifique que, para a série seguinte, a aplicação do Critério da Razão ou do Critério da Raiz não permite tirar nenhuma conclusão quanto à sua natureza:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n\, n!}{n^n}\,.$$

No entanto e apesar de ser um exercício mais envolvente, pode-se mostrar que esta série diverge[4].

2.5 Séries de termos positivos e negativos

Até agora, temos estado a estudar essencialmente séries de termos não negativos. Agora queremos analisar séries cujos termos possam ser positivos e negativos. De entre estas, têm particular interesse as séries de termos alternados.

[4] Aplicar o Critério de Raabe. Ver, por exemplo, Creighton Buck p. 233.

Definição 2.5.1 (Série alternada). *Uma série diz-se alternada, se for possível escrevê-la da forma seguinte:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n u_n = -u_1 + u_2 - u_3 + \cdots + (-1)^n u_n + \dots ;$$

onde u_n é uma sucessão de termos não negativos.

Observemos que as séries alternadas, como o próprio nome indica, também poderão vir escritas da forma seguinte:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - \cdots + (-1)^{n-1} u_n + \dots .$$

Para estas séries existe o critério seguinte de convergência, devido a Leibniz[5].

Proposição 2.5.1 (Critério de Leibniz). *Suponhamos que u_n é uma sucessão monótona decrescente para 0, isto é:*

$$u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \cdots \geq u_n \geq \dots \qquad e \qquad \lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 0. \tag{2.5.12}$$

Então a série $\sum(-1)^n u_n$ é convergente.

Demonstração. Seja u_n uma sucessão satisfazendo às condições de (2.5.12). Consideremos as sucessões das somas parciais de ordens par e ímpar da série alternada $\sum(-1)^n u_n$, isto é

$$\begin{aligned} S_{2n} &= -u_1 + u_2 - u_3 + \cdots + (-1)^n u_n + (-1)^{n+1} u_{n+1} + \cdots - u_{2n-1} + u_{2n}, \\ S_{2n-1} &= -u_1 + u_2 - u_3 + \cdots + (-1)^n u_n + (-1)^{n+1} u_{n+1} + \cdots + u_{2n-2} - u_{2n-1}. \end{aligned}$$

Vejamos que S_{2n} é uma sucessão monótona decrescente e que S_{2n-1} é uma sucessão monótona crescente. De facto, usando a monotonia decrescente de u_n, temos

$$\begin{aligned} S_{2(n+1)} - S_{2n} &= -u_1 + u_2 - u_3 + \cdots + (-1)^n u_n + (-1)^{n+1} u_{n+1} + \cdots + u_{2n} - u_{2n+1} + u_{2n+2} \\ &\quad - \left[-u_1 + u_2 - u_3 + \cdots + (-1)^n u_n + (-1)^{n+1} u_{n+1} + \cdots + u_{2n}\right] \\ &= u_{2n+2} - u_{2n+1} \leq 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} S_{2(n+1)-1} - S_{2n-1} &= -u_1 + u_2 - u_3 + \cdots + (-1)^n u_n + (-1)^{n+1} u_{n+1} + \cdots - u_{2n-1} + u_{2n} - u_{2n+1} \\ &\quad - \left[-u_1 + u_2 - u_3 + \cdots + (-1)^n u_n + (-1)^{n+1} u_{n+1} + \cdots - u_{2n-1}\right] \\ &= u_{2n} - u_{2n+1} \geq 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, $S_{2n-1} \leq S_{2n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pois, sendo u_n uma sucessão monótona decrescente para 0, temos

$$\begin{aligned} S_{2n-1} - S_{2n} &= -u_1 + u_2 - u_3 + \cdots + (-1)^n u_n + (-1)^{n+1} u_{n+1} + \cdots - u_{2n-1} \\ &\quad - \left[-u_1 + u_2 - u_3 + \cdots + (-1)^n u_n + (-1)^{n+1} u_{n+1} + \cdots - u_{2n-1} + u_{2n}\right] \\ &= -u_{2n} \leq 0. \end{aligned}$$

[5]Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716), advogado, filósofo e matemático alemão, natural de Leipzig.

Pelo exposto acima, temos

$$S_1 \leq S_2 \leq \cdots \leq S_{2n-1} \leq S_{2n} \leq \cdots \leq S_4 \leq S_2.$$

Acabamos de provar então que S_{2n} e S_{2n-1} são sucessões monótonas e limitadas, logo convergentes. Finalmente, tal como vimos acima e usando o facto de $u_n \to 0$, temos

$$S_{2n} - S_{2n-1} = u_{2n} \to 0.$$

Assim,

$$\exists\ S \in \mathbb{R} : \lim_{n\to+\infty} S_{2n} = S = \lim_{n\to+\infty} S_{2n-1} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = S,$$

pelo que a série $\sum(-1)^n u_n$ é convergente. $\square$

Na demonstração anterior, se definirmos a série alternada por

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}u_n\,,$$

podemos provar de forma inteiramente análoga que

$$S_2 \leq S_4 \leq \cdots \leq S_{2n} \leq S_{2n-1} \leq \cdots \leq S_3 \leq S_1\,.$$

Exemplo 2.5.1 (AULA TEÓRICA). *Estude a natureza da série seguinte:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}.$$

Observe-se que a condição de monotonia decrescente enunciada no Critério de Leibniz é necessária para a convergência simples de uma série alternada, mas não é suficiente. De facto existem séries alternadas convergentes que não obedecem à condição de monotonia decrescente como é o caso da série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n-1)^3} - \frac{1}{(2n)^3}\right)\,,$$

já que o valor absoluto do seu termo geral não é monótono decrescente. Isto será melhor apreendido mais adiante com o estudo da convergência absoluta das séries.

Para outras séries de termos positivos e negativos, que não as alternadas, torna-se mais complicado encontrar critérios de convergência. Contudo, para algumas destas séries, podemos ainda usar o resultado seguinte.

Proposição 2.5.2 (Critério de Dirichlet). *Seja $\sum u_n$ uma série cuja sucessão das somas parciais, digamos S_n^u, é limitada e seja v_n uma sucessão monótona decrescente para 0, isto é:*

$$\exists\ C > 0 : |S_n^u| \leq C \quad \forall\ n \in \mathbb{N}, \qquad v_1 \geq v_2 \geq v_3 \geq \cdots \geq v_n \geq \ldots \qquad e \qquad \lim_{n\longrightarrow+\infty} v_n = 0.$$

Então a série $\sum u_n v_n$ é convergente.

Demonstração. A ideia nesta demonstração é mostrar que a série $\sum u_n\, v_n$ satisfaz o Critério Geral de Cauchy (Proposição 2.3.1). Queremos, portanto, mostrar que a sucessão das somas parciais de $\sum u_n\, v_n$, digamos $S_n^{u\,v}$, é uma sucessão de Cauchy. Comecemos por observar que

$$u_n = S_n^u - S_{n-1}^u \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Então para quaisquer $m,\ n \in \mathbb{N}$ tais que $m > n$, temos

$$\begin{aligned} S_m^{u\,v} - S_n^{u\,v} &= u_{n+1}v_{n+1} + u_{n+2}v_{n+2} + \cdots + u_{m-1}v_{m-1} + u_m v_m \\ &= (S_{n+1}^u - S_n^u)v_{n+1} + (S_{n+2}^u - S_{n+1}^u)v_{n+2} + \cdots + (S_{m-1}^u - S_{m-2}^u)v_{m-1} + (S_m^u - S_{m-1}^u)v_m \\ &= -v_{n+1}S_n^u + (v_{n+1} - v_{n+2})S_{n+1}^u + \cdots + (v_{m-1} - v_m)S_{m-1}^u + v_m S_m^u \end{aligned}$$

Usando os factos de S_n^u ser uma sucessão limitada e de v_n ser uma sucessão monótona decrescente, temos

$$|S_m^{u\,v} - S_n^{u\,v}| \le [v_{n+1}C + (v_{n+1} - v_{n+2})C + \cdots + (v_{m-1} - v_m)C + v_m C] = 2v_{n+1}C.$$

Como $v_n \to 0$, a quantidade $|S_m^{u\,v} - S_n^{u\,v}|$ será tão pequena quanto se queira. Desde modo, $S_n^{u\,v}$ é uma sucessão de Cauchy e a série $\sum u_n\, v_n$ é convergente. □

Observemos que o Critério de Leibniz pode, facilmente, ser demonstrado a partir do Critério de Dirichlet.

Exemplo 2.5.2 (`AULA TEÓRICA`)**.** *Use o Critério de Dirichlet para justificar que a série seguinte é convergente:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{n}.$$

2.6 Convergência absoluta

A convergência absoluta das séries está relacionada com a convergência da série dos módulos. Então, muitos dos resultados para o estudo das séries de termos não negativos poderão ser aplicados para estudar a convergência absoluta.

Definição 2.6.1. *Uma série $\sum u_n$ diz-se* ***absolutamente convergente****, se a série $\sum |u_n|$ é convergente. Diz-se que $\sum u_n$ é* ***simplesmente convergente*** *ou* ***condicionalmente convergente****, se $\sum u_n$ é convergente, mas $\sum |u_n|$ é divergente.*

Exemplo 2.6.1 (`AULA TEÓRICA`)**.** *Justifique que a série seguinte é simplesmente convergente:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

O conceito de convergência absoluta é mais forte do que o de convergência simples, pelo que a primeira implica a segunda. Mas, como mostra o exemplo anterior, existem séries que são simplesmente convergentes e, por conseguinte, não são absolutamente convergentes.

Proposição 2.6.1. *Se* $\sum |u_n|$ *é uma série convergente, então* $\sum u_n$ *é convergente e tem-se:*

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|.$$

Demonstração. Suponhamos que $\sum |u_n|$ é uma série convergente e seja $S_n^{|u|}$ a sucessão das suas somas parciais, isto é

$$S_n^{|u|} = |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n|.$$

Pelo Critério Geral de Cauchy (Proposição 2.3.1), temos

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, p \in \mathbb{N} : n > p \Rightarrow |S_{n+k}^{|u|} - S_n^{|u|}| < \varepsilon \Leftrightarrow |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \cdots + |u_{n+k}| < \varepsilon.$$

Então, designando por S_n^u a sucessão das somas parciais da série $\sum u_n$, tem-se

$$\begin{aligned} \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, p \in \mathbb{N} : n > p \Rightarrow |S_{n+k}^u - S_n^u| &= |u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+k}| \\ &\leq |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \cdots + |u_{n+k}| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, S_n^u é uma sucessão de Cauchy e a série $\sum u_n$ é convergente. Por outro lado,

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\right| = \left|\lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{k} u_n\right| = \lim_{k\to+\infty} \left|\sum_{n=1}^{k} u_n\right| \leq \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{k} |u_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|,$$

o que conclui a demonstração. □

Exemplo 2.6.2 (`AULA TEÓRICA`). *Estude a convergência da série seguinte:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{n^2}.$$

Pela Proposição 2.6.1, o estudo da convergência de grande parte das séries numéricas irá reduzir-se ao estudo da convergência de séries de termos não negativos. Deste modo, convém adaptar os Critérios de Comparação, da Razão e da Raiz para o estudo da convergência absoluta.

Proposição 2.6.2 (Critério de Comparação)**.** *Sejam* $\sum u_n$ *uma série qualquer e* $\sum v_n$ *uma série de termos positivos tais que*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{|u_n|}{v_n} = L.$$

Se $0 \leq L < +\infty$ *e* $\sum v_n$ *é convergente, então* $\sum u_n$ *é absolutamente convergente.*

Demonstração. É uma consequência imediata do Critério de Comparação estabelecido na Proposição 2.4.3. □

Repare-se que não faz nenhum sentido fazer uma comparação da divergência da série $\sum v_n$ com a de $\sum u_n$.

Exemplo 2.6.3 (AULA TEÓRICA). *Estude a convergência simples e absoluta da série seguinte:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{n^3}.$$

Proposição 2.6.3 (Critério da Razão - D'Alembert). *Seja $\sum u_n$ uma série de termos não nulos. Tem-se:*

1. *Se*
$$\limsup_{n \longrightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1\,,$$
então a série $\sum u_n$ é absolutamente convergente.

2. *Se*
$$\exists\, p \in \mathbb{N} : n > p \Rightarrow \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \geq 1\,,$$
então a série $\sum u_n$ é divergente.

Em particular, se existe o limite
$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = L\,,$$
então a série $\sum u_n$ é absolutamente convergente se $L < 1$ e é divergente se $L > 1$.

Demonstração. É uma consequência imediata do Critério da Razão estabelecido na Proposição 2.4.6, pois $\sum |u_n|$ é uma série de termos positivos e $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$. □

Exemplo 2.6.4 (AULA TEÓRICA). *Usando o critério anterior, estude a série seguinte quanto à convergência absoluta:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^2}{1+n^2}.$$

Proposição 2.6.4 (Critério da Raiz - Cauchy). *Seja $\sum u_n$ uma série qualquer. Tem-se:*

1. *Se*
$$\limsup_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} < 1\,,$$
então a série $\sum u_n$ é absolutamente convergente.

2. *Se*
$$\limsup_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} > 1\,,$$
então a série $\sum u_n$ é divergente.

Em particular, se existe o limite
$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = L\,,$$
então a série $\sum u_n$ é absolutamente convergente se $L < 1$ e é divergente se $L > 1$.

Demonstração. É uma consequência imediata do Critério da Raiz estabelecido na Proposição 2.4.7, pois $\sum |u_n|$ é uma série de termos não negativos. □

Exemplo 2.6.5 (`AULA TEÓRICA`). *Usando o critério anterior, estude a série seguinte quanto à convergência absoluta:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n .$$

Observemos que, tal como no caso da convergência simples, nada se pode concluir se $L = 1$ nas Proposições 2.6.3 e 2.6.4.

2.7 Ficha de exercícios nº 2

1. Indique uma expressão para o termo geral das séries seguintes:

   a) $2 + \frac{4}{2} + \frac{8}{6} + \frac{16}{24} + \cdots ;$ b) $\frac{10}{7} + \frac{100}{9} + \frac{1000}{11} + \frac{10000}{13} + \cdots ;$

   c) $-\frac{1}{11} + \frac{2}{101} - \frac{3}{1001} + \frac{4}{10001} - \cdots ;$ d) $0,6 + 0,51 + 0,501 + 0,5001 + \cdots ;$

   e) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots ;$ f) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \cdots .$

2. Indique as sucessões das somas parciais das séries geométricas seguintes e calcule a soma das que são convergentes:

   a) $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} ;$ b) $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} ;$ c) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{10^n} ;$

   d) $\sum_{n=0}^{+\infty} 3^{-(5n+1)} ;$ e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^{n-1}}{3^n} ;$ f) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi}\right)^n .$

3. Usando o conhecimento da soma das séries geométricas, escreva as dízimas infinitas periódicas seguintes na forma de números racionais:

   a) $0,4444\ldots ;$ b) $1,9999\ldots ;$ c) $0,515151\ldots ;$ d) $0,123123123\ldots .$

4. Indique as sucessões das somas parciais das séries de Mengoli seguintes e calcule a soma das que são convergentes:

   a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)} ;$ b) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)n(n+1)} ;$ c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} ;$

   d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} ;$ e) $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) ;$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n+1)}{n(n+1)} .$

5. Justifique que as séries seguintes são divergentes:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2+1}}\,; \qquad \text{b) } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n + 2^{n-1}}{2^n - 3^{n+1}}\,; \qquad \text{c) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{n!}\,.$$

6. Usando o Critério Geral de Comparação, estude a natureza das séries seguintes:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\,; \qquad \text{b) } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}\,; \qquad \text{c) } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n^2+n-1}\,;$$

$$\text{d) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(n+2)!}\,; \qquad \text{e) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\,; \qquad \text{f) } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n+1}\,.$$

7. Usando o Critério de Comparação com as séries de Dirichlet, estude a natureza das séries seguintes:

$$\text{a) } \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1+\sqrt{n}}{n^2-n}\,; \qquad \text{b) } \sum_{n=0}^{+\infty} (\sqrt{n^2+1}-n)\,; \qquad \text{c) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(n)}{n^2}\,;$$

$$\text{d) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-\sqrt{n}}{n^2+5n} \qquad \text{e) } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4n-3)(4n-1)}\,; \qquad \text{f) } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n^2+1}\,.$$

8. Usando o Critério da Razão (de D'Alembert), estude a natureza das séries seguintes:

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\,; \qquad \text{b) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}\,; \qquad \text{c) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$$

$$\text{d) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2\, 15^{\frac{n}{2}}}{(2n)!}\,; \qquad \text{e) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{e^{n^2}}\,; \qquad \text{f) } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1.3\ldots(2n+1)}{4.8\ldots(4n+4)}\,.$$

9. Usando o Critério da Raiz (de Cauchy), estude a natureza das séries seguintes:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{n}{2}}}\,; \qquad \text{b) } \sum_{n=1}^{+\infty} n\, 2^{-(2n+1)}\,; \qquad \text{c) } \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{n(n-1)}$$

$$\text{d) } \sum_{n=1}^{+\infty} 3^{n+1} \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2} \qquad \text{e) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n\, n!}{n^n}\,; \qquad \text{f) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{[3+(-1)^n]^{2n}}\,.$$

10. Estude a natureza das séries alternadas seguintes:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\,; \qquad \text{b) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\,; \qquad \text{c) } \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{n+2}\,;$$

$$\text{d) } \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n\,; \qquad \text{e) } \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n\,; \qquad \text{f) } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-n)^n}{(2n)!}\,.$$

11. Usando o Critério de Dirichlet, mostre que as séries seguintes são convergentes:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(n)}{n}$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n}$, $x \in \mathbb{R}$.

12. Estude as séries seguintes quanto à convergência calculando, sempre que possível, a soma das convergentes:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi^n - e^n}{4^n}$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n\, n!}{n^n}$; c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n$;

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n + n^2 + n}{2^{n+1}\, n(n+1)}$; e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$; f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$;

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3\left[\sqrt{2}+(-1)^n\right]^n}{3^n}$; h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n}$; i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2.5\ldots(3n+2)}{2^n(n+1)!}$.

13. Estude as séries seguintes quanto à convergência absoluta e simples (condicionada):

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(e^n + e^{-n})}$;

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$; d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(n)}{n^2}$;

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{3.5.7\ldots(2n+1)}{2.5.8\ldots(3n-1)}$; f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}\left[1+\frac{(-1)^n}{n+1}\right]$;

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n\frac{3.7.11\ldots(4n-1)}{4.7.10\ldots(3n+1)}$; h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-2)^{n+1}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}$.

Capítulo 3

Integrais Impróprios

3.1 Noções principais

A definição de integral até aqui utilizada tem duas limitações importantes que importa resolver. Vimos, por um lado, que a função tem de ser limitada no intervalo de integração. Por outro, o próprio intervalo de integração também tem de ser limitado. No entanto, podemos facilmente estender a noção de integral para cobrir estes casos.

Definição 3.1.1. *Seja f uma função definida no intervalo $[a, b)$, com b eventualmente infinito, e integrável em todo o intervalo $[a, \tau] \subset [a, b)$, onde se subentende que $a < \tau < b$. Designa-se por* ***integral impróprio (de Riemann)*** *da função f sobre o intervalo $[a, b)$ à quantidade seguinte:*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\tau \to b^-} \int_a^\tau f(x)\, dx\,.$$

De modo análogo para uma função f definida no intervalo $(a, b]$, agora com a eventualmente infinito, e que seja integrável em todo o intervalo $[\tau, b] \subset (a, b]$, onde se subentende que $a < \tau < b$:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\tau \to a^+} \int_\tau^b f(x)\, dx\,.$$

Os integrais impróprios herdam todas as propriedades dos integrais definidos, como facilmente se depreende da Definição 3.1.1.

Os **integrais impróprios** dizem-se **convergentes**, se existirem (e forem finitos) os limites dados. Caso contrário, os **integrais impróprios** dizem-se **divergentes**. Deste modo, a **natureza de um integral impróprio** consiste em estudar se determinado integral impróprio é convergente ou divergente. Em algumas situações é possível calcular o valor dos integrais impróprios convergentes.

Habitualmente faz-se a distinção dos integrais impróprios em duas classes. Os **integrais impróprios de primeira espécie**, onde o intervalo de integração não é limitado (infinito).

Exemplo 3.1.1. *Calcule os integrais impróprios de primeira espécie:*

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$; *b)* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Nos integrais impróprios de primeira espécie, é habitual aparecer o limite superior de integração como sendo $+\infty$. No entanto, pode perfeitamente acontecer que seja o limite inferior $-\infty$.

Exemplo 3.1.2. *Calcule os integrais impróprios de primeira espécie:*

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x}$; *b)* $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^x\, dx$.

Pode, ainda, acontecer que ambos os limites de integração sejam infinitos.

Exemplo 3.1.3. *Calcule o integral impróprio de primeira espécie:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\, dx\,.$$

Nos **integrais impróprios de segunda espécie**, o intervalo de integração é limitado, mas a função não é.

Exemplo 3.1.4. *Calcule os integrais impróprios de segunda espécie:*

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x}$; *b)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Neste caso, e apenas por simplicidade, costuma aparecer a situação em que a função não é limitada num extremo do intervalo. No entanto, pode acontecer que a função não seja limitada em mais do que um ponto e não forçosamente os extremos do intervalo.

