



Análise Matemática em \mathbb{R}^N

Hermenegildo Borges de Oliveira

Junho de 2013

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Noções algébricas	1
1.2	Noções topológicas	2
1.3	Sucessões de vectores	5
1.4	Funções reais de várias variáveis	7
1.5	Exercícios	8
2	Continuidade	9
2.1	Limites	9
2.2	Continuidade	12
2.3	Exercícios	14
3	Derivabilidade	16
3.1	Derivadas parciais	16
3.2	Derivada direcciona	18
3.3	Derivabilidade	20
3.4	Derivadas de ordem superior	22
3.5	Derivação de funções compostas	24
3.6	Funções implícitas	27
3.7	Funções homogéneas	29
3.8	Aplicações geométricas	30
3.9	Fórmula de Taylor	32
3.10	Exercícios	34
4	Extremos	39
4.1	Extremos livres	39
4.2	Extremos condicionados	43
4.3	Exercícios	44
5	Integrais de Linha	45
5.1	Primeiras noções	45
5.2	Motivação	49
5.3	Propriedades gerais	50
5.4	Integral de linha independente do caminho	51
5.5	Exercícios	53

6	Integrais Duplos	55
6.1	Integral de Riemann	55
6.2	Integral repetido	57
6.3	Mudança de variáveis	59
6.4	Integração por partes	61
6.5	Teorema de Green	63
6.6	Aplicações	65
6.7	Exercícios	68
7	Integrais de Superfície	72
7.1	Superfícies	72
7.2	Plano tangente e normal a uma superfície	73
7.3	Noção de integral de superfície relativamente à área	74
7.4	Outras noções de integral de superfície	76
7.5	Aplicações	79
7.6	Exercícios	80
8	Integrais Triplos	82
8.1	Integral de Riemann	82
8.2	Integral repetido	84
8.3	Mudança de variáveis	85
8.4	Integração por partes	90
8.5	Teorema de Green	92
8.6	Aplicações	95
8.7	Exercícios	98
	Bibliografia	101

Capítulo 1

Introdução

1.1 Noções algébricas

Seja $N \in \mathbb{N}$ arbitrário. Denota-se por \mathbb{R}^N o conjunto de todas as sucessões finitas de N números reais que se podem representar pelo N -uplo

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N).$$

Em particular, \mathbb{R}^2 é o conjunto de todos os pares (x, y) de números reais e \mathbb{R}^3 é o conjunto de todos os triplos (x, y, z) de números reais. Num sentido mais alargado, designamos os elementos genéricos de \mathbb{R}^N por pontos. O real x_k , para $k = 1, \dots, N$, designa-se por k -ésima **componente**, ou k -ésima **coordenada**, do ponto $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$. Dados dois elementos $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N$, tem-se $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ se e só se cada componente de \mathbf{x} é igual à respectiva componente de \mathbf{y} , isto é,

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} \iff x_k = y_k \quad \forall k = 1, \dots, N.$$

Em \mathbb{R}^N define-se a **adição** por

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1, \dots, x_N) + (y_1, \dots, y_N) = (x_1 + y_1, \dots, x_N + y_N)$$

e a **multiplicação por escalar** por

$$\alpha \mathbf{x} = \alpha(x_1, \dots, x_N) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_N),$$

para quaisquer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. O conjunto \mathbb{R}^N munido com estas duas operações tem uma estrutura algébrica de **espaço vectorial**, ou **espaço linear**, isto é, \mathbb{R}^N é um grupo comutativo para a adição e

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^N \neq \emptyset &\iff (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^N; \\ (\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^N &\iff \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N, \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

A noção de que \mathbb{R}^N é um grupo comutativo para a adição, quer dizer que, para quaisquer $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^N$:

- (i) $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$;
- (ii) $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$;
- (iii) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$;
- (iv) existe o elemento neutro $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$ e $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$;
- (v) todo $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ tem simétrico $-\mathbf{x} = (-x_1, \dots, -x_N) \in \mathbb{R}^N$.