Exemplo 3.1.5. *Calcule o integral impróprio de segunda espécie:*

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

No que refere aos integrais impróprios de segunda espécie, convém realçar uma situação de falso integral impróprio. Isto é, existem integrais cujas funções integrandas têm pontos de descontinuidade, mas do tipo removível. Neste caso, como se sabe, o limite existe e, por isso, o integral não pode ser considerado impróprio.

Exemplo 3.1.6. *Mostre que o integral seguinte não é impróprio:*

$$\int_0^1 x\ln(x)\, dx\,.$$

Pode, ainda, acontecer que o intervalo de integração não seja limitado e que a função também não o seja em algum ponto interior ao intervalo. Estes integrais impróprios são, ao mesmo tempo, de primeira e de segunda espécie. Por isso, é comum designá-los por **integrais impró-prio mistos**. Estes integrais são estudados usando a propriedade aditiva dos integrais para os separar em, pelo menos, dois integrais impróprios: um de primeira espécie e outro de segunda. Estuda-se cada integral separadamente e o integral impróprio misto será convergente se e só se os dois forem convergentes.

Exemplo 3.1.7. *Calcule os integrais impróprios mistos seguintes:*

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$; *b)* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}\,dx$.

3.2 Valor principal de Cauchy

Em muitas aplicações é importante uma estensão da noção de integral impróprio de modo a cobrir algumas situações de integrais impróprios que resultam indeterminados se aplicada a Definição 3.1.1. Isto acontece, em particular, quando temos um integral impróprio sobre um intervalo simétrico. A decomposição do integral em, pelo menos, dois, resulta, após os cálculos para cada integral impróprio, numa indeterminação do tipo $\infty - \infty$.

Exemplo 3.2.1. *Mostre que os integrais impróprios seguintes têm um valor indefinido:*

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$; *b)* $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{e^x}{e^x-1}\,dx$; *c)* $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x-1)(x+1)}$.

Na prática, a noção de valor principal de Cauchy vai permitir atribuir um valor a integrais impróprios que, de outro modo, seriam indeterminados tais como os do exemplo anterior. Vamos considerar as diferentes situações possíveis que resultam do exemplo anterior.

Definição 3.2.1. *Seja f uma função definida em $(-\infty,\infty)$ e suponhamos que*

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = \pm\infty \quad e \quad \int_{0}^{\infty} f(x)\,dx = \mp\infty\,.$$

Designa-se por valor principal de Cauchy do integral impróprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ ao limite seguinte, caso exista:

$$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{\tau\to\infty} \int_{-\tau}^{\tau} f(x)\,dx\,.$$

Exemplo 3.2.2. *Calcule o valor principal de Cauchy do integral impróprio seguinte:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx\,.$$

Definição 3.2.2. *Seja f uma função definida em $[a,b]$, com $a<b$ números reais, e suponhamos que*

$$\lim_{x\to c} f(x) = \infty \quad e \quad \exists\ c\in(a,b)\ :\ \int_a^c f(x)\,dx = \pm\infty,\ \int_c^b f(x)\,dx = \mp\infty\,.$$

Designa-se por valor principal de Cauchy do integral impróprio $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ ao limite seguinte, caso exista:

$$v.p. \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\tau\to c^-\\ \eta\to c^+}} \left[\int_a^{\tau} f(x)\,dx + \int_{\eta}^{b} f(x)\,dx\right].$$

As situações mais simples deste caso, são aquelas em que o intervalo de integração é simétrico relativamente a $x = 0$. No entanto, poder-se-ão considerar situações de simetrias para valores de $x \neq 0$.

Exemplo 3.2.3. *Calcule o valor principal de Cauchy do integral impróprio seguinte:*

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^x}{e^x - 1}\, dx\,.$$

Definição 3.2.3. *Seja f uma função definida em (a, b), com $a < b$ números reais, e suponhamos que*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty\,,\ \lim_{x\to b^-} f(x) = \infty \quad e \qquad \exists\, c \in (a, b)\ :\ \int_a^c f(x)\, dx = \pm\infty,\ \int_c^b f(x)\, dx = \mp\infty\,.$$

Designa-se por valor principal de Cauchy do integral impróprio $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ ao limite seguinte, caso exista:

$$v.p.\ \int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\substack{\tau \to a^+ \\ \eta \to b^-}} \int_\tau^\eta f(x)\, dx\,.$$

Novamente, a situação mais habitual é aquela em que o intervalo é simétrico relativamente a $x = 0$, não obstante poderem existir outras situações. No caso de um intervalo simétrico da forma $(-a, a)$, com $a > 0$, temos na definição anterior

$$\text{v.p.}\ \int_{-a}^{a} f(x)\, dx = \lim_{\tau a} \int_{-\tau}^{\tau} f(x)\, dx\,.$$

Exemplo 3.2.4. *Calcule o valor principal de Cauchy do integral impróprio seguinte:*

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x-1)(x+1)}\,.$$

3.3 Princípio de Cauchy

Na avaliação dos integrais impróprios, sempre que possamos determinar as primitivas envolvidas, é o que se deve fazer, pois permite avaliar imediatamente se o integral é convergente ou divergente. Nas situações que resultam indefinições, podemos ainda, se necessário, calcular o seu valor próprio de Cauchy. No entanto, podemos ter situações em que a primitiva se torne muito complicada de determinar, ou seja mesmo impossível de escrever como soma finita de funções elementares e, ainda assim, queiramos saber se o integral converge ou diverge. Interessa, pois, obter critérios que nos permitam concluir sobre a convergência ou divergência de um integral impróprio sem determinar a primitiva da função integranda.

Na proposição seguinte apresentamos uma condição necessária e suficiente para um integral impróprio ser convergente, que faz referência ao já conhecido Princípio de Cauchy.

Proposição 3.3.1. *Seja f uma função definida num intervalo $[a,b)$, com b eventualmente infinito, e integrável em todo o intervalo fechado $[a,\tau] \subset [a,b)$, com $a < \tau < b$. Consideremos o integral impróprio de f sobre o intervalo $[a,b)$. Então:*

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{é convergente}$$

se e só se

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0\,, \delta < b-a \;\; : \;\; \forall\, y,\, z \in (a, b-\delta) \quad \left| \int_y^z f(x)\,dx \right| < \varepsilon\,.$$

Demonstração. Começamos por observar que $\int_a^b f(x)\,dx$ é convergente se e só se existe o limite $\lim_{\tau\to b^-} F(\tau)$, onde

$$F(\tau) = \int_a^\tau f(x)\,dx = \int_a^{b-\delta} f(x)\,dx\,, \quad \text{para } \delta = b-\tau.$$

Por definição de limite, isto é equivalente a afirmar que

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \;:\; \forall\, y,\, z \in (a, b-\delta) \quad |F(z) - F(y)| < \varepsilon\,,$$

o que é precisamente o resultado enunciado. □

Exemplo 3.3.1. *Usando Princípio de Cauchy, mostre que os integrais impróprios seguintes são, respectivamente, convergente e divergente:*

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$; *b)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{x}\,dx$.

Como é óbvio, o resultado anterior pode ser enunciado, com as devidas adaptações, para uma função f contínua num intervalo $(a,b]$, agora com a eventualmente infinito.

3.4 Integrais impróprios de funções não-negativas

O estudo de integrais impróprios de funções não-negativas torna-se importante, dado que, como iremos ver adiante, o estudo da convergência absoluta reduz-se ao estudo da convergência dos integrais de funções não-negativas.

Proposição 3.4.1. *Seja f uma função definida num intervalo $[a,b)$, com b eventualmente infinito, tal que*

$$f(x) \geq 0 \quad \text{para todo } x \in [a,b)$$

e integrável em todo o intervalo fechado $[a,\tau] \subset [a,\tau)$. Consideremos o integral impróprio de f sobre o intervalo $[a,b)$. Então, o integral impróprio $\int_a^b f(x)\,dx$ converge se e só se a função

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

é limitada em $[a,b)$.

Demonstração. Como $f(x) \geq 0$ em $[a, b)$, a função $F(x)$ é monótona crescente. Ora sendo $F(x)$ também limitada, concluímos que existe o limite

$$\lim_{x \to b^-} F(x) = \int_a^b f(x)\, dx\,.$$

Portanto, o integral impróprio dado é converge. □

Em muitas situações de exercícios práticos, basta-nos saber a natureza dos integrais impróprios em consideração, isto é, se são convergentes ou divergentes. Mesmo aqueles integrais impróprios que são convergentes, por vezes, torna-se difícil calcular o valor do integral. Nestes casos, e como consequência da Proposição 3.4.1, podemos utilizar o critério de comparação de integrais impróprios seguinte.

Proposição 3.4.2 (Critério Geral de Comparação)**.** *Sejam f e g funções definidas num intervalo $[a, b)$, com b eventualmente infinito, e integráveis em todo o intervalo fechado $[a, \tau] \subset [a, b)$. Se*

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \textit{para todo } x \in [a, b)\,,$$

então:

1. A convergência de $\displaystyle\int_a^b g(x)\, dx$ implica a convergência de $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ e tem-se:

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx\,;$$

2. A divergência de $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ implica a divergência de $\displaystyle\int_a^b g(x)\, dx$.

Demonstração. Para a primeira afirmação, observamos que para todo $x \in [a, b)$ se tem

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt \leq \int_a^x g(t)\, dt \leq \int_a^b g(t)\, dt\,.$$

Logo $F(x)$ é limitada e, pela Proposição 3.4.1, o integral impróprio $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ é convergente. Para a segunda afirmação, temos

$$\int_a^b g(x)\, dx \geq \int_a^b f(x)\, dx\,,$$

pelo que $\displaystyle\int_a^b g(x)\, dx$ é divergente. □

A proposição anterior ainda é válida se admitirmos que

$$0 \leq f(x) \leq C\, g(x)\,, \qquad C = \mathit{const.} > 0.$$

Pode, ainda, ser facilmente adaptada para intervalos de integrabilidade imprópria da forma $(a, b]$, com a eventualmente infinito.

Exemplo 3.4.1. *Usando o Critério Geral de Comparação, mostre que os integrais impróprios seguintes são convergentes:*

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^2 e^{-x}\, dx;$ *b)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\, dx\,.$

Sempre que for possível, podemos usar o resultado seguinte em vez do anterior, pois facilita a comparação dos integrais impróprios.

Proposição 3.4.3 (Critério de Comparação)**.** *Sejam f e g funções definidas num intervalo $[a,b)$, com b eventualmente infinito, e integráveis em todo o intervalo fechado $[a,\tau] \subset [a,b)$. Suponhamos que $g(x) > 0$, $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b)$ e*

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L\,.$$

Então:

1. Se $L \neq +\infty$, a convergência de $\int_a^b g(x)\, dx$ implica a convergência de $\int_a^b f(x)\, dx$ e tem-se:

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx\,;$$

2. Se $L \neq 0$, a divergência de $\int_a^b f(x)\, dx$ implica a divergência de $\int_a^b g(x)\, dx$.

Demonstração. Como existe o limite de $\frac{f(x)}{g(x)}$ quando $x \to b^-$, existem uma constante $C > 0$ e um número $\xi \in (a,b)$ tais que

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq C \Leftrightarrow f(x) \leq Cg(x) \quad \text{para todo } x \in [\xi, b).$$

Pela Proposição 3.4.2, o integral impróprio $\int_a^b f(x)\, dx$ é convergente se $\int_a^b g(x)\, dx$ for convergente, já que

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\, dx &= \int_a^\xi f(x)\, dx + \int_\xi^b f(x)\, dx \\ &\leq \int_a^\xi f(x)\, dx + \int_\xi^b g(x)\, dx \\ &\leq \int_a^\xi f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx < \infty\,.\end{aligned}$$

De modo análogo, pela Proposição 3.4.2, o integral impróprio $\int_a^b g(x)\, dx$ é divergente se $\int_a^b f(x)\, dx$ for divergente. $\square$

Com ligeiras adaptações, podemos enunciar o resultado anterior para intervalos $(a,b]$, com a eventualmente infinito. Neste caso, o limite a considerar é

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L\,.$$

O Critério de Comparação é útil para situações em que, apenas, necessitamos de saber a natureza do integral impróprio. Tem, por isso, particular importância para integrais impróprios (convergentes) em que é muito difícil, ou mesmo impossível, determinar as primitivas envolvidas.

Exemplo 3.4.2. *Usando o Critério de Comparação, estude a natureza dos integrais impróprios seguintes:*

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+x^2}\,dx;$ *b)* $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x^2}}\,dx\,.$

3.5 Integral impróprio de primeira espécie

O estudo da natureza dos integrais impróprios de primeira espécie está intimamente ligado ao estudo da natureza de séries numéricas. Pela Proposição 3.4.1, podemos estabelecer o resultado seguinte.

Proposição 3.5.1 (Critério do Integral)**.** *Seja f uma função definida num intervalo $[1,+\infty)$, não-negativa, monótona decrescente e integrável em todo o intervalo fechado $[a,b]\subset[a,+\infty)$. Então a série e o integral seguintes,*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) \quad e \quad \int_1^{+\infty} f(x)\,dx\,,$$

têm a mesma natureza.

Demonstração. Consideremos uma função monótona decrescente $f:[1,+\infty)\longrightarrow[0,+\infty)$. Então, para todo natural $n\geq 1$ temos

$$f(n+1)\leq f(x)\leq f(n) \quad \text{para todo } x\in[n,n+1].$$

Por integração desta desigualdade entre n e $n+1$, obtemos

$$f(n+1)\leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n).$$

Se definirmos uma sucessão $u_n=f(n)$, a desigualdade anterior diz-nos que

$$u_{n+1}\leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx\leq u_n \quad \text{para todo } n\geq 1.$$

Somando a desigualdade anterior entre $n=1$ e $n>1$, obtém-se

$$u_2+u_3+\cdots+u_{n+1}\leq \int_1^{n+1} f(x)\,dx\leq u_1+u_2+\cdots+u_n.$$

Se S_n designar a sucessão das somas parciais da série numérica $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, a desigualdade anterior mostra-nos que

$$S_{n+1}-u_1\leq \int_1^{n+1} f(x)\,dx\leq S_n \quad \text{para todo } n\geq 1. \tag{3.5.1}$$

De modo equivalente, obtemos

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq S_n \leq u_1 + \int_1^n f(x)\,dx \quad \text{para todo } n \geq 1. \tag{3.5.2}$$

Se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente, a sucessão das somas parciais S_n é convergente, logo limitada. Então, por (3.5.1), $F(n+1) = \int_1^{n+1} f(x)\,dx$ é limitada e, pela Proposição 3.4.1, concluímos que o integral impróprio $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ é convergente.

Reciprocamente, se o integral impróprio $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ é convergente, a função $F(n) = \int_1^n f(x)\,dx$ é limitada. Então, por (3.5.2) a sucessão das somas parciais S_n é limitada e, pelo conhecimento que temos das séries de termos não negativos, concluímos que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente.

De modo inteiramente análogo, podemos tirar conclusões da divergência do integral impróprio $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ a partir da divergência da série numérica $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ e reciprocamente. □

A proposição anterior diz-nos que, se o integral é convergente, ou divergente, então a série é convergente, ou respectivamente divergente, e reciprocamente. Este resultado é conhecido por Critério do Integral, porque é mais útil para tirar conclusões da convergência ou divergência de uma série numérica a partir de um integral impróprio de primeira espécie.

Exemplo 3.5.1. *Usando integrais impróprios, estude a natureza das séries seguintes:*

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$; *b)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}$.

Tal como nas séries numéricas, convém ter em mente alguns integrais impróprios que sejam bons candidatos para fazer a comparação. Neste sentido, o denominado **integral de Dirichlet** vai ser muito importante para o estudo de outros integrais impróprios de primeira espécie.

Proposição 3.5.2. *O integral impróprio*

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}, \qquad a = Const > 0,$$

é convergente para $\alpha > 1$ e divergente para $\alpha \leq 1$. Mais, no caso em que converge, temos:

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha - 1}.$$

Demonstração. Temos para $\tau > 1$

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\tau \to +\infty} \int_a^\tau \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\tau \to +\infty} \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_{x=a}^{x=\tau} = \frac{\infty^{-\alpha+1} - a^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}$$
$$= \begin{cases} \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1} & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 1. \end{cases}$$

Se $\alpha = 1$, então

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{\tau \to +\infty} \int_a^{\tau} \frac{dx}{x} = \lim_{\tau \to +\infty} [\ln(x)]_{x=a}^{x=\tau} = \ln(\infty) - \ln(a) = \infty\,,$$

o que conclui a demonstração. □

Na proposição seguinte adaptamos o Critério de Comparação enunciado na Proposição 3.4.3 para comparar com o integral de Dirichlet.

Proposição 3.5.3. *Seja f uma função definida num intervalo $[a, +\infty)$ e integrável em todo o intervalo fechado $[a, \tau] \subset [a, +\infty)$. Consideremos o limite seguinte:*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^{\alpha}}} = \lim_{x \to +\infty} x^{\alpha} f(x) = L\,.$$

1. Se $\alpha > 1$ e $L \neq +\infty$, então $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ é convergente;

2. Se $\alpha \leq 1$ e $L \neq 0$, então $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ é divergente;

Demonstração. A demonstração é uma consequência imediata das Proposições 3.5.2 e 3.4.3. □

Exemplo 3.5.2. *Usando o Critério de Comparação com o Integral de Dirichlet, estude a natureza dos integrais impróprios seguintes:*

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}}{1+x^3}\,dx;$ *b)* $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x-2}{x\sqrt{x}+1}\,dx.$

3.6 Integral impróprio de segunda espécie

O estudo da natureza dos integrais impróprios de segunda espécie é análogo ao que foi feito para o integral impróprio de primeira espécie. Neste caso, vamos considerar o integral impróprio correspondente ao integral de Dirichlet.

Proposição 3.6.1. *O integral impróprio*

$$\int_0^b \frac{dx}{x^{\alpha}}\,, \quad \text{onde } b = Const. > 0\,,$$

é convergente para $\alpha < 1$ e divergente para $\alpha \geq 1$. Mais, no caso em que converge, temos:

$$\int_0^b \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha}\,.$$

Demonstração. Temos para $0 < \tau < b$

$$\int_{\tau}^{b} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{\tau \to 0^+} \int_{\tau}^{b} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{\tau \to 0^+} \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_{x=\tau}^{x=b} = \frac{b^{-\alpha+1} - 0^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}$$
$$= \begin{cases} \frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{se } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 1\,. \end{cases}$$

Se $\alpha = 1$, então

$$\int_0^b \frac{dx}{x} = \lim_{\tau \to 0^+} \int_\tau^b \frac{dx}{x} = \lim_{\tau \to 0^+} [\ln(x)]_{x=\tau}^{x=0} = \ln(b) - \ln(0) = \infty\,,$$

o que conclui a demonstração. $\square$

Observemos que, para sermos precisos, o integral da Proposição 3.6.1 só é impróprio para valores de $\alpha > 0$. De modo inteiramente análogo, se mostra que os integrais impróprios de segunda espécie

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} \qquad \text{e} \qquad \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \tag{3.6.3}$$

convergem para $\alpha < 1$ e divergem para $\alpha \geq 1$.

Na proposição seguinte adaptamos o Critério de Comparação enunciado na Proposição 3.4.3 para comparar com o integral anterior.

Proposição 3.6.2 (Critério de Comparação)**.** *Seja f uma função definida num intervalo $(0, b]$, com $b > 0$, e integrável em todo o intervalo fechado $[\tau, b] \subset (0, b]$. Consideremos o limite seguinte:*

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x \to 0^+} x^\alpha f(x) = L\,. \tag{3.6.4}$$

1. *Se $\alpha < 1$ e $L \neq +\infty$, então $\int_0^b f(x)\,dx$ é convergente;*
2. *Se $\alpha \geq 1$ e $L \neq 0$, então $\int_0^b f(x)\,dx$ é divergente;*

Demonstração. Novamente, a demonstração é uma consequência das Proposições 3.6.1 e 3.4.3. $\square$

Se estivermos perante um intervalo da forma $[a, 0)$, o limite (3.6.4) vem alterado para

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x \to 0^-} x^\alpha f(x) = L\,.$$

No caso de intervalos $(a, b]$ e $[a, b)$, e tendo em conta os integrais (3.6.3), o limite (3.6.4) deverá ser substituído, respectivamente, por

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{\frac{1}{(x-a)^\alpha}} = \lim_{x \to a^+} (x-a)^\alpha f(x) = L\,, \qquad \lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{\frac{1}{(b-x)^\alpha}} (b-x)^\alpha f(x) = L\,.$$

Exemplo 3.6.1. *Estude a natureza dos integrais impróprios seguintes:*

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+1}{(x+1)\sqrt{x}}\,dx;$ *b)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\sqrt{x^2+1}}{1-x^2}\,dx.$

3.7 Convergência absoluta ou condicional

Nas secções anteriores, vimos que o estudo da natureza de muitos integrais impróprios se reduz ao estudo de integrais de funções não negativas. É, portanto, natural o estudo de integrais impróprios de funções integrandas em valor absoluto.

Definição 3.7.1. *O integral impróprio $\int_a^b f(x)\,dx$ diz-se absolutamente convergente, se o integral (impróprio)*

$$\int_a^b |f(x)|\,dx$$

convergir.

Exemplo 3.7.1. *Mostre o integral impróprio seguinte é absolutamente convergente:*

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\ln(x))}{x^2}\,dx\,.$$

Uma consequência imediata da Proposição 3.3.1 é apresentada a seguir.

Proposição 3.7.1. *Se o integral impróprio*

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

é absolutamente convergente, então também é convergente.

Demonstração. Admitindo que o integral é impróprio no limite superior b, a demonstração é uma consequência imediata da Proposição 3.3.1, pois

$$\left|\int_a^\tau f(x)\,dx\right| \leq \int_a^\tau |f(x)|\,dx\,,$$

para qualquer intervalo limitado $[a,\tau] \subset [a,b)$. □

A recíproca da proposição anterior não é verdade, como iremos ver adiante. Os **integrais impróprios** que convergem, mas divergem em valor absoluto, dizem-se que **convergem simplesmente**, ou que **convergem condicionalmente**. No entanto, mostrar que um integral impróprio é condicionalmente convergente, nos casos em que tal acontece, é um exercício mais difícil. A proposição seguinte permite-nos, em alguns casos, ultrapassar esta dificuldade de uma forma subtil.

Proposição 3.7.2 (Critério de Dirichlet)**.** *Sejam f e g duas funções definidas num intervalo $[a,b)$, com b eventualmente infinito, tais que:*

1. *f é uma função contínua em $[a,b)$ e a função $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ é limitada em $[a,b)$;*
2. *g' é absolutamente integrável (à Riemann) em qualquer intervalo $[a,\tau] \subset [a,b)$, com $a < \tau < b$, e*

$$\lim_{x\to b^-} g(x) = 0\,.$$

Então o integral impróprio $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ *é convergente.*

Demonstração. Sendo τ tal que $a \leq \tau < b$, temos, por integração por partes,

$$\int_a^\tau f(x)g(x)\,dx = F(\tau)g(\tau) - F(a)g(a) - \int_a^\tau F(x)g'(x)\,dx\,. \tag{3.7.5}$$

Usando a hipótese de que $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ é limitada em $[a,b)$, obtemos

$$\int_a^\tau |F(x)g'(x)|\;dx \leq C\int_a^\tau |g'(x)|\,dx\,,\quad \text{C=Const.>0.}$$

Como $|g'|$ é integrável (à Riemann) em $[a,b)$, o integral no segundo membro é absolutamente convergente (logo convergente) quando $\tau \to b^-$, pela Proposição 3.4.1. Pelo Critério Geral de Comparação (Proposição 3.4.2), também o integral no primeiro membro é convergente quando $\tau \to b^-$. Deste modo, passando ao limite $\tau \to b^-$ em (3.7.5) e usando a hipótese de que $\lim_{x\to b^-} g(x) = 0$, temos

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = -F(a)g(a) - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx\,.$$

Como o integral do segundo membro é convergente, concluímos que o integral dado também é convergente. □

Observe-se que o Critério de Dirichlet enunciado na proposição anterior é aplicável, quer integral impróprio seja de primeira espécie ou de segunda. Neste último caso, estende-se naturalmente a intervalos da forma $(b,a]$, com as devidas adaptações.

Exemplo 3.7.2. *Usando o Critério de Dirichlet, mostre que o integral impróprio*

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,dx$$

é convergente. Justifique que a convergência é condicional.

Por vezes, o Critério de Dirichlet é formulado numa forma mais simples de aplicar, mas mais difícil de demonstrar.

Proposição 3.7.3. *Sejam f e g duas funções definidas num intervalo $[a,b)$, com b eventualmente infinito, tais que:*

1. *f é uma função contínua em $[a,b)$ e a função* $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ *é limitada em $[a,b)$;*

2. *g é uma função monótona em $[a,b)$ e*

$$\lim_{x\to b^-} g(x) = 0\,.$$

Então o integral impróprio $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ *é convergente.*

Demonstração. A demonstração desta proposição sai fora do âmbito deste curso, pelo que não a iremos fazer aqui. □

Exemplo 3.7.3. *Usando o Critério de Dirichlet, na forma da proposição anterior, mostre que o integral impróprio*

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{1-x}\right)}{\sqrt{1-x}}\,dx$$

é convergente.

Nas duas secções finais, apresentamos duas subclasses de integrais impróprios que, pela sua importância em várias áreas, merecem ser estudados à parte.

3.8 Função Gama

Nesta secção, vamos considerar o integral de Euler de segunda espécie. Trata-se de um integral impróprio cujo valor depende de um parâmetro.

Definição 3.8.1. *Designa-se por* ***função Gama*** *ao integral impróprio definido da forma seguinte:*

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt\,. \tag{3.8.6}$$

Observemos que para valores de $x \geq 1$ a função Gama é um integral impróprio de primeira espécie. Se $x < 1$, então é um integral impróprio misto, portanto de primeira e de segunda espécies.

Proposição 3.8.1. *A função Gama é convergente para todo $x > 0$.*

Demonstração. Começamos por escrever

$$\Gamma(x) = \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt + \int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt\,. \tag{3.8.7}$$

O primeiro integral é impróprio de segunda espécie apenas para valores de $x < 1$ e, neste caso, converge se $x > 0$, já que

$$x > 0 \Rightarrow \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt \leq \int_0^1 \frac{dt}{t^{1-x}} = \frac{1}{x}\,.$$

Por outro lado, o segundo integral de (3.8.7) é improprio de primeira espécie e converge para qualquer x, pois $t \geq 1$ e

$$x \leq 1 \Rightarrow \int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt \leq \int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt = e^{-1}$$

ou

$$x > 1 \Rightarrow \exists\ C > 0 : t^{x-1}e^{-\frac{t}{2}} \leq C \Rightarrow \int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt \leq C\int_1^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}}\,dt = \frac{2}{\sqrt{e}}.$$

Concluímos que a função Gama é convergente se $x > 0$. $\square$

Pela proposição anterior, torna-se necessário averiguar o que acontece nos limites inferior e superior do intervalo de convergência da função Gama, isto é, quando $x \to 0^+$ e quando $x \to +\infty$.

Proposição 3.8.2. *Seja* Γ *a função Gama. Então*

1. $\lim_{x\to 0^+} \Gamma(x) = +\infty$;
2. ***Fórmula de Stirling:*** $\Gamma(x) \rightsquigarrow \sqrt{\dfrac{2\pi}{x}}\left(\dfrac{x}{e}\right)^x$ *quando* $x \to +\infty$.

Demonstração. Para a primeira afirmação, temos

$$\lim_{x\to 0^+} \Gamma(x) = \int_0^1 t^{-1}e^{-t}\,dt + \int_1^{+\infty} t^{-1}e^{-t}\,dt\,.$$

Como

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{t^{-1}e^{-t}}{\frac{1}{t}} = \lim_{t\to 0^+} e^{-t} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{t\to +\infty} \frac{t^{-1}e^{-t}}{\frac{1}{te^t}} = 1\,,$$

pela Proposição 3.4.3, os integrais anteriores têm a mesma natureza dos integrais

$$\int_0^1 \frac{dt}{t} = +\infty \quad \text{e} \quad \int_1^{+\infty} te^t\,dt = \lim_{\tau\to+\infty}\left[e^t(t-1)\right]_{t=1}^{t=\tau} = +\infty\,.$$

Logo $\lim_{x\to 0^+}\Gamma(x) = +\infty$.

A demonstração da segunda afirmação é bastante mais envolvente, pois usa um processo recursivo de mudanças de variáveis que ultrapassa os objectivos deste curso [1]. $\square$

Na proposição seguinte apresentam-se fórmulas que nos permitem calcular a função Gama para alguns valores de $x > 0$.

Proposição 3.8.3. *Seja* Γ *a função Gama. Temos:*

1. $\Gamma(1) = 1$;
2. ***Fórmula de Recorrência:*** $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ *para todo* $x > 0$;
3. ***Fórmula de Reflexão (de Euler):*** $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi x)}$ *para todo* $0 < x < 1$.

Demonstração. A primeira afirmação sai imediatamente, pois

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1\,.$$

A segunda, resulta de uma integração por partes. De facto, se $x > 0$ tem-se

$$\Gamma(x) = \lim_{\tau\to+\infty}\lim_{\eta\to 0^+}\left\{\left[\frac{1}{x}t^x e^{-t}\right]_\eta^\tau + \frac{1}{x}\int_\eta^\tau t^x e^{-t}\,dt\right\} = \frac{1}{x}\Gamma(x+1).$$

[1] Ver e.g. N.N. Lebedev, *Special Functions & Their Applications*, Dover, 1972.

A demonstração da Fórmula de Euler é muito mais delicada, pois usa integrais de linha pelo que não cabe no âmbito deste curso (Ver e.g. N.N. Lebedev). □

A proposição anterior permite tirar os resultados particulares seguintes, muitos úteis em diversos cálculos.

Proposição 3.8.4. *Seja* Γ *a função Gama. Então:*

1. $\Gamma(n+1) = n!$ *para todo o inteiro* $n \geq 0$*;*
2. $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$*;*
3. $\Gamma\left(n+\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{(2n-1)\times\cdots\times 5\times 3\times 1}{2^n}\sqrt{\pi}$ *para todo o inteiro* $n \geq 1$*;*
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Demonstração. A primeira afirmação é uma consequência imediata das duas primeiras afirmações da Proposição 3.8.3. De facto, tem-se para todo inteiro $n \geq 0$

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = \cdots = n\times\cdots\times 2\times\Gamma(1) = n!.$$

A segunda afirmação é uma consequência da terceira afirmação da Proposição 3.8.3. Na verdade, se aí tomarmos $x = \frac{1}{2}$, temos

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)} \Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

A terceira afirmação é, agora, uma consequência da segunda afirmação desta Proposição conjugada com a primeira afirmação da Proposição 3.8.3, já que

$$\begin{aligned}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right)\\ &= \cdots = \left(n-\frac{1}{2}\right)\times\left(n-\frac{3}{2}\right)\times\cdots\times\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\times\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

A quarta afirmação, resulta da segunda afirmação desta mesma Proposição, pois fazendo a mudança de variável $t = s^2$ temos

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \Leftrightarrow \int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt = \sqrt{\pi} \Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-s^2}\,ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

o que conclui a demonstração. □

Exemplo 3.8.1. *Usando a função Gama, mostre que os integrais impróprios de primeira espécie são convergentes e o seu valor é o indicado:*

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^5 e^{-2x}\,dx = \frac{15}{8}$; *b)* $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$.

A Fórmula de Recorrência expressa na Proposição 3.8.3, permite estender o cálculo da função Gama para alguns valores de x negativos, escrevendo

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}\,. \tag{3.8.8}$$

Exemplo 3.8.2. *Usando a Fórmula de Recorrência (3.8.8), mostre que:*

a) $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}$; *b)* $\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}$.

3.9 Função Beta

Nesta secção, vamos estudar o designado integral de Euler de primeira espécie. Agora, trata-se de um integral impróprio cujo valor depende de dois parâmetros.

Definição 3.9.1. *Designa-se por função Beta o integral seguinte:*

$$B(x,y) := \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt\,. \tag{3.9.9}$$

Observemos que a função Beta é um integral impróprio de segunda espécie e isto acontece somente se $x < 1$ ou se $y < 1$.

Proposição 3.9.1. *A função Beta é convergente para quaisquer $x > 0$ e $y > 0$.*

Demonstração. Comecemos por observar que se $x \geq 1$ e $y \geq 1$, a função integranda

$$t^{x-1}(1-t)^{y-1}$$

é contínua para qualquer $t \in [0,1]$ e o integral dado por (3.9.9) existe no sentido de Riemann e, portanto, converge. No caso de $x < 1$ ou $y < 1$, a função integranda não é limitada em $t = 0$ ou em $t = 1$, respectivamente. Em cada um destes casos, temos

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{t^{x-1}(1-t)^{y-1}}{\frac{1}{t^{1-x}}} = \lim_{t\to 0^+} (1-t)^{y-1} = 1\,,$$
$$\lim_{t\to 1^-} \frac{t^{x-1}(1-t)^{y-1}}{\frac{1}{(1-t)^{1-y}}} = \lim_{t\to 1^-} t^{x-1} = 1\,.$$

Ora, pela Proposição 3.6.1, sabemos que os integrais impróprios

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^{1-x}} \qquad \text{e} \qquad \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)^{1-y}}$$

são convergentes para $1 - x < 1 \Leftrightarrow x > 0$ e para $1 - y < 1 \Leftrightarrow y > 0$, respectivamente. Então, pelo Critério de Comparação (ver Proposição 3.6.2), a função Beta é convergente para $x > 0$ e $y > 0$. □

Proposição 3.9.2. *A função Beta é simétrica, isto é*

$$B(x,y) = B(y,x) \qquad \text{para quaisquer } x \text{ e } y.$$

Demonstração. Fazendo a mudança de variável $1-t=s$ no integral (3.9.9), obtemos

$$\begin{aligned} B(x,y) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt = -\int_1^0 (1-s)^{x-1}s^{y-1}\,ds \\ &= \int_0^1 s^{y-1}(1-s)^{x-1}\,ds = B(y,x) \end{aligned}$$

para quaisquer x e y $\square$

Proposição 3.9.3. *A relação entre a função Gama e a função Beta é dada, para quaisquer $x>0$ e $y>0$, por*

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\,.$$

Demonstração. A demonstração deste resultado envolve conhecimentos de assuntos sobre integração dupla que só iremos adquirir mais adiante. Por isso, não faremos a demonstração deste resultado aqui. $\square$

Exemplo 3.9.1. *Usando a proposição anterior, mostre que:*

a) $B\left(\frac{1}{2},2\right) = \frac{4}{3}$; *b)* $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Exemplo 3.9.2. *Usando a função Beta, juntamente com a função Gama, mostre que os integrais seguintes são iguais aos valores indicados:*

a) $\displaystyle\int_0^1 x^{\frac{1}{6}}\left(1-x^{\frac{7}{9}}\right)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{9}{14}\pi$; *b)* $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{x(2-x)}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

3.10 Ficha de exercícios nº 3

1. Calcule, sempre que possível, os integrais impróprios de primeira espécie seguintes:

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$; b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$; c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{t^2}{27-t^3}\,dt$;

d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{8}{8+2x^2}\,dx$; e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{x^2+2x+2}\,dx$; f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{r}{e^{r^2}}\,dr$;

g) $\displaystyle\int_1^{+\infty} x\,\mathrm{sen}(x)\,dx$; h) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{x^2+1}\,dx$; i) $\displaystyle\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{\theta}\right)}{\theta^2}\,d\theta$.

2. Calcule, sempre que possível, os integrais impróprios de segunda espécie seguintes:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x}\,dx$; b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; c) $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2-3}$;

d) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{|x|}}$; e) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{e^{\frac{1}{r}}}{r^2}\,dr$; f) $\displaystyle\int_{-2}^2 \frac{4x^3}{x^4-1}\,dx$;

g) $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,dx$; h) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\cos^2(\alpha)}$; i) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dy}{\operatorname{arcsen}(y)\sqrt{1-y^2}}$.

3. Calcule, sempre que possível, os integrais impróprios mistos seguintes:

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$; b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$; c) $\displaystyle\int_{-\infty}^1 \frac{ds}{\sqrt{1-s}}$;

d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\ln\left(\frac{1}{x}\right)}$; e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dr}{r^2e^{\frac{1}{r}}}$; f) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{dt}{(1+t^2)\operatorname{arctg}(t)}$;

g) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)}$; h) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arccotg}\left(\frac{1}{\beta}\right)}{\beta^2+1}\,d\beta$; i) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{dy}{e^{-y}-1}$.

4. Usando o Critério de Comparação, estude a natureza dos integrais impróprios de primeira espécie seguintes:

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x}\,dx$; b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx$; c) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{x}{x^3-1}\,dx$;

d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}\,dx$; e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}}\,dx$; f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{(x^2+1)}{x^2\sqrt{x^4+1}}\,dx$;

g) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{1+\operatorname{sen}(x)}\,dx$; h) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2+\operatorname{sen}(x)}$; i) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2(x)}{\sqrt[3]{x^6+1}}\,dx$.

5. Usando o Critério de Comparação, estude a natureza dos integrais impróprios de segunda espécie seguintes:

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{x}\,dx$; b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{x^3}}\,dx$; c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$;

d) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x^2}{e^x\sqrt{x+1}}\,dx$; e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x+1}\,dx$; f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\operatorname{tg}(x)}\,dx$;

g) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}(x)}}\,dx$; h) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+\ln(1-x)}\,dx$.

6. Usando o Critério de Comparação, estude a natureza dos integrais impróprios mistos seguintes:

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}+1}{(x+1)\sqrt{x}}\,dx$; b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x\sqrt{x}}$; c) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x-2)\ln^2(x)}$;

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{senh}(x)}{x}\,dx$; e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{\sqrt[3]{x^4}}\,dx$; f) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

7. Utilize o Critério do Integral para estudar a natureza das séries numéricas seguintes:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+3}}$; c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4n}{(2n^2+3)^2}$;

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}$; e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{e^n}$; f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{ne^{\frac{1}{n}}}$.

8. Mostre que os integrais impróprios seguintes são absolutamente convergentes:

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+x^2}\,dx$; b) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt[3]{x}}\,dx$; c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{e^{|x|}}\,dx$;

d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(\ln(x))}{\sqrt{x^3+1}}\,dx$; e) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\left(\sqrt{|x|}\right)}{x^4+2x^2+3}\,dx$.

9. Usando a função Gama, calcule os integrais seguintes:

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^4e^{-3x}\,dx$; b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2\sqrt{x}e^{-3x}\,dx$; c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2e^{-3x^2}\,dx$;

d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{x}e^{-2\sqrt{x}}\,dx$; e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^5\sqrt{x}e^{-3x}\,dx$; f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^3e^{-2x^2}\,dx$.

10. Usando a função Beta, em conjunto com a função Gama, calcule os integrais seguintes:

a) $\displaystyle\int_0^{1} x^{\frac{1}{3}}\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{2}{3}}\,dx$; b) $\displaystyle\int_0^{1} x\left(1-x^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\,dx$;

c) $\displaystyle\int_0^{1} x^{\frac{39}{10}}(1-x^{\frac{7}{5}})^{\frac{3}{2}}\,dx$; d) $\displaystyle\int_0^{1} x^{\frac{1}{6}}(1-x^{\frac{7}{9}})^{-\frac{1}{2}}\,dx$;

e) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} (2x-1)\sqrt{2-2x}\,dx$; f) $\displaystyle\int_4^{16} \sqrt{\sqrt{x}-2}\,\sqrt{4-\sqrt{x}}\,\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

11. Verifique para que valores de a, b e c a igualdade seguinte é válida:

$$\int_0^1 x^a(1-x^b)^c\,dx = \frac{1}{4}B\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right).$$

Calcule $\frac{1}{4}B\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$.

Capítulo 4

Séries de Funções

4.1 Introdução

Uma série infinita de funções reais de variável real, ou apenas série de funções, é qualquer série da forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \dots \, ,$$

onde $u_n(x)$ é uma sucessão de funções reais de variável real definidas num domínio de $\mathbb{R}$. Para as séries de funções, usaremos a notação já utilizada nas séries numéricas, substituindo apenas o termo geral u_n por $u_n(x)$. Outro facto importante, é que, se nada for dito em contrário e sempre que a sucessão de funções de termo geral $u_n(x)$ esteja definida em $\mathbb{R}$, o limite inferior da série será 0. Observemos que, quando concretizamos a variável x, a série de funções $\sum u_n(x)$ torna-se numa série numérica. Deste modo, muito do que foi dito para as séries numéricas, em particular as noções de convergência, bem como alguns resultados de convergência, ainda são válidos aqui, com as devidas adaptações.

Definição 4.1.1 (Convergência)**.** *Diz-se que a série de funções $\sum u_n(x)$ é convergente num ponto $x \in \mathbb{R}$, se a sucessão de funções das somas parciais associada*

$$S_0(x) = u_0(x), \quad S_1(x) = u_0(x) + u_1(x), \quad \dots, \quad S_n(x) = u_0(x) + u_1(x) + \cdots + u_n(x), \quad \dots$$

for convergente nesse ponto x.

No caso da série convergir num ponto $x \in \mathbb{R}$, a sucessão de funções das somas parciais converge, nesse ponto, para a denominada **função soma** da série, denotada por $S(x)$, isto é,

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} S_n(x) = S(x).$$

Neste caso, podemos escrever

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = S(x).$$

Se a sucessão de funções das somas parciais $S_n(x)$ for divergente no ponto x, a **série** $\sum u_n(x)$ diz-se **divergente** em x. A série $\sum u_n(x)$ é **absolutamente convergente** no ponto x, se $\sum |u_n(x)|$

é convergente em x. Se $\sum |u_n(x)|$ é divergente num ponto x, mas $\sum u_n(x)$ é convergente nesse ponto x, a série $\sum u_n(x)$ diz-se **simplesmente convergente**, ou **condicionalmente convergente**, no ponto $x \in \mathbb{R}$. Tal como para as séries numéricas, a noção de convergência absoluta é mais forte do que a de convergência simples.

Proposição 4.1.1. *Seja $\sum u_n(x)$ uma série de funções. Se $\sum |u_n(x)|$ é convergente num ponto $x \in \mathbb{R}$, então também $\sum u_n(x)$ é convergente em x e tem-se:*

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n(x)|. \tag{4.1.1}$$

Demonstração. Comecemos por considerar as sucessões das somas parciais das séries $\sum u_n(x)$ e $\sum |u_n(x)|$,

$$S_n(x) = u_0(x) + u_1(x) + \cdots + u_n(x)\,,$$
$$S_n^{|\cdot|}(x) = |u_0(x)| + |u_1(x)| + \cdots + |u_n(x)|\,.$$

Suponhamos que $\sum |u_n(x)|$ é convergente num ponto $x \in \mathbb{R}$. Então, nesse ponto, temos, pelo Critério Geral de Cauchy,

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, p \in \mathbb{N} \;:\; m,\ n > p \Rightarrow \left|S_m^{|\cdot|}(x) - S_n^{|\cdot|}(x)\right| < \varepsilon\,.$$

Admitindo, sem perda de generalidade, que $m > n$, tem-se

$$\left|S_m^{|\cdot|}(x) - S_n^{|\cdot|}(x)\right| = |u_m(x)| + \cdots + |u_{n+1}(x)| < \varepsilon\,.$$

Ora, como

$$|S_m(x) - S_n(x)| = |u_m(x) + \cdots + u_{n+1}(x)| \leq |u_m(x)| + \cdots + |u_{n+1}(x)| < \varepsilon\,,$$

vem que a série $\sum u_n(x)$ também é convergente no ponto x. Para mostrar (4.1.1), basta observar que

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\right| = \left|\lim_{n\to+\infty} S_n(x)\right| \leq \lim_{n\to+\infty} S_n^{|\cdot|}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n(x)|\,,$$

o que conclui a demonstração. □

4.2 Séries de potências

Neste curso, iremos estudar apenas o caso particular de séries de funções cujos termos gerais $u_n(x)$ façam envolver na variável x somente potências de x ou, mais geralmente, de $x - a$, para certo $a \in \mathbb{R}$ fixo.

Definição 4.2.1 (Série de potências)**.** *Designa-se por série de potências de x toda a série da forma*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \cdots + a_n\, x^n + \ldots\,,$$

onde a_n é uma sucessão numérica e x é um real.

Os termos da sucessão a_n são denominados **coeficientes da série de potências**. Se na série de potências anterior substituirmos x por $(x-a)$, onde a é um real fixo, obtemos a série de potências de $(x-a)$ seguinte:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,(x-a)^n = a_0 + a_1\,(x-a) + a_2\,(x-a)^2 + \cdots + a_n\,(x-a)^n + \ldots .$$

Exemplo 4.2.1 (Série finita)**.** *Uma série finita de potências é uma série de potências* $\sum a_n\,x^n$ *com os termos quase todos nulos, isto é, tal que*

$$\exists\ p \in \mathbb{N} : n > p \Rightarrow a_n = 0.$$

Uma série finita é (absolutamente) convergente para qualquer $x \in \mathbb{R}$. De facto, de acordo com o exemplo,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,x^n = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \cdots + a_p\,x^p\,.$$

Este facto permite-nos dizer que as séries de potências de x podem ser encaradas como uma generalização dos polinómios em x.

Exemplo 4.2.2. *Escreva o polinómio seguinte como uma série (finita) de potências de* $x-3$*:*

$$f(x) = 2x^5 - 11x^4 + 5x^3 - x^2 + 1\,.$$

Exemplo 4.2.3 (Série geométrica)**.** *Uma série geométrica de potências é uma série de potências* $\sum a_n\,x^n$ *tal que* $a_n = 1$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \ldots .$$

Como vimos aquando do estudo das séries numéricas, a série de potências $\sum x^n$ é absolutamente convergente para $|x| < 1$ e divergente para $|x| \geq 1$. No caso de convergir, a função soma é

$$S(x) = \frac{1}{1-x}$$

e podemos escrever

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

O problema que se coloca nas séries de potências, é o de saber em que condições a série converge e, além disso, se convergir, para que valores de x converge. Vamos ver que os Critérios da Razão e da Raiz, podem-nos ajudar a estudar a natureza das séries de potências.

Proposição 4.2.1 (Critério da Razão - D'Alembert)**.** *Sejam* $\sum a_n\,x^n$ *uma série de potências e*

$$R := \frac{1}{\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\,.$$

1. *A série* $\sum a_n\, x^n$ *converge absolutamente se* $|x| < R$*, isto é, se* $x \in \ (-R,\ R)$.

2. *A série* $\sum a_n\, x^n$ *diverge se* $|x| > R$*, isto é, se* $x \in \ (-\infty,\ -R) \cup (R,\ +\infty)$.

Em particular, se $R = 0$*, a série converge absolutamente apenas para* $x = 0$ *e se* $R = +\infty$*, a série converge absolutamente para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Consideremos a série dos módulos $\sum |a_n\, x^n|$ e seja $u_n = |a_n\, x^n|$, onde, para já, x é um ponto arbitrário de $\mathbb{R}$. Temos

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}\, x^{n+1}|}{|a_n\, x^n|} = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x|\,.$$

Então, pelo Critério da Razão, a série $\sum |a_n\, x^n|$ é convergente, se

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x| < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R$$

e é divergente, se

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x| > 1 \Leftrightarrow |x| > \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R\,.$$

Os casos $R = 0$ e $R = +\infty$ são consequências triviais. ☐

O número R, eventualmente $+\infty$, designa-se por **raio de convergência da série** e o intervalo $(-R,\ R)$ por **intervalo de convergência (absoluta) da série**.

Exemplo 4.2.4. *Usando o critério anterior, determine o raio de convergência da série seguinte:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Observe-se que para podermos aplicar o critério anterior, tem de existir, em $\overline{\mathbb{R}}$, o limite $\lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Proposição 4.2.2 (Critério da Raiz - Cauchy)**.** *Sejam* $\sum a_n\, x^n$ *uma série de potências e*

$$R = \frac{1}{\displaystyle\limsup_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}\,.$$

1. *A série* $\sum a_n\, x^n$ *converge absolutamente se* $|x| < R$*, isto é, se* $x \in \ (-R,\ R)$.

2. *A série* $\sum a_n\, x^n$ *diverge se* $|x| > R$*, isto é, se* $x \in \ (-\infty,\ -R) \cup (R,\ +\infty)$.

Em particular, se $R = 0$*, a série converge absolutamente apenas para* $x = 0$ *e se* $R = +\infty$*, a série converge absolutamente para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Seja x um ponto arbitrário de $\mathbb{R}$ e consideremos a série dos módulos $\sum |a_n\, x^n|$. Fazendo $u_n = |a_n\, x^n|$, temos

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n\, x^n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\, |x|\,.$$

Pelo Critério da Raiz, a série $\sum |a_n\, x^n|$ é convergente se

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} < 1 \Leftrightarrow \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}|x| < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = R\,,$$

e é divergente se

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}|x| > 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x| > 1 \Leftrightarrow |x| > \frac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = R\,.$$

Também aqui, os casos $R = 0$ e $R = +\infty$ são consequências triviais do exposto acima. □

Exemplo 4.2.5. *Usando o critério anterior, determine o raio de convergência da série seguinte:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n\, x^n.$$

Observe-se que para podermos aplicar o critério anterior não é necessário que exista o limite $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$. Basta que exista o limite superior $\limsup \sqrt[n]{|a_n|}$.

Em ambos os critérios enunciados acima nada se diz no caso de $|x| = R$, isto é, se $x = \pm R$, admitindo $R \neq +\infty$. Neste caso, tem-se no Critério da Razão e no da Raiz, respectivamente,

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} x\right| = 1 \quad \text{e} \quad \limsup_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt[n]{|a_n\, x^n|} = 1\,.$$

Assim, não podemos concluir nada, porque a série pode ser convergente ou divergente. Por isso, torna-se necessário fazer um estudo local da série de potências nos pontos $x = \pm R$, o que nos leva ao estudo de séries numéricas.

Exemplo 4.2.6. *Estude a natureza das séries seguintes quanto à convergência simples e absoluta em todos os pontos de* $\mathbb{R}$*:*

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{\sqrt{n}}$; *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^n}$.

Tudo o que foi dito para as séries de potências de x, permanece válido para qualquer série de potências de $(x - a)$, com $a \in \mathbb{R}$ fixo. Em particular, a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, (x-a)^n = a_0 + a_1\, (x-a) + a_2\, (x-a)^2 + \cdots + a_n\, (x-a)^n + \dots$$

é convergente para

$$|x-a|<R \quad \Leftrightarrow \quad a-R<x<a+R,$$

e divergente para

$$|x-a|>R \quad \Leftrightarrow \quad x<a-R \quad \text{ou} \quad x>a+R,$$

onde R é o raio de convergência. Do mesmo modo, para

$$|x-a|=R \Leftrightarrow x=a\pm R,$$

tem de se fazer um estudo local.

Exemplo 4.2.7. *Estude a natureza das séries seguintes quanto à convergência simples e absoluta em todos os pontos de* $\mathbb{R}$*:*

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2x+1)^n}{n}$; *b)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(x-3)^n}{2^n}$.

Na segunda parte desta secção, vamos estabelecer as propriedades mais importantes das séries de potências. Comecemos por considerar uma série de potências arbitrária

$$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\,(x-a)^n=a_0+a_1\,(x-a)+a_2\,(x-a)^2+\cdots+a_n\,(x-a)^n+\ldots,$$

com $a\in\mathbb{R}$ fixo. Na proposição seguinte, vamos ver que podemos garantir a continuidade da função soma no intervalo de convergência da série.

Proposição 4.2.3. *Seja $u(x)$ a função soma de uma série de potências $\sum a_n(x-a)^n$ de raio de convergência R. Se $R>0$, então a função soma $u(x)$ é contínua em qualquer ponto $x\in(a-R,\ a+R)$.*

Demonstração. Consideremos apenas o caso particular de $a=0$, já que para $a\neq 0$ a demonstração é análoga. Seja $x_0\in(-R,\ R)$ um ponto arbitrário e tomemos $\varepsilon>0$ tal que $|x_0|<\varepsilon<R$. Temos

$$u(x)-u(x_0)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\,(x^n-x_0^n)=a_1\,(x-x_0)+a_2\,(x^2-x_0^2)+\cdots+a_n\,(x^n-x_0^n)+\ldots.$$

Observando que

$$x^n-x_0^n=(x-x_0)\left(x^{n-1}+x_0x^{n-2}+\cdots+x_0^{n-2}x+x_0^{n-1}\right), \tag{4.2.2}$$

vem

$$|x|<\varepsilon \quad \text{e} \quad |x_0|<\varepsilon\Rightarrow|a_n\,(x^n-x_0^n)|<n\,\varepsilon^{n-1}\,|a_n|\,|x-x_0|\,.$$

Então, usando (4.1.1) e (4.2.2), temos

$$|u(x)-u(x_0)|\le\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n\,(x^n-x_0^n)|<|x-x_0|\sum_{n=0}^{+\infty}n\,\varepsilon^{n-1}\,|a_n|\le C\,|x-x_0|\,,$$

onde C é uma constante positiva. Daqui se deduz a continuidade de $u(x)$ em x_0. Para justificar que C é uma constante positiva, basta verificar que $\sum n\,\varepsilon^{n-1}\,|a_n|$ é uma série convergente. De facto, se $b_n = n\,\varepsilon^{n-1}\,|a_n|$, tem-se, pelo Critério da Razão,

$$R \neq 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)\varepsilon^n\,|a_{n+1}|}{n\varepsilon^{n-1}|a_n|} = \varepsilon \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|^{-1} = \frac{\varepsilon}{R} < 1\,,$$

o que conclui a demonstração. □

A próxima proposição prende-se com a derivada de uma série de potências e da relação desta com a série original, assim como a derivabilidade da função soma da série de potências.

Proposição 4.2.4. *Seja $u(x)$ a função soma de uma série de potências $\sum a_n(x-a)^n$ de raio de convergência R. Se $R > 0$, então a função soma $u(x)$ é derivável em qualquer ponto $x \in (a-R,\ a+R)$ e tem-se*

$$u'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,a_n\,(x-a)^{n-1} \quad \forall\ x \in (a-R,\ a+R). \tag{4.2.3}$$

Demonstração. Consideremos, apenas, o caso particular de $a = 0$. No caso de $a \neq 0$, aplicamos o resultado do caso $a = 0$ juntamente com o Teorema de Derivação da Função Composta. Sendo $x \in (-R,\ R)$ um ponto arbitrário, queremos mostrar que existe o limite, quando h tende para 0, da razão incremental de $u(x)$. Usando a definição de limite, isto equivale a mostrar que

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0\ :\ |h| < \delta \wedge |x| + |h| < R\ \Rightarrow \left|\frac{u(x+h)-u(x)}{h} - \sum_{n=1}^{+\infty} n\,a_n\,(x-a)^{n-1}\right| < \varepsilon\,. \tag{4.2.4}$$

Pela utilização do Binómio de Newton

$$\begin{aligned}(x+h)^n =& \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^{n-k} h^k \\ =& x^n + nx^{n-1}h + n(n-1)x^{n-2}h^2 + \cdots + n(n-1)x^2h^{n-2} + nxh^{n-1} + h^n\,,\end{aligned}$$

podemos escrever

$$\begin{aligned}&\frac{u(x+h)-u(x)}{h} - \sum_{n=1}^{+\infty} n\,a_n\,x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,\frac{(x+h)^n - x^n}{h} - \sum_{n=1}^{+\infty} n\,a_n\,x^{n-1} \\ =& \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,\left(nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2}h + \cdots + n(n-1)x^2h^{n-3} + nxh^{n-2} + h^{n-1} - nx^{n-1}\right) \\ =& \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{h} \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^{n-k} h^k\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n h \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^{n-k} h^{k-2}\right) \\ =& \sum_{n=0}^{+\infty} a_n h \left(\sum_{i=0}^{n-2} \frac{n!}{(i+2)!(n-2-i)!} x^{n-2-i} h^i\right)\,.\end{aligned}$$

Usando o facto de

$$\frac{n!}{(i+2)!(n-2-i)!} \leq n(n-1)\frac{(n-2)!}{i!(n-2-i)!}\,,$$

novamente o Binómio de Newton e a hipótese $|h| < \delta$, temos

$$\left| \frac{u(x+h)-u(x)}{h} - \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^{n-1} \right| \le \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|\, |h|\, n(n-1) \left(\sum_{i=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{i!(n-2-i)!} |x|^{n-2-i} |h|^i \right)$$
$$= |h| \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|\, n(n-1)\, (|x|+|h|)^{n-2} < \delta\, C\,.$$

A série numérica da última desigualdade é convergente pelo Critério da Razão e, portanto, limitada por uma constante C, pois

$$R \neq 0 \wedge |x|+|h| < R \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)n\, |a_{n+1}|\, (|x|+|h|)^{n-1}}{n(n-1)\, |a_n|\, (|x|+|h|)^{n-2}} =$$
$$(|x|+|h|) \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n-1} \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|^{-1} = \frac{|x|+|h|}{R} < 1\,.$$

Escolhendo $\delta = \varepsilon/C$, concluímos a demonstração de (4.2.4). Daqui se deduz a derivabilidade de $u(x)$, assim como (4.2.3). $\square$

Na proposição seguinte mostramos que a série que tem por função soma $u'(x)$ tem o mesmo raio de convergência da série de soma $u(x)$.

Proposição 4.2.5. *Seja $u(x)$ a função soma da série de potências $\sum a_n\,(x-a)^n$ e*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, (x-a)^{n-1} = a_1 + 2a_2\,(x-a) + 3a_2\,(x-a)^2 + \cdots + na_n\,(x-a)^{n-1} + \ldots$$

a série que se obtém derivando termo a termo a série $\sum a_n\,(x-a)^n$. Então as séries $\sum a_n\, x^n$ e $\sum n\, a_n\, x^{n-1}$ têm o mesmo raio de convergência R.

Demonstração. Sejam R e R^D os raios de convergência das séries $\sum a_n\,(x-a)^n$ e $\sum n\, a_n\,(x-a)^{n-1}$, respectivamente. Seja, ainda, $a_n^D = n\, a_n$. Temos

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \Rightarrow R^D = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_n^D}{a_{n+1}^D} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{n\, a_n}{(n+1)\, a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = R\,,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \Rightarrow R^D = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n^P|}} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|n\, a_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}\, \limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = R\,.$$

Então, pelo Critério da Razão ou da Raiz, o resultado segue. $\square$

O resultado anterior ainda é válido no intervalo $[a-R,\ a+R]$, desde que a função soma $u(x)$ esteja definida nos pontos $a \pm R$.

Proposição 4.2.6. *Seja $u(x)$ a função soma de uma série de potências $\sum a_n(x-a)^n$ e*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1} = a_0\,(x-a) + \frac{a_1}{2}(x-a)^2 + \frac{a_2}{3}(x-a)^3 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + \ldots$$

a série que se obtém por primitivar, termo a termo e a menos de uma constante aditiva, a série $\sum a_n\,(x-a)^n$. Então:

1. *As séries* $\sum a_n\, x^n$ *e* $\sum \frac{a_n}{n+1}\,(x-a)^{n+1}$ *têm o mesmo raio de convergência R;*

2. *A primitiva de* $u(x)$ *que vale zero em* $x=a$ *é dada por*

$$\int u(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1} \quad \forall\, x \in (a-R,\ a+R)\,.$$

Demonstração. Sejam R e R^P os raios de convergência das séries $\sum a_n\,(x-a)^n$ e $\sum \frac{a_n}{n+1}\,(x-a)^{n+1}$, respectivamente. Seja, ainda, $a_n^P = \frac{a_n}{n+1}$. Para mostrar a primeira afirmação, basta observar que, pelos Critérios da Razão e da Raiz se tem, respectivamente,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{n+1} = 1 \Rightarrow R^P = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n^P}{a_{n+1}^P}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\frac{a_n}{n+1}}{\frac{a_{n+1}}{n+2}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{n+1} = R\,,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1 \Rightarrow R^P = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n^P|}} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{a_n}{n+1}\right|}} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n+1}}{\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = R\,.$$

A segunda afirmação é imediata, já que por definição de primitiva e pela Proposição 4.2.4 se tem

$$u(x) = \left(\int u(x)\,dx\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n \quad \forall\, x \in (a-R,\ a+R)\,.$$

Fica, portanto, demonstrada a proposição. □

Exemplo 4.2.8. *Usando os resultados das duas proposições anteriores, determine as somas das séries seguintes e indique o maior intervalo aberto onde cada igualdade é válida:*

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$; *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)x^n\,.$

4.3 Fórmula de Taylor

Nesta secção vamos desenvolver um método que nos permite calcular os valores das funções elementares como o seno ou a exponencial. Este método tem por base uma aproximação das funções elementares por polinómios com um termo que nos dá o erro e que é facilmente estimado.

Comecemos por recordar que a derivada de uma função f num ponto $x=a$ dá-nos o declive da recta tangente ao gráfico da função nesse ponto. Muito próximo do ponto $x=a$ a função f e a sua recta tangente vão ter valores aproximados. Por uma simples análise geométrica, vemos que a expressão designatória da recta tangente ao gráfico da função no ponto $x=a$ é

$$y = f(a) + f'(a)(x-a).$$

Deste modo, numa vizinhança do ponto $x = a$ onde a função f seja derivável, podemos escrever a igualdade seguinte:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + r_1(x);$$

onde $r_1(x)$ é o erro que se comete na aproximação. Se f for duas vezes derivável no ponto $x = a$, usando a expressão anterior, podemos escrever:

$$f'(x) = f'(a) + f''(a)(x - a) + r(x);$$

onde $r(x)$ é o erro que se comete nesta aproximação. Conjugando as duas expressões anteriores, obtemos

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + r_2(x);$$

onde $r_2(x)$ expressa o erro neste caso. Observe-se que os termos de segunda ordem vêm a dividir por 2, porque se derivarmos esta última expressão temos de obter a anterior. Prosseguindo com este raciocínio, podemos generalizar este resultado na proposição seguinte.

Proposição 4.3.1 (Fórmula de Taylor)**.** *Seja f uma função definida num intervalo aberto $I \subseteq \mathbb{R}$, e n vezes derivável num ponto $a \in I$. Tem-se então, para qualquer $x \in I$,*

$$f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+r_n(x)\,, \tag{4.3.5}$$

onde

$$\lim_{x\longrightarrow a}\frac{r_n(x)}{(x-a)^n} = 0\,. \tag{4.3.6}$$

Demonstração. Definamos o seguinte polinómio de ordem n

$$T_n(x) := f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\,. \tag{4.3.7}$$

Por simples derivação, mostra-se que $T_n(x)$ é o único polinómio de ordem, quanto muito, igual a n tal que

$$T_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \qquad \forall\ k = 0,\ 1, \ldots,\ n\,, \tag{4.3.8}$$

onde $T_n^{(k)}(a)$ denota a derivada de ordem k de $T_n(x)$ no ponto $x = a$. Mostremos que, quando x tende para a, $r_n(x) := f(x) - T_n(x)$ é um infinitésimo quando comparado com $(x-a)^n$, *i.e.* que se verifica (4.3.6). Pelas hipóteses feitas sobre f e tendo em conta (4.3.8), podemos aplicar sucessivamente a Regra de Cauchy e obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow a}\frac{r_n(x)}{(x-a)^n} &= \lim_{x\longrightarrow a}\frac{f(x)-T_n(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\longrightarrow a}\frac{f'(x)-T_n'(x)}{n(x-a)^{n-1}} = \ldots\\ &= \lim_{x\longrightarrow a}\frac{f^{(n)}(x)-T_n^{(n)}(a)}{n!} = \frac{f^{(n)}(a)-f^{(n)}(a)}{n!} = 0\,,\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. □

Observemos que, no caso de $n = 0$, basta que f seja contínua. A fórmula anterior, chama-se fórmula de Taylor[1] de ordem n da função f no ponto $x = a$. A função $r_n(x)$ designa-se por **resto de ordem** n e, de entre as várias expressões possíveis, a talvez mais usada é indicada na proposição a seguir.

[1] Brook Taylor (1685-1731), matemático inglês natural de Londres.

Proposição 4.3.2. *Seja f uma função definida num intervalo aberto $I \subseteq \mathbb{R}$ e $a \in I$. Suponhamos que f e as suas derivadas até à ordem $n+1$ são funções contínuas em I. Então existe um ponto ξ entre a e $x \in I$ tal que o resto da Fórmula de Taylor de ordem n de f em $x = a$ é dado por*

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\,. \tag{4.3.9}$$

Demonstração. Consideremos o polinómio $T_n(x)$ definido na demonstração da proposição anterior em (4.3.7) e definamos

$$g(x) := f(x) - T_n^{(n)}(x) \qquad \text{e} \qquad h(x) := (x-a)^{n+1}\,. \tag{4.3.10}$$

Observemos que $g^{(k)}(a) = 0$ e $h^{(k)}(a) = 0$ para todo $k = 0,\ 1, \ldots, n$, $g^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$ para todo $x \in I$ e $h^{(n+1)}(a) = (n+1)!$. Tendo isto em conta, usando as hipóteses feitas sobre f e aplicando o Teorema de Cauchy, mostramos que existe ξ_1 entre a e x tal que

$$\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{g(x) - g(a)}{h(x) - h(a)} = \frac{g'(\xi_1)}{h'(\xi_1)}\,.$$

Do mesmo modo, existe ξ_2 entre a e ξ_1 tal que

$$\frac{g'(\xi_1)}{h'(\xi_1)} = \frac{g'(\xi_1) - g'(a)}{h'(\xi_1) - h'(a)} = \frac{g''(\xi_2)}{h''(\xi_2)}\,.$$

Prosseguindo este raciocínio, chegamos eventualmente a um ponto $\xi = \xi_{n+1}$ tal que

$$\frac{g(x)}{h(x)} = \cdots = \frac{g^{(n+1)}(\xi)}{h^{(n+1)}(\xi)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,.$$

Multiplicando esta equação por $(x-a)^{n+1}$ e usando as expressões de g e h definidas em (4.3.10), obtemos a Fórmula de Taylor com o resto dado por (4.3.9). □

O resto da fórmula de Taylor expresso em (4.3.9) é conhecido na literatura como Resto de Lagrange e a correspondente fórmula de Taylor, como Fórmula de Taylor-Lagrange. Existem diferentes expressões para o resto da Fórmula de Taylor, mas todas elas satisfazem à condição fundamental (4.3.6) (ver, por exemplo, Santos Guerreiro, pp. 137-140). No caso particular de $f(x)$ ser um polinómio, então o resto $r_n(x) = 0$ se o grau do polinómio for menor ou igual a n.

No caso particular de $a = 0$, a fórmula de Taylor reduz-se a

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + r_n(x)\,, \tag{4.3.11}$$

onde

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{r_n(x)}{x^n} = 0\,. \tag{4.3.12}$$

Neste caso, a fórmula de Taylor recebe o nome de **fórmula de Maclaurin**[2].

[2]Colin Maclaurin (1698-1746), matemático escocês natural de Kilmodan.

Proposição 4.3.3 (Fórmulas Fundamentais)**.** *As funções elementares seguintes admitem as fórmulas de Maclaurin de ordem n indicadas:*

1. $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + r_n(x)$;

2. $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + r_n(x)$;

3. $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + r_n(x)$;

4. $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \end{pmatrix} x^2 + \cdots + \begin{pmatrix} \alpha \\ n \end{pmatrix} x^n + r_n(x), \quad \alpha \in \mathbb{R}$;

5. $\operatorname{sen}(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + \operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)\dfrac{x^n}{n!} + r_n(x)$;

6. $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + \cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)\dfrac{x^n}{n!} + r_n(x)$.

Demonstração. 1. Se $f(x) = \frac{1}{1-x}$, determinando as sucessivas derivadas, temos

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{(1-x)^2} \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 1\,, \\
f''(x) &= \frac{2}{(1-x)^3} \quad \Rightarrow \quad f''(0) = 2\,, \\
f'''(x) &= \frac{2\times 3}{(1-x)^4} \quad \Rightarrow \quad f'''(0) = 2\times 3\,, \\
&\cdots \\
f^{(n)}(x) &= \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \quad \Rightarrow \quad f^{(n)}(0) = n!, \quad n \geq 0\,.
\end{aligned}
$$

Então, substituindo na fórmula de Maclaurin (4.3.11), obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} =& 1 + x + \frac{2}{2}x^2 + \frac{3!}{3!}x^3 + \cdots + \frac{n!}{n!}x^n + r_n(x) \\
=& 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + r_n(x)\,.
\end{aligned}
$$

2. Para $f(x) = e^x$, temos $f^{(n)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(0) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Substituindo em (4.3.11), o obtemos a fórmula de Maclaurin respectiva.

3. Se $f(x) = \ln(1+x)$, temos

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1+x} \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 1\,,\\
f''(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} \quad \Rightarrow \quad f''(0) = -1\,,\\
f'''(x) &= \frac{2}{(1+x)^3} \quad \Rightarrow \quad f'''(0) = 2\,,\\
f''''(x) &= -\frac{2\times 3}{(1+x)^4} \quad \Rightarrow \quad f^{(iv)}(0) = -2\times 3\,,\\
&\dots\\
f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \quad \Rightarrow \quad f^{(n)}(0) = (-1)^n(n-1)!, \quad n \geq 1\,.
\end{aligned}
$$

Substituindo em (4.3.11), tem-se

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} =& 0 + 1\times x + \frac{-1}{2}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{-3!}{4!}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^n(n-1)!}{n!}x^n + r_n(x)\\
=& x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n\frac{x^n}{n} + r_n(x)\,.
\end{aligned}
$$

4. No caso de $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f(x) = (1+x)^\alpha$, tem-se

$$
\begin{aligned}
& f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \quad \Rightarrow \quad f'(0) = \alpha\,,\\
& f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \quad \Rightarrow \quad f''(0) = \alpha(\alpha-1)\,,\\
& f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3} \quad \Rightarrow \quad f'''(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\,,\\
& \dots\\
& f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots[\alpha-(n-1)](1+x)^{\alpha-n}\\
& \qquad\qquad \Rightarrow \quad f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots[\alpha-(n-1)], \quad n \geq 1\,.
\end{aligned}
$$

Substituindo em (4.3.11) e usando a escrita abreviada sugerida pela identidade

$$
\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots[\alpha-(k-1)] = \frac{\alpha!}{(\alpha-k)!} = k!\begin{pmatrix}\alpha\\ k\end{pmatrix} \quad (\text{quando } \alpha,\ k \in \mathbb{N})\,,
$$

obtemos

$$
\begin{aligned}
(1+x)^\alpha =& 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots\\
&+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots[\alpha-(n-1)]}{n!}x^n + r_n(x)\\
=& 1 + \alpha x + \begin{pmatrix}\alpha\\ 2\end{pmatrix}x^2 + \begin{pmatrix}\alpha\\ 3\end{pmatrix}x^3 + \cdots + \begin{pmatrix}\alpha\\ n\end{pmatrix}x^n + r_n(x)\,.
\end{aligned}
$$

5. Seja, agora, $f(x) = \operatorname{sen}(x)$. Temos

$$\begin{aligned}
&f'(x) = \cos(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 1\,,\\
&f''(x) = -\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{2\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad f''(x) = 0\,,\\
&f'''(x) = -\cos(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad f'''(0) = -1\,,\\
&f^{(iv)}(x) = \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{4\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad f^{(iv)}(0) = 0\,,\\
&f^{(v)}(x) = \cos(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{5\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad f^{(v)}(0) = 1\,,\\
&\quad\dots\\
&f^{(n)}(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } n \text{ par} \\ \pm 1 & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}\,, \quad n \geq 0\,.
\end{aligned}$$

Substituindo em (4.3.11), temos

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(x) =& 0 + 1 \times x + \frac{0}{2}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n!}x^n + r_n(x)\\
=& x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\frac{x^n}{n!} + r_n(x)\,.
\end{aligned}$$

6. Finalmente, no caso de $f(x) = \cos(x)$, tem-se

$$\begin{aligned}
&f'(x) = -\operatorname{sen}(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 0\,,\\
&f''(x) = -\cos(x) = \cos\left(x + \frac{2\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad f''(x) = -1\,,\\
&f'''(x) = \operatorname{sen}(x) = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad f'''(0) = 0\,,\\
&f^{(iv)}(x) = \cos(x) = \cos\left(x + \frac{4\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad f^{(iv)}(0) = 1\,,\\
&f^{(v)}(x) = -\operatorname{sen}(x) = \cos\left(x + \frac{5\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad f^{(v)}(0) = 0\,,\\
&\quad\dots\\
&f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } n \text{ ímpar} \\ \pm 1 & \text{se } n \text{ par} \end{cases}\,, \quad n \geq 0\,.
\end{aligned}$$

Substituindo em (4.3.11), temos

$$\begin{aligned}
\cos(x) =& 1 + 0 \times x + \frac{-1}{2}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{0}{5!}x^5 + \cdots + \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n!}x^n + r_n(x)\\
=& 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\frac{x^n}{n!} + r_n(x)\,,
\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. □

Exemplo 4.3.1. *Determine as fórmulas de Taylor de ordem n das funções seguintes em torno dos pontos indicados:*

a) $f(x) = \operatorname{arctg}(x)\,,\quad x = 0$; *b)* $g(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5\,,\quad x = 2$.

As funções cujas fórmulas de Taylor, em torno de determinado ponto, têm restos cada vez mais pequenos à medida que a ordem n aumenta, dizem-se analíticas e serão estudadas na secção seguinte.

4.4 Série de Taylor

Comecemos por observar que quando uma série de potências $\sum a_n\,(x-a)^n$, com $a \in \mathbb{R}$, converge, então a série pode ser representada, no intervalo de convergência $(a-R,\ a+R)$, pela sua função soma, digamos $u(x)$. Assim, podemos dizer que a série de potências $\sum a_n\,(x-a)^n$ define a função $u(x)$ cujo valor, em cada ponto x do seu intervalo de convergência, é dado por

$$u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,(x-a)^n\,.$$

A série $\sum a_n\,(x-a)^n$ é, assim, designada por **expansão em série de potências** da função u em torno do ponto $x = a$.

Existem dois problemas fundamentais que se levantam sobre a expansão em série de potências:

1. O primeiro tem a ver com as propriedades da função soma de uma dada série de potências;

2. No segundo problema, pretendemos saber em que condições é possível ou não representar uma dada função por uma série de potências.

O primeiro problema já foi analisado na secção anterior com o estudo das propriedades principais das séries de potências. Para respondermos ao segundo problema, e que é o mais interessante do ponto de vista das aplicações, convém recordar a noção de Fórmula de Taylor de ordem n em torno de um ponto $x = a$. Na definição seguinte, vamos estender esta noção para qualquer ordem e, assim, escrever uma fórmula com infinitas parcelas.

Definição 4.4.1 (Série de Taylor)**.** *Sejam $u(x)$ uma função indefinidamente derivável num intervalo aberto $I \subseteq \mathbb{R}$ e $a \in I$. Designa-se por série de Taylor de $u(x)$ no ponto $x = a$ à série de potências seguinte:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = u(a) + u'(a)(x-a) + \frac{u''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{u^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots\,.$$

No caso de $a = 0$, a série anterior recebe o nome de **série de Maclaurin**.

A questão que se coloca agora, é a de saber se a série de Taylor $\sum \frac{u^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ converge no ponto $x = a$ e se, em algum intervalo I contendo a, tem soma igual a $u(x)$.

Definição 4.4.2 (Função analítica)**.** *Seja $u(x)$ uma função definida num intervalo aberto $I \subseteq \mathbb{R}$ e $a \in I$. Diz-se que $u(x)$ é uma função analítica no ponto $x = a$, se existe uma série de potências $\sum u_n\,(x-a)^n$ tal que, para qualquer x pertencendo a um subintervalo de I contendo a, se tem*

$$u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n\,.$$

A proposição seguinte dá-nos um critério geral de desenvolvimento de uma função em série de Taylor.

Proposição 4.4.1. *Seja $u(x)$ uma função definida num intervalo aberto $I \subseteq \mathbb{R}$ e indefinidamente derivável em I, e seja $a \in I$. Tem-se*

$$u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad \forall\, x \in (a-\varepsilon,\ a+\varepsilon) \subseteq I, \quad \varepsilon > 0 \tag{4.4.13}$$

se e só se

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} r_n(x-a) = 0\,. \tag{4.4.14}$$

Demonstração. Consideremos a sucessão $S_n(x)$ das somas parciais de ordem n da série de Taylor $\sum \frac{u^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$:

$$S_n(x) = u(a) + u'(a)(x-a) + \frac{u''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{u'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{u^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\,.$$

Usando a fórmula de Taylor de ordem n da função $u(x)$ no ponto $x = a$, podemos escrever

$$u(x) = S_n(x) + r_n(x-a)\,, \quad \text{onde } \lim_{x\longrightarrow a} \frac{r_n(x-a)}{(x-a)^n} = 0\,.$$

Fazendo $n \to +\infty$, temos

$$u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \lim_{n\longrightarrow+\infty} r_n(x-a) = 0\,.$$

Assim, a igualdade (4.4.13) acontece se e só se o limite do segundo membro na equação anterior for zero, ou seja se e só (4.4.14) se verificar. □

Convém notar que o limite de $r_n(x-a)$ é tomado quando n tende para $+\infty$ e não quando x tende para a, o qual é sempre 0 para todo n. Pelo exposto acima, pode acontecer que, por um lado, determinada função seja a soma de uma série de potências e, por outro, admita um desenvolvimento em série de Taylor. Neste caso, a proposição seguinte diz-nos que a série obtida, num caso ou no outro, é a mesma.

Proposição 4.4.2. *Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$. Se $u(x)$ é a soma de uma série de potências $\sum a_n\,(x-a)^n$ num intervalo $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$, então esta série é a série de Taylor de $u(x)$ em torno do ponto $x = a$, isto é,*

$$a_0 = u(a)\,, \quad a_1 = u'(a)\,, \quad a_2 = \frac{u''(a)}{2}\,, \quad \ldots\,, \quad a_n = \frac{u^{(n)}(a)}{n!}, \quad \ldots\,.$$

Demonstração. Suponhamos que num intervalo $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$, com $\varepsilon > 0$, se tem

$$u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,(x-a)^n = a_0 + a_1\,(x-a) + a_2\,(x-a)^2 + \cdots + a_n\,(x-a)^n + \ldots. \tag{4.4.15}$$

Daqui sai imediatamente que $u(a) = a_0$. Derivando (4.4.15), temos

$$u'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n\,(x-a)^{n-1} = a_1 + 2a_2\,(x-a) + 3a_3\,(x-a)^2 + \cdots + n a_n\,(x-a)^{n-1} + \ldots\,, \tag{4.4.16}$$

pelo que $u'(a) = a_1$. Derivando agora (4.4.16), temos

$$u''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n\,(x-a)^{n-2} = 2a_2 + 3\times 2a_3\,(x-a) + \cdots + n\times(n-1)a_n\,x^{n-2} + \ldots$$

e $u''(a) = 2a_2$. Prosseguindo este raciocínio, conseguimos mostrar que $u^{(n)}(a) = n!\,a_n$. $\square$

Concluímos esta secção com alguns desenvolvimentos fundamentais em série de Taylor.

Proposição 4.4.3 (Desenvolvimentos Fundamentais)**.** *As funções seguintes admitem os desenvolvimentos em série de Maclaurin indicados nos intervalos respectivos:*

1. $\displaystyle \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \ldots\,, \quad |x| < 1;$

2. $\displaystyle e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \ldots\,, \quad |x| < +\infty;$

3. $\displaystyle \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots\,, \quad |x| < 1;$

4. $\displaystyle (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n + \ldots\,, \quad |x| < 1;$

5. $\displaystyle \operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\,, \ |x| < +\infty;$

6. $\displaystyle \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots\,, \quad |x| < +\infty.$

Demonstração. Pela Proposição 6.3.3, as fórmulas de Maclaurin de ordem n seguintes são válidas

1. $\displaystyle \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + r_n(x);$

2. $\quad e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + r_n(x);$

3. $\quad \ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + r_n(x);$

4. $\quad (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \end{pmatrix} x^2 + \cdots + \begin{pmatrix} \alpha \\ n \end{pmatrix} x^n + r_n(x), \quad \alpha \in \mathbb{R};$

5. $\quad \operatorname{sen}(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + \operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)\dfrac{x^n}{n!} + r_n(x);$

6. $\quad \cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + \cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)\dfrac{x^n}{n!} + r_n(x);$

onde, em cada um dos casos, se tem

$$\lim_{x\to 0} \frac{r_n(x)}{x^n} = 0\,.$$

Daqui resulta que os desenvolvimentos em série de Taylor 1.-6. são válidos, se conseguirmos mostrar que, em cada caso,

$$\lim_{n\to+\infty} r_n(x) = 0$$

nos domínios de x considerados. Comecemos por mostrar que as séries de Taylor indicadas são convergentes nos domínios correspondentes. Designando por a_n a parte numérica em cada uma das séries, temos:

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \;\Rightarrow\; R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 1;$

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \;\Rightarrow\; R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}}\right| = \lim_{n\to+\infty}(n+1) = +\infty;$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \;\Rightarrow\; R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n-1}}{n}}{\frac{(-1)^n}{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n} = 1;$

4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} \alpha \\ n \end{pmatrix} x^n \;\Rightarrow\; R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots[\alpha-(n-1)]}{n!}}{\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n)}{(n+1)!}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{|\alpha-n|} = 1;$

5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \;\Rightarrow\; R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}}{\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!}}\right| = \lim_{n\to+\infty}(2n+3)(2n+2) = +\infty;$

6. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} \;\Rightarrow\; R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^n}{(2n)!}}{\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!}}\right| = \lim_{n\to+\infty}(2n+2)(2n+1) = +\infty.$

Mostremos, então, que $\lim_{n\to+\infty} r_n(x) = 0$ nos domínios de x considerados em cada caso. Para mostrarmos isto, vamos considerar a expressão para o resto $r_n(x)$ dado pela fórmula de Lagrange considerado na Proposição 6.6.2, isto é

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

onde $f^{(n+1)}(\xi)$ denota a derivada de ordem $n+1$ de cada uma das funções dadas em 1.-6., e ξ é um ponto entre 0 e x. Usando os cálculos desenvolvidos para a obtenção das fórmulas de Taylor, temos o seguinte, quando $n \longrightarrow +\infty$:

1. $f(x) = \dfrac{1}{1-x} \ \Rightarrow \ r_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} = \dfrac{\frac{(n+1)!}{(1-\xi)^{n+2}}}{(n+1)!}x^{n+1} = \dfrac{x^{n+1}}{(1-\xi)^{n+2}} \longrightarrow 0;$

2. $f(x) = e^x \ \Rightarrow \ r_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} = \dfrac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1} \longrightarrow 0;$

3. $f(x) = \ln(1+x) \ \Rightarrow \ r_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} = \dfrac{(-1)^n \frac{n!}{(1+\xi)^{n+1}}}{(n+1)!}x^{n+1}$
$= \dfrac{(-1)^n}{n+1}\left(\dfrac{x}{1+\xi}\right)^{n+1} \longrightarrow 0;$

4. $f(x) = (1+x)^\alpha \ \Rightarrow \ r_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$
$= \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n)(1+\xi)^{\alpha-(n+1)}x^{n+1}}{(n+1)!}$
$= \dfrac{\alpha!}{[\alpha-(n+1)]!(n+1)!}(1+\xi)^\alpha\left(\dfrac{x}{1+\xi}\right)^{n+1} \longrightarrow 0;$

5. $f(x) = \operatorname{sen}(x) \ \Rightarrow \ r_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} = \dfrac{\operatorname{sen}\left(\xi + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)}{(n+1)!}x^{n+1} \longrightarrow 0;$

6. $f(x) = \cos(x) \ \Rightarrow \ r_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} = \dfrac{\cos\left(\xi + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)}{(n+1)!}x^{n+1} \longrightarrow 0.$

Convém frisar que as passagens ao limite, consideradas nos pontos acima onde intervêm fracções com x e ξ, necessitam de uma análise cuidadosa para mostrar que efectivamente se têm esses limites com x no intervalo de convergência da série. Assim, fica demonstrado que as séries de potências consideradas convergem para as funções indicadas nos domínios correspondentes. $\square$

Observemos que, no caso da alínea (iv), $\alpha \in \mathbb{R}$ e se α é um natural, então a série referida tem apenas um número finito de parcelas.

Exemplo 4.4.1. *Determine as séries de Taylor de ordem n das funções seguintes em torno dos pontos indicados e indique o maior intervalo aberto onde o desenvolvimento é válido:*

a) $f(x) = \operatorname{arctg}(x)\,, \quad x = 0;$ *b)* $g(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5\,, \quad x = 2.$

4.5 Ficha de exercícios nº 4

1. Estude a natureza das séries de potências seguintes e indique, no caso de serem não vazios, os subconjuntos de $\mathbb{R}$ onde são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes e divergentes:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n2^n}\,;$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}\,;$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n!\,x^n\,;$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-2)^n \frac{n+2}{n+1} x^n\,;$ e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{2^{n-1}}\,;$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 3^{n^2} x^{n^2}\,;$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{[2+(-1)^n]^{n+1}}{n+1}(x-2)^{2n}\,;$ h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n[(3n)!]^2}{(6n)!}\left(x - \frac{4}{\pi}\right)^n\,;$ i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4nx^2 + x^4}{9n + x^2}\right)^n .$

2. Usando os resultados sobre derivação e primitivação de séries de potências, determine as funções soma das séries seguintes e indique o maior intervalo aberto onde o desenvolvimento é válido:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}\,;$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}\,;$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2}\,;$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)x^{n-1}\,.$

3. Determine as fórmulas de Maclaurin de ordem n das funções seguintes:

a) $f(x) = e^{2x-1}\,;$ b) $g(x) = \sqrt{1+x}\,;$ c) $h(x) = \ln(2+x)\,;$

d) $i(x) = \dfrac{1-x}{e^x}\,;$ e) $j(x) = \operatorname{senh}(x)\,;$ f) $k(x) = (1+x)\ln(1+x)\,.$

4. Determine as fórmulas de Taylor de ordem n das funções seguintes em torno dos pontos indicados:

a) $f(x) = 5x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 4x - 1\,, \quad x = 2\,;$ b) $g(x) = x\ln(x)\,, \quad x = 1\,;$

c) $h(x) = \cosh(2x-1)\,, \quad x = \dfrac{1}{2}\,;$ d) $i(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x^2}\,, \quad x = 1\,.$

5. Usando os desenvolvimentos fundamentais, represente por uma série de Mac-Laurin as funções seguintes, indicando o maior intervalo aberto onde cada desenvolvimento é válido:

a) $\dfrac{1}{2-x}$; b) $\dfrac{1}{(1+x)^2}$; c) $\sqrt{1-2x}$;

d) $\dfrac{x}{1+x-2x^2}$; e) $\operatorname{senh}(x)$; f) 2^x;

g) $\operatorname{sen}^2(x)$; h) $\ln(1+2x)$; i) $\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$;

j) $x\cos x+\ln(x+1)$; k) $\dfrac{x+3}{2-x}$; l) $\operatorname{sen}(x)\cos(x)$.

6. Usando os desenvolvimentos fundamentais, represente por uma série de Mac-Laurin as funções seguintes, indique o maior intervalo aberto onde cada desenvolvimento é válido e mostre que os limites notáveis indicados são válidos:

a) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$, $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}=1$;

b) $\dfrac{e^x-1}{x}$, $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$;

c) $\dfrac{\ln(x+1)}{x}$, $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=1$ e $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x=e^a \quad \forall\, a\in\mathbb{R}$.

7. Represente as funções seguintes por uma série de potências indicadas a seguir (série de Taylor) e indique o maior intervalo aberto onde o desenvolvimento é válido:

a) $\dfrac{1}{x}$, $x-1$; b) $\ln x$, $x-1$; c) e^x, $x+2$;

d) $\cos^2 x$, $x-\dfrac{\pi}{2}$; e) $\sqrt{x}$, $x-4$; f) x^3-2x^2-5x-2, $x+4$;

g) $x\ln(x)$, $x-1$; h) $\dfrac{(x-1)^2}{x^2}$, $x-1$; i) $\cosh(2x-1)$, $x-\dfrac{1}{2}$.

8. Usando os desenvolvimentos fundamentais, determine a função soma das séries seguintes e indique o maior intervalo aberto onde o desenvolvimento é válido:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}$; b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n x^n}{n}$; c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{3n}}{n!}$;

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{-n}}{(2n+1)!}$; e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}n!}$; f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{3^{2n}(2n)!}$;

g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(x-1)^n}{(n+2)!}$; h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+1)x+(-1)^n n!}{(n+1)!}x^n$; i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left[1+(-1)^n 2^{n+1}\right]x^n$.

9. Usando os desenvolvimentos fundamentais e eventualmente derivação e primitivação, obtenha os desenvolvimentos em série de potências de x das funções seguintes, indicando o maior intervalo aberto onde o desenvolvimento é válido:

a) $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$; b) $g(x) = \operatorname{arcsen}(x)$; c) $h(x) = x^2 \arccos(x)$;

d) $i(x) = 1 + \ln(x-1)$; e) $j(x) = \dfrac{1}{(2-x)^2}$; f) $i(x) = \dfrac{1}{(1-2x)\sqrt{1-2x}}$.

10. Usando os desenvolvimentos em série de potências das funções integrandas, calcule um valor aproximado às centésimas dos integrais seguintes:

a) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt[3]{x}\, \cos(x)\, dx$; b) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{9}} \sqrt{x}\, e^x\, dx$; c) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt[4]{1+x^3}\, dx$;

d) $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\, dx$; e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\, dx$; f) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+x)}{x}\, dx$.

Capítulo 5

Integrais Duplos

Neste capítulo, vamos estender a noção de integral para funções escalares de duas variáveis. As regiões de integração vão, agora, ser subconjuntos de $\mathbb{R}^2$. Primeiro, consideramos regiões de integração rectangulares e depois consideramos regiões mais gerais com fronteiras curvilíneas.

5.1 Integral de Riemann

Comecemos por estender a noção de partição de um intervalo limitado de $\mathbb{R}$ a um rectângulo (limitado) contido em $\mathbb{R}^2$. Para isso, recordemos que uma **partição de um intervalo** $[a, b] \subset \mathbb{R}$ é um conjunto finito de pontos, digamos x_0, x_1, ..., x_n, que divide o intervalo $[a, b]$ em subintervalos tais que

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

onde n é um número natural arbitrário. O comprimento do i-ésimo intervalo é

$$\triangle x_i = x_i - x_{i-1}.$$

A localização dos pontos x_0, x_1, ..., x_n, e a consequente divisão do intervalo $[a, b]$, é arbitrária. Em particular, os subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ não têm necessariamente o mesmo comprimento. A partição, desta forma definida, vai ser denotada por P e escreve-se do modo seguinte:

$$P : a = x_0 < x_1 < \ldots x_{n-1} < x_n = b.$$

Definição 5.1.1. *Sejam a, b, c e d números reais tais que $a < b$ e $c < d$. Consideremos o rectângulo*

$$R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d\right\}$$

e as partições dos intervalos $[a, b]$ e $[c, d]$, definidas, respectivamente, por

$$P_1 : a = x_0 < x_1 < \ldots x_{n-1} < x_n = b \qquad e \qquad P_2 : c = y_0 < x_1 < \ldots y_{m-1} < x_m = b,$$

*onde n e m são números naturais arbitrários. Designa-se por **partição do rectângulo** R ao conjunto seguinte*

$$P = \{(x_i, y_j) \in R : 0 \leq i \leq n, \quad 0 \leq j \leq m\}.$$

Uma partição P do rectângulo R tal como acima definimos, determina mn subrectângulos de R:

$$R_{ij} = \left\{(x_i, y_j) \in \mathbb{R}^2 : x_{i-1} \leq x \leq x_i, \quad y_{i-1} \leq y \leq y_i\right\},$$

cujas áreas são dadas por

$$\triangle x_i \, \triangle y_j = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}).$$

A colecção destes subrectângulos R_{ij}, é o que verdadeiramente constitui a partição P.

Definição 5.1.2. *Seja f uma função definida num rectângulo $R \subset \mathbb{R}^2$. Designamos por **soma de Riemann** da função f no rectângulo R à quantidade seguinte:*

$$\sum_{i=0,\ j=0}^{n,\ m} f(x_{ij}^*)\triangle x_i \, \triangle y_j \equiv \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} f(x_{ij}^*)\triangle x_i \, \triangle y_j \equiv f(x_{11}^*)\triangle x_1 \, \triangle y_1 + \cdots f(x_{nm}^*)\triangle x_n \, \triangle y_m;$$

onde x_{ij}^* são pontos seleccionados aleatoriamente nos subrectângulos R_{ij} respectivos.

Para a noção de integral duplo, interessa-nos que as partições sejam muito finas. Definimos a quantidade que define a finura de dada partição P de um rectângulo $R \subset \mathbb{R}^2$ por

$$|P| = \max_{i,\ j} \sqrt{(\triangle x_i)^2 + (\triangle y_j)^2}.$$

Observemos que $|P|$ é o comprimento da maior diagonal de todos os subrectângulos R_{ij} considerados na partição P.

Definição 5.1.3. *Sejam f uma função definida num rectângulo $R \subset \mathbb{R}^2$ e*

$$P = \{(x_i, y_j) \in R : 0 \leq i \leq n, \quad 0 \leq j \leq m\}$$

*uma partição arbitrária de R. Diz-se que a **função f é integrável** (à Riemann) no rectângulo R, se existir (e for finito)o limite seguinte:*

$$\lim_{|P| \to 0} \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} f(x_{ij}^*)\triangle x_i \, \triangle y_j,$$

independentemente de como a partição P do rectângulo R é formada, ou de como os pontos x_{ij}^* pertencentes aos subrectângulos R_{ij} são escolhidos.

No caso de existir, o limite da definição anterior designa-se por **integral da função f** e denota-se por

$$\int \int_R f(x,y)\, dx\, dy \qquad \text{ou} \qquad \int \int_R f(x,y)\, dy\, dx,$$

onde $dx\, dy$, ou $dy\, dx$, indica um elemento de área ao qual ainda não está subjacente nenhuma ordem de integração.

A noção de função integrável que acabamos de introduzir, extende-se a qualquer função definida num conjunto limitado $D \subset \mathbb{R}^2$ que não seja propriamente um rectângulo. Apenas temos de considerar um rectângulo R que contenha D e aí fazer a análise anterior. O único cuidado a tomar para a definição fazer sentido, é fixar o valor de $f(x_{ij}^*)$ igual a zero quando x_{ij}^* não pertencer a D.

Proposição 5.1.1. *Seja D um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ limitado e cuja fronteira é constituída pela união de curvas (contínuas). Consideremos uma função f definida em D. Se f é contínua em D excepto, quanto muito, num conjunto de medida nula*[1]*, então f é integrável em D.*

Demonstração. Ver, por exemplo, Dias Agudo, Volume I, p. 236. □

A proposição anterior diz-nos basicamente que todas as funções elementares que conhecemos serão integráveis em domínios limitados.

As propriedades do análogo integral definido em $\mathbb{R}$, serão válidas *mutatis mutandis* para o integral duplo. Em particular, o integral duplo é um operador linear e satisfaz a propriedade aditiva dos integrais.

5.2 Integral repetido

Em integração de funções reais de uma variável real apenas, o denominado Teorema Fundamental do Cálculo Integral dá-nos um modo muito prático de calcular integrais. A proposição seguinte vai-nos permitir calcular alguns integrais duplos usando integrações repetidas de funções reais de uma variável real.

Proposição 5.2.1 (Fubini). *Seja f uma função integrável num rectângulo*

$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\right\}, \qquad \textit{onde} \quad a < b \quad \textit{e} \quad c < d.$$

Suponhamos que $\int_a^b f(x,y)\,dx$ existe para qualquer $y \in [c,d]$, e que $\int_c^d f(x,y)\,dy$ existe para qualquer $x \in [a,b]$. Então

$$\int\int_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx.$$

Demonstração. Ver, por exemplo, Dias Agudo, Volume I, p. 247. □

Os integrais expressos no segundo membro da equação dada na proposição anterior designam-se por **integrais repetidos ou iterados**. Observe-se que por aplicação do Teorema Fundamental ao cálculo dos integrais entre parêntesis rectos acima referidos, se primitiva a função f em relação à variável aí referida, fixando a outra variável como se fosse constante.

Exemplo 5.2.1. *Esboce a região de integração e calcule o integral respectivo:*

$$\int_0^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(2x - 3y)\,dx\,dy.$$

A Proposição 5.2.1 pode ser generalizada a qualquer domínio limitado $D \subset \mathbb{R}^2$. Isto é, o cálculo de um integral duplo num domínio limitado, resume-se ao cálculo de integrais repetidos.

[1]Um subconjunto E de $\mathbb{R}^2$ diz-se de medida nula, se existir uma quantidade finita de rectângulos cuja união contém E e de tal modo que a soma das áreas é tão pequena quanto se queira.

Proposição 5.2.2. *1. Sejam g e h duas funções reais de uma variável real, contínuas num intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, com $a < b$, e tais que, para cada $a \leq x \leq b$, $g(x) \leq h(x)$. Consideremos uma função f contínua no domínio*

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ g(x) \leq y \leq h(x)\right\}.$$

Então

$$\int\int_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left[\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)\, dy\right] dx.$$

2. Sejam i e j duas funções reais de uma variável real, contínuas num intervalo $[c, d] \subset \mathbb{R}$, com $c < d$, e tais que, para cada $c \leq y \leq d$, $i(y) \leq j(y)$. Consideremos uma função f contínua no domínio

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d,\ i(y) \leq x \leq j(y)\right\}.$$

Então

$$\int\int_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left[\int_{i(y)}^{j(y)} f(x, y)\, dx\right] dy.$$

Demonstração. É uma consequência da Proposição 5.2.1. □

Exemplo 5.2.2. *Esboce as regiões de integração e calcule os integrais respectivos:*

$$\text{a)}\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\operatorname{sen}(y)} e^x \cos(y)\, dx\, dy \qquad e \qquad \text{b)}\ \int_0^1 \int_{1-x}^{1-x^2} x^2\, dy\, dx.$$

Na maioria das situações, podemos integrar tanto primeiro em ralação a uma variável, digamos x, e em seguida relativamente à outra, y, como pela ordem inversa. No entanto, em qualquer exercício prático, uma das alternativas anterior é mais fácil de calcular do que a outra. Mas, existem situações em que, por diversas razões, é manifestamente impossível calcular o integral primeiro relativamente a uma das variáveis, sendo a mais comum a impossibilidade de determinar a primitiva da função dada em relação a essa variável. Nestes casos, somos obrigados a calcular o integral como um integral repetido, mas com uma única ordem de integração possível. No caso dos limites de integração serem constantes, então pela Proposição 5.2.1, podemos inverter a ordem de integração da forma que nos for mais conveniente. Contudo, se os limites de integração não são constantes, a inversão da ordem de integração vai afectar também as funções que limitam a região de integração. Na prática, ao inverter a ordem de integração destes integrais, vamos considerar as inversas das funções que limitam o domínio, fazendo depois a devida mudança de variável.

Exemplo 5.2.3. *Inverta a ordem de integração do integral duplo seguinte, onde $f(x, y)$ é uma função arbitrária integrável no domínio indicado:*

$$\int_{e^{-2}}^1 \int_{\ln y}^{-\frac{1}{2}\ln y} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Exemplo 5.2.4. *Comece por verificar que, usando os métodos de primitivação conhecidos, é impossível calcular o integral seguinte pela ordem de integração que está escrito. Inverta a ordem de integração e calcule o seu valor:*

$$\int_0^3 \int_{x^2}^9 x^3 e^{y^3}\, dy\, dx\,.$$

5.3 Mudança de variáveis

Em muitos exercícios práticos, e quando é possível, a simples inversão de ordem de integração não simplifica muito o cálculo do integral duplo. Tal como acontece em integração de funções reais de uma só variável real, também aqui podemos fazer uma transformação do integral duplo, de modo ao seu cálculo ser mais simples. Esta transformação corresponde a uma mudança de variáveis. Neste caso, não só a expressão designatória da função integranda vem alterada, assim como a própria região de integração passa a ser diferente.

Proposição 5.3.1 (Mudança de variáveis)**.** *Sejam D e Ω dois subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^2$ limitados por funções diferenciáveis e seja*

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \Omega & \longrightarrow & D \\ & (u,v) & \mapsto & (x,y)=\varphi(u,v)\equiv(\varphi_1(u,v),\varphi_2(u,v)) \end{array}$$

uma função bijectiva com derivadas parciais contínuas. Então, se $f(x,y)$ é uma função integrável em D, temos,

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\int_{\varphi^{-1}(D)} f(\varphi(u,v))\,|J|\,du\,dv\,,$$

onde

$$J=\det\left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right]\equiv\det\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\[2mm] \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{bmatrix}.$$

Demonstração. Ver, por exemplo, Dias Agudo, Volume I, p. 258 □

Observe-se que, por φ ser bijectiva, $\varphi^{-1}(D)=\Omega$. A quantidade J expressa na proposição anterior designa-se por **jacobiano** da mudança de variáveis (x,y) para (u,v) e a matriz $\left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right]$ é a denominada **matriz jacobiana** dessa transformação. Esta matriz poderá, ainda, ser escrita da forma seguinte:

$$\left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right]\equiv\begin{bmatrix}\frac{\partial\varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial v}\\[2mm] \frac{\partial\varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial v}\end{bmatrix}.$$

Exemplo 5.3.1. *Fazendo a mudança de variáveis $u=x-y$ e $v=x+y$, calcule o integral seguinte:*

$$\int\int_D \frac{\cos(x-y)}{\operatorname{sen}(x+y)}\,dx\,dy\,,$$

onde $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 1\le x+y\le 2,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0\}$.

No integral duplo, o exemplo de mudança de variáveis com mais interesse prático é a **transformação para coordenadas polares**. Recordemos o que são as coordenadas polares de um ponto no plano. Seja P um ponto em $\mathbb{R}^2$ (plano) cujas coordenadas rectangulares num sistema de eixos cartesiano são dadas por (x,y). Fixemos o triângulo rectângulo de vértices $(0,0)$, $(x,0)$ e $P=(x,y)$. Designemos a hipotenusa deste rectângulo por r e seja θ o ângulo formado entre o semi-eixo positivo dos xx e a semi-recta com origem no ponto de coordenadas $(0,0)$ e que passa por $P=(x,y)$. Da trigonometria elementar, temos o seguinte:

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{r} \\[2ex] \operatorname{sen}(\theta) = \dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{y}{r} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\operatorname{sen}(\theta)\,. \end{cases} \tag{5.3.1}$$

Deste modo, podemos definir o ponto P num sistema de eixos cartesiano à custa das variáveis (r,θ), as quais se designam por **coordenadas polares** do ponto P. De facto, para qualquer ponto $P=(x,y)$ do plano, existem $r\geq 0$ e $\theta\in[0,2\pi]$ tais que $P=(r\cos(\theta), r\operatorname{sen}(\theta))$.

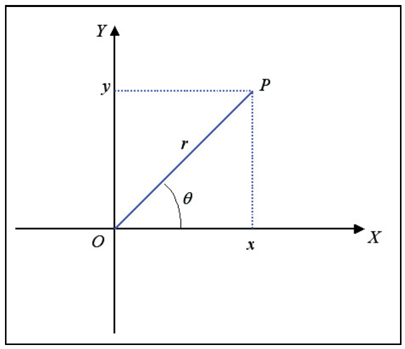


Figura 5.1: Coordenadas polares.

A mudança de variáveis para coordenadas polares é particularmente importante quando a região de integração, vista em termos das coordenadas polares, tem fronteiras ao longo das quais r ou θ é constante.

Proposição 5.3.2. *O módulo do jacobiano da mudança de variáveis para coordenadas polares, conforme (5.3.1), é* $|J| = r$.

Demonstração. Fazendo, então $x=r\cos(\theta)$ e $y=r\operatorname{sen}(\theta)$, temos

$$\left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\[2ex] \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -r\operatorname{sen}(\theta) \\[2ex] \operatorname{sen}(\theta) & r\cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Logo

$$|J| = \left|\det\left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right]\right| = \left|r\cos^2(\theta) + r\operatorname{sen}^2(\theta)\right| = r\,,$$

o que conclui a demonstração. □

Exemplo 5.3.2. *Fazendo a mudança de variáveis para coordenadas polares, calcule o integral seguinte:*

$$\int\int_D e^{x^2+y^2}\,dx\,dy, \qquad onde \quad D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1\right\}.$$

5.4 Aplicações

Nesta secção vamos restringir-nos às aplicações geométricas, alertando apenas o leitor de existirem muitas outras aplicações, como o cálculo do centro de massa de um objecto, bem como o cálculo dos seus momentos de inércia.

Definição 5.4.1. *Seja D um domínio limitado de $\mathbb{R}^2$. A* ***área do domínio*** *D é determinada através do integral duplo, calculado sobre o domínio D, da função identicamente igual a 1. Ou seja,*

$$\textit{Área}(D) = \int\int_D dx\,dy.$$

Exemplo 5.4.1. *Usando integrais duplos, calcule a área do domínio D seguinte:*

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, \quad x \leq y \leq -x^2 + x + 1\right\}.$$

No caso do domínio D ser a reunião de dois domínios, digamos D_1 e D_2, então:

$$\text{Área}(D) = \int\int_{D_1} dx\,dy + \int\int_{D_2} dx\,dy.$$

Por outro lado, se o domínio D resultar da diferença de dois domínios, digamos $D = D_1 \setminus D_2$, temos:

$$\text{Área}(D) = \int\int_{D_1} dx\,dy - \int\int_{D_2} dx\,dy.$$

Exemplo 5.4.2. *Usando integrais duplos, calcule a área do domínio*

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\right\}.$$

Um outro exemplo de aplicação geométrica de integrais duplos, é o cálculo de volumes de sólidos limitados por superfícies $z = f(x,y)$, onde f é uma função definida num domínio limitado $D \subset \mathbb{R}^2$. Por simplicidade de exposição, admitamos que f é uma função não negativa em D. O **volume do corpo**

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D, \quad 0 \leq z \leq f(x,y)\right\}$$

é determinado pelo integral duplo de f, calculado sobre o domínio D, isto é,

$$\text{Volume}(\Omega) = \int\int_D f(x,y)\,dx\,dy.$$

No caso do corpo ser dado por

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D, \quad g(x,y) \leq z \leq f(x,y)\right\},$$

então:

$$\text{Volume}(\Omega) = \int\int_D \left[f(x,y) - g(x,y)\right]\,dx\,dy.$$

Exemplo 5.4.3. *Usando integrais duplos, calcule o volume do corpo seguinte:*

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \quad z \geq 0\right\}.$$

5.5 Ficha de exercícios nº 5

1. Descreva as regiões de integração e calcule os integrais respectivos:

(a) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^4 (x^2+y^2)\,dx\,dy$;

(b) $\displaystyle\int_1^2 \int_{x^2}^{x^3} x\,dy\,dx$;

(c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-y}^{y} \operatorname{sen}(x)\,dx\,dy$;

(d) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_0^{|x|} dy\,dx$;

(e) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dy\,dx$;

(f) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{3\cos(\phi)} r^2 \operatorname{sen}^2(\phi)\,dr\,d\phi$.

2. Calcule os integrais das funções seguintes sobre as regiões indicadas:

(a) $f(x,y)=x\cos(x+y)$ sobre o triângulo de vértices $A=(0,0)$, $B=(\pi,0)$ e $C=(\pi,\pi)$;

(b) $f(x,y)=x$ sobre a região limitada por $y=x^2$ e $y=x^3$;

(c) $f(x,y)=x-y$ sobre a região limitada por $y=\operatorname{sen} x$ e pelo eixo dos xx entre os pontos $x=0$ e $x=\pi$;

(d) $f(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$ sobre a região limitada pela parábola $y=\frac{x^2}{2}$ e pela recta $y=x$;

(e) $f(x,y)=\sqrt{xy-y^2}$ sobre a região limitada pelo triângulo de vértices $A=(0,0)$, $B=(10,1)$ e $C=(1,1)$ (integrando primeiro em ordem a x);

(f) $f(x,y)=e^{\frac{x}{y}}$ sobre a região limitada pela parábola $x=y^2$ e pelas rectas $x=0$ e $y=1$ (integrando primeiro em ordem a x).

3. Inverta a ordem de integração dos integrais duplos seguintes:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_y^1 f(x,y)\,dx\,dy$;

(b) $\displaystyle\int_0^2 \int_{x^2}^{9-x} f(x,y)\,dy\,dx$;

(c) $\displaystyle\int_{-4}^3 \int_{x^2-9}^{-x+3} f(x,y)\,dy\,dx$;

(d) $\displaystyle\int_{-6}^2 \int_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x,y)\,dx\,dy$.

4. Verifique que os integrais duplos seguintes não têm primitivas imediatas, se resolvidos pela ordem de integração apresentada. Inverta a ordem de integração e calcule os integrais:

(a) $\displaystyle\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 e^{1+x^3}\,dx\,dy$;

(b) $\displaystyle\int_0^1 \int_x^1 \sqrt{y^2+1}\,dy\,dx$;

(c) $\displaystyle\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 \sqrt{x^4+1}\,dx\,dy$;

(d) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{10y} \sqrt{yx-x^2}\,dx\,dy$.

5. Determine e represente num sistema de eixos cartesianos as novos domínios que se obtêm por aplicação das transformações de variáveis nas regiões indicadas. Calcule os jacobianos de cada transformação:

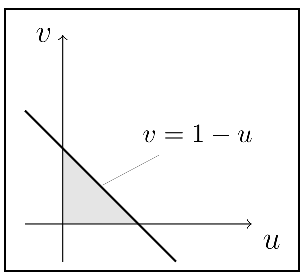
   (a) D é limitada pela elipse $x^2 + \dfrac{y^2}{36} = 1$ e a transformação é: $x = \dfrac{u}{2}$ e $y = 3v$;

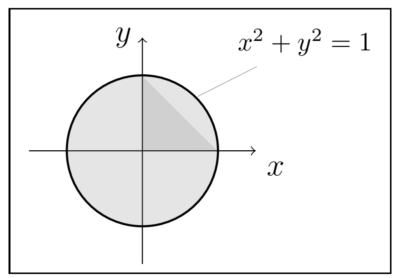
   (b) D é a região limitada pelas rectas $y = -x + 4$, $y = x + 1$ e $y = \dfrac{x-4}{3}$, e a transformação é: $x = \dfrac{1}{2}(u+v)$ e $y = \dfrac{1}{2}(u-v)$.

   (c) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq x\}$ e a transformação por coordenadas polares;

   (d) D é a região limitada pelo quadrilátero de vértices $(0, 0)$, $(5, 0)$, $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ e $\left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right)$, e a transformação é: $x = 2u + 3v$ e $y = 2u - 3v$.

6. **[1,5]** Indique qual a aplicação que permite transformar o triângulo seguinte no círculo abaixo representados:





   (a) $x = \sqrt{u}$ e $y = \sqrt{v}$;

   (b) $x = u^2$ e $y = v^2$;

   (c) $x = u$ e $y = v$;

   (d) $x = u\cos(v)$ e $y = u\,\mathrm{sen}(v)$.

7. Calcule os integrais seguintes usando as mudanças de variáveis indicadas:

   (a) $\displaystyle\int_1^2 \int_{x+2}^{x+3} \frac{dy dx}{\sqrt{xy - x^2}}, \qquad x = u, \quad y = u + v;$

   (b) $\displaystyle\int\int_D (x+y)\,dx\,dy$, $\quad x = u - v$, $y = u + v$, onde D é a região limitada pelas rectas $y = x$, $y = 3x$, $x + y = 4$;

   (c) $\displaystyle\int\int_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy$, $\quad u = x + y$, $v = x - y$, onde D é a região limitada pelas rectas $y = x$, $y = -x$, $y = x - 2$ e $y = 2 - x$;

   (d) $\displaystyle\int\int_D e^{\frac{y-x}{y+x}}\,dx\,dy$, $\quad u = y - x$, $v = y + x$, onde D é a região limitada pela recta $x + y = 2$ e pelos dois eixos de coordenadas.

8. Calcule os integrais seguintes usando a mudança de variáveis para coordenadas polares:

   (a) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (4 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}\,dx\,dy;$

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}} \int_{\sqrt{3}x}^{\sqrt{9-x^2}} e^{-(x^2+y^2)}\, dy\, dx$;

(c) $\displaystyle\int\int_D (x^2+y^2)e^{(x^2+y^2)^2}\, dx\, dy$, onde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$;

(d) $\displaystyle\int\int_D \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy$, onde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$.

9. Usando integrais duplos, calcule a área dos domínios planos seguintes:

   (a) $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi/4,\ \operatorname{sen} x \leq y \leq \cos x\big\}$;

   (b) $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 2,\ -|x| \leq y \leq |x|\big\}$;

   (c) $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ x^2 - y^2 \geq 0\big\}$;

   (d) $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4 \wedge y \geq 1\big\}$;

   (e) $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2+y^2 \leq 1 \wedge x^2+(y-1)^2 \leq 1\big\}$.

10. Esboce, num sistema de eixos cartesianos, os corpos cujos volumes podem ser calculados através dos integrais duplos seguintes:

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y)\, dydx$;

   (b) $\displaystyle\int_0^2 \int_{2-x}^{2} (4-x-y)\, dydx$;

   (c) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1-x)\, dydx$;

   (d) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\, dydx$.

11. Usando integrais duplos, calcule o volume dos domínios espaciais seguintes:

   (a) D é o domínio do primeiro octante limitado por $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x + z = 6$ e $z = 0$;

   (b) D é o domínio do primeiro octante limitado pelas superfícies $y = 1 - x^2$ e $z = 1 - x^2$;

   (c) D é o domínio do primeiro octante interior ao cilindro $x^2 + z^2 = 4$ e limitado pelo plano $x = y$;

   (d) D é limitado pelo elipsóide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, onde a, b e c são números reais não nulos.

Capítulo 6

Integrais Triplos

Depois de introduzido o integral duplo, torna-se mais fácil estender as noções de integração para funções escalares de três variáveis. Portanto, as regiões de integração são agora subconjuntos de $\mathbb{R}^3$. Vamos, primeiro, considerar regiões de integração paralelipípedicas e, depois, iremos considerar regiões mais gerais cujas fronteiras são limitadas por superfícies não propriamente planares.

6.1 Integral de Riemann

De igual modo como fizemos para o integral duplo, comecemos por estender a noção de partição para um paralelipípedo (limitado) contido em $\mathbb{R}^3$.

Definição 6.1.1. *Sejam a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 e c_2 números reais tais que $a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$, $c_1 < c_2$. Consideremos o paralelipípedo*

$$P = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a_1 \leq x \leq a_2, \quad b_1 \leq y \leq b_2, \quad c_1 \leq z \leq c_2\right\}$$

e as partições dos intervalos $[a_1, a_2]$, $[b_1, b_2]$ e $[c_1, c_2]$, definidas, respectivamente, por

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_1 &: a_1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = a_2, \\
\mathcal{P}_2 &: b_1 = y_0 < y_1 < \cdots < y_{m-1} < y_m = b_2 \\
\mathcal{P}_3 &: c_1 = z_0 < z_1 < \cdots < z_{l-1} < z_l = c_2\,,
\end{aligned}$$

onde m, n e l são números naturais arbitrários. Designa-se por ***partição do paralelipípedo*** *P ao conjunto seguinte*

$$\mathcal{P} = \{(x_i, y_j, z_k) \in P : 0 \leq i \leq n, \quad 0 \leq j \leq m, \quad 0 \leq k \leq l\}\,.$$

Uma partição $\mathcal{P}$ do paralelipípedo P, tal como a definida acima, determina mnl paralelipípedos contidos em P:

$$P_{ijl} = \left\{(x_i, y_j, z_k) \in \mathbb{R}^3 : x_{i-1} \leq x \leq x_i, \quad y_{i-1} \leq y \leq y_i, \quad z_{k-1} \leq x \leq z_k,\right\},$$

cujos volumes são dados por

$$\triangle x_i \, \triangle y_j \, \triangle z_k = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1}).$$

Em termos objectivos, a colecção formada por estes paralelipípedos P_{ijl}, é o que verdadeiramente constitui a partição $\mathcal{P}$.

Definição 6.1.2. *Seja f uma função definida num paralelipípedo $P \subset \mathbb{R}^3$. Designamos por* ***soma de Riemann*** *da função f no paralelipípedo P à quantidade seguinte*

$$\begin{aligned}\sum_{i=1,\ j=1,\ k=1}^{n,\ m,\ l} f(x^*_{ijl})\triangle x_i \triangle y_j \triangle z_l &\equiv \sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(x^*_{ijl})\triangle x_i \triangle y_j \triangle z_l \\ &\equiv f(x^*_{111})\triangle x_1 \triangle y_1 \triangle z_l + \cdots + f(x^*_{nml})\triangle x_n \triangle y_m \triangle z_l\,,\end{aligned}$$

onde x^*_{ijl} são pontos seleccionados aleatoriamente nos paralelipípedos respectivos P_{ijl}.

Para a noção de qualquer integral, interessa-nos que as partições sejam muito finas. Definimos a quantidade que define a finura de dada partição $\mathcal{P}$ de um paralelipípedo $P \subset \mathbb{R}^3$ por

$$|\mathcal{P}| = \max_{i,\ j,\ k} \sqrt{(\triangle x_i)^2 + (\triangle y_j)^2 + (\triangle z_k)^2}.$$

No caso do integral triplo, $|\mathcal{P}|$ corresponde ao comprimento da maior diagonal de todos os paralelipípedos P_{ijk} considerados na partição $\mathcal{P}$.

Definição 6.1.3. *Sejam f uma função definida num paralelipípedo $P \subset \mathbb{R}^3$ e*

$$\mathcal{P} = \{(x_i, y_j, z_k) \in P : 0 \leq i \leq n, \quad 0 \leq j \leq m, \quad 0 \leq k \leq l\}$$

uma partição arbitrária de P. Diz-se que a ***função*** *f é* ***integrável*** *(à Riemann) no paralelipípedo P, se existir (e for finito) o limite seguinte:*

$$\lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(x^*_{ij})\triangle x_i \triangle y_j \triangle z_k,$$

independentemente de como a partição $\mathcal{P}$ do paralelipípedo P é formada, ou de como os pontos x^*_{ijl} pertencentes aos subparalelipípedo P_{ijl} são escolhidos.

No caso de existir, o limite da definição anterior designa-se por **integral da função** f e denota-se por uma das formas seguintes:

$$\int\!\!\int\!\!\int_P f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz, \quad \int\!\!\int\!\!\int_P f(x,y,z)\,dx\,dz\,dy, \quad \int\!\!\int\!\!\int_P f(x,y,z)\,dy\,dx\,dz,$$

$$\int\!\!\int\!\!\int_P f(x,y,z)\,dy\,dz\,dx, \quad \int\!\!\int\!\!\int_P f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy, \quad \int\!\!\int\!\!\int_P f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx;$$

onde $dx\,dy\,dz$, $dx\,dz\,dy$, $dy\,dx\,dz$, $dy\,dz\,dx$, $dz\,dx\,dy$ ou $dz\,dy\,dx$ indica um elemento de volume ao qual ainda não está subjacente nenhuma ordem de integração.

Esta noção de função integrável que acabamos de introduzir, estende-se a qualquer função definida num conjunto limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ que não seja propriamente um paralelipípedo. Apenas temos de considerar um paralelipípedo P que contenha Ω e aí fazer a análise anterior. Neste caso, para a definição precedente fazer sentido, fixamos o valor de $f(x^*_{ijl})$ igual a zero quando x^*_{ijl} não pertencer a Ω.

Proposição 6.1.1. *Seja Ω um subconjunto de $\mathbb{R}^3$ limitado e cuja fronteira é constituída pela união de superfícies (contínuas). Consideremos uma função f definida em Ω. Se f é contínua em Ω excepto, quanto muito, num conjunto de medida nula, então f é integrável em Ω.*

Demonstração. Ver, por exemplo, Dias Agudo, Volume I, p. 236. □

A proposição anterior diz-nos, então, que todas as funções elementares de três variáveis que conhecemos serão integráveis em domínios limitados de $\mathbb{R}^3$.

As propriedades do integral de Riemann definido em $\mathbb{R}$, serão válidas *mutatis mutandis* para o integral triplo. Em particular, o integral triplo é um operador linear e satisfaz a propriedade aditiva dos integrais.

6.2 Integral repetido

O processo de integração repetida do integral duplo generaliza-se a qualquer integral em dimensão superior, em particular também para o integral triplo. Podemos, assim, reduzir o cálculo de um integral triplo a um integral duplo. Em particular, o Teorema de Fubbini generaliza-se de modo imediato ao integral triplo.

Proposição 6.2.1. *Sejam f uma função contínua num conjunto limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ e $D \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto fechado e limitado.*

1. *Sejam $g(x,y)$ e $h(x,y)$ duas funções contínuas em D tais que, para quaisquer $(x,y) \in D$, $g(x,y) \leq h(x,y)$, e seja $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g(x,y) \leq z \leq h(x,y),\ (x,y) \in D\}$. Então:*
$$\int\int\int_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\int_D \left[\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right] dx\,dy.$$
2. *Sejam $g(x,z)$ e $h(x,z)$ duas funções contínuas em D tais que, para quaisquer $(x,z) \in D$, $g(x,z) \leq h(x,z)$, e seja $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g(x,z) \leq y \leq h(x,z),\ (x,z) \in D\}$. Então:*
$$\int\int\int_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\int_D \left[\int_{g(x,z)}^{h(x,z)} f(x,y,z)\,dy\right] dx\,dz.$$
3. *Sejam $g(y,z)$ e $h(y,z)$ duas funções contínuas em D tais que, para quaisquer $(y,z) \in D$, $g(y,z) \leq h(y,z)$, e seja $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g(y,z) \leq x \leq h(y,z),\ (y,z) \in D\}$. Então:*
$$\int\int\int_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\int_D \left[\int_{g(y,z)}^{h(y,z)} f(x,y,z)\,dx\right] dy\,dz.$$

Demonstração. Ver, por exemplo, Dias Agudo, Volume I, p. 247. □

Exemplo 6.2.1. *Descreva a região de integração e calcule o respectivo integral:*
$$\int_0^1\int_0^2\int_1^3 xy^2z\,dx\,dy\,dz.$$
As considerações sobre o cálculo do integral repetido e inversão de ordem de integração feitas para o integral duplo, podem ser adaptadas para o integral triplo.

6.3 Mudança de variáveis

Tal como acontece no cálculo de outros integrais, por vezes, também no cálculo do integral triplo se torna necessário fazer mudança de variáveis para se poder calcular os integrais.

Proposição 6.3.1 (Mudança de variáveis)**.** *Sejam Ω e Δ dois subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^3$ limitados por funções diferenciáveis e seja*

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \Delta & \longrightarrow & \Omega \\ & (u,v,w) & \mapsto & (x,y,z)=\varphi(u,v,w) \end{array}$$

uma função bijectiva com derivadas parciais contínuas. Então, se $f(x,y,z)$ é uma função integrável em Ω, temos:

$$\int\int\int_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\int\int_{\varphi^{-1}(\Omega)} f(\varphi(u,v,w))\,|J|\,du\,dv\,dw\,,$$

onde

$$J=\det\left[\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right] \equiv \det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Ver, por exemplo, Dias Agudo, Volume I, p. 258. □

Tendo em conta que φ é uma aplicação bijectiva, $\varphi^{-1}(\Omega)=\Delta$. Tal como no integral duplo, a quantidade J continua a designar-se por **jacobiano** da mudança de variáveis (x,y,z) para (u,v,w) e a matriz

$$\left[\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right]$$

é a denominada **matriz Jacobiana** dessa transformação. Mais, tendo em conta que podemos escrever

$$(x,y,z)=\varphi(u,v,w)\equiv(\varphi_1(u,v,w),\varphi_2(u,v,w),\varphi_3(u,v,w)),$$

a matriz Jacobiana pode ser escrita na forma seguinte:

$$\left[\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right] \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial w} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial w} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial w} \end{bmatrix}.$$

Exemplo 6.3.1. *Fazendo a mudança de variáveis $u=x+y-z$ e $v=x+2y+z$ e $w=z$, calcule o integral seguinte:*

$$\int\int\int_\Omega \frac{\operatorname{sen}(x+y-z)}{x+2y+z}\,dx\,dy\,dz\,,$$

onde

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 1\leq x+2y+z\leq 2,\ 0\leq x+y-z\leq\frac{\pi}{4},\ 0\leq z\leq 1\right\}.$$

No integral triplo, usamos com frequência uma mudança de variáveis correspondente à transformação para coordenadas polares do integral duplo. Aqui, esta mudança de variáveis recebe o nome de transformação para coordenadas cilíndricas. Usando a trigonometria no espaço, qualquer ponto P de coordenadas paralelipípedicas (x, y, z) pode ser escrito em termos das **coordenadas cilíndricas**:

$$\begin{cases} x = r\,\cos(\theta) \\ y = r\,\operatorname{sen}(\theta) \\ z = z\,, \end{cases} \tag{6.3.1}$$

onde:

- r é a distância radial do ponto P à origem do referencial $(x, y, z) = (0, 0, 0)$;
- $\theta \in [0, 2\pi]$ é o ângulo formado pelo semi-eixo positivo dos xx e pela semi-recta com origem em $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ e que passa pela projecção do ponto P no plano xy, e é medido a partir do semi-eixo positivo dos xx até 360º;
- z é a cota do ponto P.

De facto, para (r, θ, z) dados como acima, temos

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(\theta) = \dfrac{\text{cat. op.}}{\text{hip.}} = \frac{x}{r} \\ \cos(\theta) = \dfrac{\text{cat. adj.}}{\text{hip.}} = \frac{y}{r} \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow (6.3)\,.$$

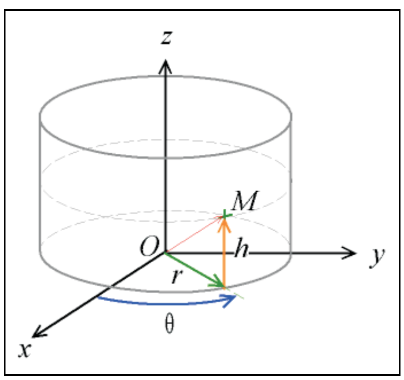


Figura 6.1: Coordenadas cilíndricas.

Proposição 6.3.2. *O jacobiano da transformação para coordenadas cilíndricas (6.3) é $J = r$.*

Demonstração. Considerando a transformação para coordenadas cilíndricas (6.3), temos

$$J = \det\left[\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)}\right] = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -r\operatorname{sen}(\theta) & 0 \\ \operatorname{sen}(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = r\,,$$

onde usamos o Teorema de Laplace no cálculo do determinante. □

Observemos que se trocarmos duas colunas de posição, o jacobiano vem com o sinal alterado. Por exemplo,

$$J = \det\left[\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,z,\theta)}\right] = -r\,.$$

Exemplo 6.3.2. *Calcule o integral seguinte fazendo mudança de variáveis para coordenadas cilíndricas:*

$$\int\int\int_\Omega (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz\,, \qquad \Omega = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le 2z,\ z\le 2\right\}.$$

Tal como as coordenadas polares no caso do integral duplo, a mudança de variáveis para coordenadas cilíndricas no integral triplo é particularmente importante quando a região de integração tem fronteiras ao longo das quais r ou θ é constante.

Outra mudança de variáveis muito comum em integrais triplos, é a transformação para **coordenadas esféricas** (*cf.* Figura 6.2a):

$$\begin{cases} x = r\,\cos(\phi)\cos(\theta) \\ y = r\,\cos(\phi)\,\mathrm{sen}(\theta) \\ z = r\,\mathrm{sen}(\phi)\,, \end{cases} \tag{6.3.2}$$

onde:

- r é a distância radial do ponto P à origem do referencial $(x,y,z)=(0,0,0)$;
- $\theta\in[0,2\pi]$ é o ângulo formado pelo semi-eixo positivo dos xx e pela semi-recta com origem em $(x,y,z)=(0,0,0)$ e que passa pela projecção do ponto P no plano xy, e é medido a partir do semi-eixo positivo dos xx até 360º;
- $\phi\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ é o ângulo formado pelo plano $z=0$ e pela semi-recta com origem em $(x,y,z)=(0,0,0)$ e que passa pelo ponto P, e é medido a partir do plano $z=0$ até ±90º.

De facto, para (r,θ,ϕ) dados como acima e denotando por r_{xy} a distância radial r projectada sobre o plano dos xy, temos

$$\begin{cases} \mathrm{sen}(\phi) = \dfrac{\text{cat. op.}}{\text{hip.}} = \frac{z}{r} \\ \cos(\phi) = \dfrac{\text{cat. adj.}}{\text{hip.}} = \frac{r_{xy}}{r} \\ \mathrm{sen}(\theta) = \dfrac{\text{cat. op.}}{\text{hip.}} = \frac{y}{r_{xy}} \\ \cos(\phi) = \dfrac{\text{cat. adj.}}{\text{hip.}} = \frac{x}{r_{xy}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = r\,\mathrm{sen}(\phi) \\ r_{xy} = r\cos(\phi) \\ y = r_{xy}\,\mathrm{sen}(\theta) \\ x = r_{xy}\cos(\theta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = r\cos(\phi)\cos(\theta) \\ y = r\cos(\phi)\,\mathrm{sen}(\theta) \\ z = r\,\mathrm{sen}(\phi)\,. \end{cases}$$

Proposição 6.3.3. *O jacobiano da transformação para coordenadas esféricas (6.3.2) é* $J = \pm r^2\cos(\phi)\,.$

Demonstração. Fazendo a transformação para coordenadas esféricas (6.3.2), tem-se

$$
\begin{aligned}
J = \det\left[\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}\right] &= \det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \cos(\phi)\cos(\theta) & -r\cos(\phi)\,\mathrm{sen}(\theta) & -r\,\mathrm{sen}(\phi)\cos(\theta) \\ \cos(\phi)\,\mathrm{sen}(\theta) & r\cos(\phi)\cos(\theta) & -r\,\mathrm{sen}(\phi)\,\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\phi) & 0 & r\cos(\phi) \end{bmatrix} \\
&= \mathrm{sen}(\phi)\det\begin{bmatrix} -r\cos(\phi)\,\mathrm{sen}(\theta) & -r\,\mathrm{sen}(\phi)\cos(\theta) \\ r\cos(\phi)\cos(\theta) & -r\,\mathrm{sen}(\phi)\,\mathrm{sen}(\theta) \end{bmatrix} + r\cos(\phi)\det\begin{bmatrix} \cos(\phi)\cos(\theta) & -r\cos(\phi)\,\mathrm{sen}(\theta) \\ \cos(\phi)\,\mathrm{sen}(\theta) & r\cos(\phi)\cos(\theta) \end{bmatrix} \\
&= \mathrm{sen}(\phi)\times r^2\,\mathrm{sen}(\phi)\cos(\phi) + r\cos(\phi)\times r\cos^2(\phi) = r^2\cos(\phi)\,,
\end{aligned}
$$

onde usamos o Teorema de Laplace sobre a última linha. Se, na matriz Jacobiana, trocarmos a segunda com a terceira coluna, obtemos

$$J = \det\left[\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\phi,\theta)}\right] = -r^2\cos(\phi)\,,$$

o que termina a demonstração. □

Podemos introduzir as **coordenadas esféricas equivalentes** da forma seguinte (*cf.* Figura 6.2b):

$$\left\{\begin{array}{l} x = r\ \mathrm{sen}(\phi)\cos(\theta) \\ y = r\ \mathrm{sen}(\phi)\ \mathrm{sen}(\theta) \\ z = r\cos(\phi)\,, \end{array}\right. \tag{6.3.3}$$

onde, agora:

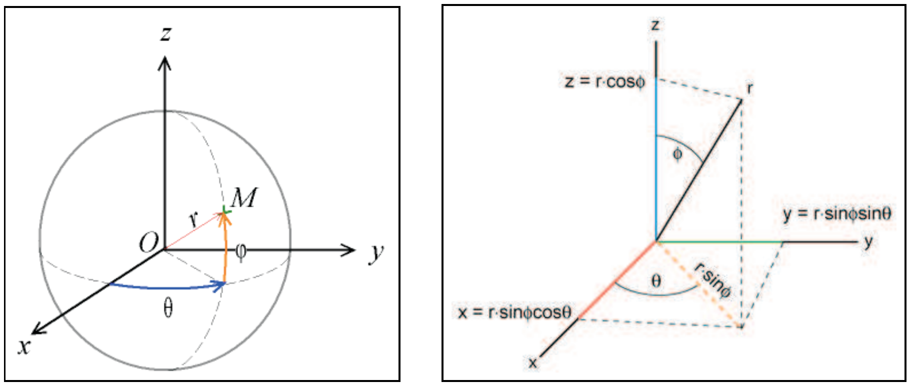
- $\phi \in [0,\pi]$ é o ângulo formado pelo semi-eixo positivo dos zz e pela semi-recta com origem em $(x,y,z) = (0,0,0)$ e que passa pelo ponto P, e é medido a partir do semi-eixo positivo dos zz até 180º.

De facto, para (r,θ,ϕ) dados como acima e denotando por r_{xy} a distância radial r projectada sobre o plano dos xy, temos

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{sen}(\phi) = \dfrac{\text{cat. op.}}{\text{hip.}} = \frac{r_{xy}}{r} \\ \cos(\phi) = \dfrac{\text{cat. adj.}}{\text{hip.}} = \frac{z}{r} \\ \mathrm{sen}(\theta) = \dfrac{\text{cat. op.}}{\text{hip.}} = \frac{y}{r_{xy}} \\ \cos(\phi) = \dfrac{\text{cat. adj.}}{\text{hip.}} = \frac{x}{r_{xy}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} r_{xy} = r\,\mathrm{sen}(\phi) \\ z = r\cos(\phi) \\ y = r_{xy}\,\mathrm{sen}(\theta) \\ x = r_{xy}\cos(\theta) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = r\,\mathrm{sen}(\phi)\cos(\theta) \\ y = r\,\mathrm{sen}(\phi)\,\mathrm{sen}(\theta) \\ z = r\cos(\phi)\,. \end{array}\right.$$

Proposição 6.3.4. *O jacobiano da transformação para coordenadas esféricas equivalentes (6.3.3) é* $J = \pm r^2\,\mathrm{sen}(\phi)$.

Demonstração. Fazendo a transformação para coordenadas esféricas equivalentes (6.3.3), tem-se



(a) Caso de (6.3.2): $\phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. **(b)** Caso de (6.3.3): $\phi \in [0, \pi]$.

Figura 6.2: Coordenadas esféricas.

$$
\begin{aligned}
J = \det\left[\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}\right] &= \det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \operatorname{sen}(\phi)\cos(\theta) & -r\operatorname{sen}(\phi)\operatorname{sen}(\theta) & r\cos(\phi)\cos(\theta) \\ \operatorname{sen}(\phi)\operatorname{sen}(\theta) & r\operatorname{sen}(\phi)\cos(\theta) & r\cos(\phi)\operatorname{sen}(\theta) \\ \cos(\phi) & 0 & -r\operatorname{sen}(\phi) \end{bmatrix} \\
&= \cos(\phi)\det\begin{bmatrix} -r\operatorname{sen}(\phi)\operatorname{sen}(\theta) & r\cos(\phi)\cos(\theta) \\ r\operatorname{sen}(\phi)\cos(\theta) & r\cos(\phi)\operatorname{sen}(\theta) \end{bmatrix} - r\operatorname{sen}(\phi)\det\begin{bmatrix} \operatorname{sen}(\phi)\cos(\theta) & -r\operatorname{sen}(\phi)\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\phi)\operatorname{sen}(\theta) & r\operatorname{sen}(\phi)\cos(\theta) \end{bmatrix} \\
&= \cos(\phi)\left[-r^2\operatorname{sen}(\phi)\cos(\phi)\operatorname{sen}^2(\theta) - r^2\operatorname{sen}(\phi)\cos(\phi)\cos^2(\theta)\right] \\
&\quad - r\operatorname{sen}(\phi)\left[r\operatorname{sen}^2(\phi)\cos^2(\theta) + r\operatorname{sen}^2(\phi)\operatorname{sen}^2(\theta)\right] \\
&= -r^2\operatorname{sen}(\phi)\left[\cos^2(\phi)\operatorname{sen}^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\phi)\operatorname{sen}^2(\theta)\right] - r^2\operatorname{sen}(\phi)\left[\cos^2(\phi)\cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\phi)\cos^2(\theta)\right] \\
&= -r^2\operatorname{sen}(\phi)\,,
\end{aligned}
$$

onde usamos o Teorema de Laplace sobre a última linha. Também neste caso, se, na matriz Jacobiana, trocarmos a segunda com a terceira coluna, obtemos

$$J = \det\left[\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\phi,\theta)}\right] = r^2\operatorname{sen}(\phi)\,,$$

o que termina a demonstração. □

Tal como foi mencionado nas demonstrações das duas proposições anteriores, a escolha do sinal $+$ ou $-$ está relacionada com a ordem pela qual escrevemos as colunas da matriz Jacobiana. Se escolhermos a ordem (r, ϕ, θ), virá $-$ na fórmula de J da Proposição 6.3.3, ou $+$ na fórmula de J da Proposição 6.3.4. Se a ordem for (r, θ, ϕ), então os sinais vêm trocados. As duas transformações para coordenadas esféricas são equivalentes, temos apenas de ter o cuidado que o domínio de variação do ângulo ϕ é diferente e que, na substituição do integral a calcular, deverá aparecer $|J|$. Assim, se usarmos a forma das coordenadas esféricas (6.3.2), obtemos:

$$|J| = r^2\cos(\phi), \quad \text{pois} \quad \cos(\phi) \geq 0 \quad \text{para} \quad \phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Se, porventura, usarmos as coordenadas esféricas equivalentes (6.3.3), temos:

$$|J| = r^2\operatorname{sen}(\phi), \quad \text{pois} \quad \operatorname{sen}(\phi) \geq 0 \quad \text{para} \quad \phi \in [0, \pi]\,.$$

Exemplo 6.3.3. *Calcule o integral seguinte fazendo uma mudança de variáveis para coordenadas esféricas:*

$$\int\int\int_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz\,, \qquad \Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 4\right\}.$$

6.4 Aplicações

Nesta secção vamos apenas considerar a aplicação de integrais triplos ao cálculo de volumes de corpos.

Seja Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^3$. O **volume** do domínio Ω é determinado através do integral triplo, calculado sobre o domínio Ω, da função identicamente igual a 1. Ou seja,

$$\text{Volume}(\Omega) = \int\int\int_{\Omega} dx\, dy\, dz.$$

Exemplo 6.4.1. *Usando integrais triplos, calcule o volume do paralelipípedo com vértices* $V_1 = (0,0,0)$, $V_2 = (1,0,0)$, $V_3 = (0,1,0)$, $V_4 = (1,1,0)$, $V_5 = (0,0,\sqrt{2})$, $V_6 = (1,0,\sqrt{2})$, $V_7 = (0,1,\sqrt{2})$, $V_8 = (1,1,\sqrt{2})$.

Se o domínio Ω for a reunião de dois domínios, digamos Ω_1 e Ω_2, então:

$$\text{Volume}(\Omega) = \int\int\int_{\Omega_1} dx\, dy\, dz + \int\int\int_{\Omega_2} dx\, dy\, dz.$$

Por outro lado, se o domínio Ω resultar da diferença de dois domínios, digamos $\Omega = \Omega_1 \setminus \Omega_2$, temos:

$$\text{Volume}(\Omega) = \int\int\int_{\Omega_1} dx\, dy\, dz - \int\int\int_{\Omega_2} dx\, dy\, dz.$$

Exemplo 6.4.2. *Usando integrais triplos, calcule o volume do domínio Ω compreendido entre o rectângulo, do plano $z = 0$, com vértices $A = (0,0)$, $B = (3,0)$, $C = (3,2)$ e $D = (0,2)$, e a superfície $z = 4x^2 + 9y^2$.*

6.5 Ficha de exercícios nº 6

1. Descreva as regiões de integração e calcule os respectivos integrais:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 \frac{dx\, dy\, dz}{\sqrt{x+y+z+1}}$;

(b) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^z \int_0^1 \sqrt{1-z^2}\, dx\, dy\, dz$;

(c) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} xyz\, dz\, dy\, dx$;

(d) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x \int_0^{xy} x^3y^2z\, dz\, dy\, dx$;

(e) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_0^{\arccos(y)} \int_0^{\operatorname{sen}(x)} \pi - z\, dz\, dx\, dy$;

(f) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{2\sqrt{x}} \int_0^{\frac{\sqrt{4x-y^2}}{2}} x\, dz\, dy\, dx$.

2. Considere os corpos seguintes e as transformações indicadas:

   2.1 Ω é o tetraedro $x+y+z\leq 1$, $x\geq 0$, $y\geq 0$ e $z\geq 0$, e a transformação é: $x=u^2$, $y=v^2$ e $z=w^2$;

   2.2 Ω é o prisma triangular $x+y\leq 1$, $x\geq 0$, $y\geq 0$ e $0\leq z\leq 3$, e a transformação é: $x=u^2$, $y=v^2$, $z=w$;

   2.3 Ω é o cilindro $x^2+y^2\leq 4$ e $0\leq z\leq 4$, e a transformação é $x=u$, $y=w$ e $z=v$;

   2.4 Ω é o elipsóide $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{25}\leq 1$ e a transformação é: $x=2u$, $y=3v$ e $w=5z$.

   Para cada uma das alíneas anteriores:

   (a) Represente em sistemas de eixos cartesianos os corpos indicados, bem como os novos corpos que se obtêm por aplicação das transformações indicadas, de variáveis (x,y,z) para (u,v,w);

   (b) Em cada caso, recorrendo a formulário apropriado, calcule os volumes dos corpos originais e dos corpos transformados;

   (c) Calcule o Jacobiano de cada transformação e, tendo em atenção a alínea b), relacione o seu valor com fenómenos de rotação e contracção/dilatação.

3. Calcule os integrais seguintes usando as mudanças de variáveis indicadas:

   (a) $\displaystyle\int\int\int_\Omega e^{\frac{y-x+z}{y+x-z}}\,dx\,dy\,dz\,, \qquad u=y-x+z,\ v=y+x-z,\ w=z\,,$
   onde
   $\Omega=\{(x,y,z):\mathbb{R}^3:0\leq y-x+z\leq y+x-z,\ 0\leq y+x-z\leq 1,\ 1\leq z\leq 2\}$;

   (b) $\displaystyle\int\int\int_\Omega \frac{\cos(x+2y+z)}{x+y-z}\,dx\,dy\,dz\,, \qquad u=x+2y+z,\ v=x+y-z,\ w=z\,,$
   onde $\Omega=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:1\leq x+y-z\leq 2,\ 0\leq x+2y+z\leq \frac{\pi}{4},\ 0\leq z\leq 1\right\}$;

   (c) $\displaystyle\int\int\int_\Omega \frac{\ln(x+y-2z)}{2x+y+z}\,dx\,dy\,dz\,, \qquad u=x+y-2z,\ v=2x+y+z,\ w=z\,,$
   onde $\Omega=\{(x,y,z):\mathbb{R}^3:1\leq x+y-2z\leq 2,\ 1\leq 2x+y+z\leq 2,\ 1\leq z\leq 2\}$;

4. Calcule os integrais seguintes usando a mudança de variáveis para coordenadas cilíndricas:

   (a) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^4 z\sqrt{x^2+y^2}\,dz\,dy\,dx;$

   (b) $\displaystyle\int\int\int_\Omega xyz\,dx\,dy\,dz\,,$ onde
   $\Omega = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : -1\le y\le 1,\ 0\le x\le\sqrt{1-y^2},\ x^2+y^2\le z\le\sqrt{x^2+y^2}\right\};$

   (c) $\displaystyle\int\int\int_\Omega e^{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz\,,$ onde $\Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\le 1,\ 0\le z\le 1\}.$

5. Calcule os integrais seguintes usando a mudança de variáveis para coordenadas esféricas:

   (a) $\displaystyle\int\int\int_\Omega (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz\,,$
   onde
   $\Omega = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\le y\le 3,\ 0\le x\le\sqrt{9-y^2},\ \sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{16-(x^2+y^2)}\right\};$

   (b) $\displaystyle\int\int\int_\Omega z\,dx\,dy\,dz\,,$
   onde $\Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 1\le x^2+y^2+z^2\le 4,\ z\ge 0\};$

   (c) $\displaystyle\int\int\int_\Omega \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz\,,$
   onde $\Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\le x\}.$

6. Usando integrais triplos, calcule o volume dos domínios Ω seguintes,:

   (a) $\Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x,\ 0\le z\le 1-x-y\};$

   (b) $\Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y+z\le 2,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\};$

   (c) $\Omega = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\le 4,\ 0\le z\le\sqrt{x^2+y^2}\right\};$

   (d) $\Omega = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 1\le x^2+y^2+z^2\le 4,\ xyz\ge 0\right\};$

   (e) $\Omega = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\le 25,\ x^2+y^2\ge 9\right\}.$

7. Considere o elipsóide

$$\Omega = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{9}+(z-1)^2=1\right\}.$$

   (a) Mostre que o módulo do jacobiano da transformação indicada a seguir é $|J| = 6r^2\operatorname{sen}(\phi)$:

$$\begin{cases} x = 1+2r\operatorname{sen}(\phi)\cos(\theta) \\ y = 1+3r\operatorname{sen}(\phi)\operatorname{sen}(\theta) \\ z = 1+r\cos(\phi)\,. \end{cases}$$

   (b) Usando integrais triplos, e tendo em conta a transformação anterior com $\theta\in[0,2\pi]$ e $\phi\in[0,\pi]$, calcule o volume interior ao elipsóide Ω.

Bibliografia

[1] S.N. Antontsev. *Equações Diferenciais Ordinárias.* Universidade da Beira Interior, Covilhã, 2004.

[2] T.M. Apostol. *Calculus* volumes I e II. John Wiley & Sons, New York, 1967 e 1969.

[3] R. Beals. *Analysis - An Introduction.* Cambridge University Press, 2004.

[4] W.E. Boyce, R.C. Diprima. *Calculus.* John Willey & Sons, 1988.

[5] R.C. Buck. *Advanced Calculus.* Waveland Pr. Inc., 2003.

[6] J. Campos Ferreira. *Introdução à Análise Matemática.* Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1987.

[7] R. Courant e F. John. *Introduction to Calculus and Analysis.* Volume I. Springer-Verlag, New York, 1989.

[8] B. Demidovitch (sob a redacção). *Problemas e Exercícios de Análise Matemática.* 6ª edição. Editora Mir, Moscovo, 1987.

[9] M. Krasnov, A. Kiselev, G. Makarenko e E. Shikin. *Mathematical Analysis for Engineers.* Volume 1. Mir Publishers, Moscow, 1989.

[10] E. Kreyszig. *Advanced Engineering Mathematics.* Wiley, New York, 2005.

[11] J.E. Marsden e M.J. Hoffman. *Elementary Classical Analysis.* Second Edition. W.E. Freeman and Company, New York, 1995.

[12] W. Rudin. Principles of Mathematical Analysis. McGraw-Hill International Editions, 1976.

[13] J. Santos Guerreiro. *Curso de Análise Matemática.* Escolar Editora, Lisboa, 1989.

[14] V. Zorich. *Mathematical Analysis I, II.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2004.