Neste sentido, os elementos de \mathbb{R}^N podem ser denominados vectores. Sejam, agora, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ vectores de \mathbb{R}^N . Diz-se que o vector \mathbf{x} é uma **combinação linear** de $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$, se existirem k escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ tais que

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{x}_k.$$

Por outro lado, diz-se que $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^N$ são **vectores linearmente independentes**, se

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{x}_k = \mathbf{0} \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0.$$

Denotamos por \mathbf{e}_k , com $k \in \{1, \dots, N\}$, o elemento de \mathbb{R}^N com as componentes todas nulas excepto a k -ésima componente que é 1. Assim,

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_N = (0, \dots, 0, 1).$$

Usando esta notação, podemos escrever, para qualquer vector $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$,

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_N \mathbf{e}_N.$$

Verifica-se que os vectores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_N$ são linearmente independentes. As duas afirmações anteriores exprimem o facto de $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_N$ ser uma **base vectorial** de \mathbb{R}^N . Isto significa que qualquer elemento de \mathbb{R}^N se escreve de modo único como combinação linear de $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_N$.

1.2 Noções topológicas

Definição 1.2.1. *Sejam $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N$ quaisquer. Definimos o **produto interno**, ou **produto escalar**, de \mathbf{x} por \mathbf{y} por*

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (x_1, \dots, x_N) \cdot (y_1, \dots, y_N) = x_1 y_1 + \dots + x_N y_N.$$

Podemos definir vários produtos internos em \mathbb{R}^N . Mas, qualquer definição de produto interno, terá de satisfazer às propriedades seguintes:

- (i) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$;
- (ii) $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$ e $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}$;
- (iii) $(\alpha \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \alpha (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$;
- (iv) $\mathbf{0} \cdot \mathbf{0} = 0$ e, para qualquer $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} > 0$;

para quaisquer $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^N$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. O espaço vectorial \mathbb{R}^N munido do produto interno anterior designa-se por **espaço euclidiano**. Este produto interno induz a norma seguinte, denominada **norma euclidiana**.

Definição 1.2.2. *Seja $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ arbitrário. Definimos a **norma** de \mathbf{x} por*

$$\|\mathbf{x}\| = \|(x_1, \dots, x_N)\| = \sqrt{(x_1, \dots, x_N) \cdot (x_1, \dots, x_N)} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_N^2}.$$

Do mesmo que modo para o produto interno, podemos definir várias normas em \mathbb{R}^N . No entanto, qualquer definição de norma, terá de satisfazer às propriedades seguintes:

- (i) $\|\mathbf{x}\| > 0$ se $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ e $\|\mathbf{x}\| = 0$ se e só se $\mathbf{x} = \mathbf{0}$;
- (ii) $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\|\mathbf{x}\|$;
- (iii) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ (desigualdade triangular);

para quaisquer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$ e qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$. A propriedade (iii) acima é, ainda, válida para um número finito de parcelas:

$$\|\mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_k\| \leq \|\mathbf{x}_1\| + \cdots + \|\mathbf{x}_k\|.$$

Deste modo, \mathbb{R}^N chama-se um espaço vectorial normado e pode-se provar a propriedade seguinte, denominada **desigualdade de Cauchy-Schwarz**,

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|,$$

válida para quaisquer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$. Recordando que os elementos de \mathbb{R}^N são vectores, definimos a **projectão do vector \mathbf{x} sobre o vector \mathbf{y}** como sendo o vector

$$\mathbf{p} = p\mathbf{y}, \quad \text{com } p = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|^2}.$$

No caso particular de $\mathbf{y} = \mathbf{e}_k$, a projectão de \mathbf{x} sobre \mathbf{e}_k é $\mathbf{p} = x_k \mathbf{e}_k$. Define-se o **ângulo entre dois vectores** não nulos \mathbf{x} e \mathbf{y} por θ , onde

$$\cos(\theta) = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}, \quad \theta \in [0, \pi].$$

Sai desta definição que \mathbf{x} e \mathbf{y} são **vectores perpendiculares**, ou **ortogonais**, se

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0.$$

Para os elementos da base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_N\}$ tem-se

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j, \end{cases} \quad \|\mathbf{e}_i\| = 1,$$

e, assim, dizemos que $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_N\}$ é uma **base ortonormada** de \mathbb{R}^N .

Definição 1.2.3. *Sejam $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)$ dois quaisquer elementos de \mathbb{R}^N . Chama-se **distância** de \mathbf{x} a \mathbf{y} ao real (não negativo) seguinte:*

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_N - y_N)^2}.$$

Qualquer distância d que se possa definir em \mathbb{R}^N , tem de satisfazer às propriedades seguintes:

- (i) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ e $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ se e só se $\mathbf{x} = \mathbf{y}$;
- (ii) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ (propriedade comutativa);
- (iii) $d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ (desigualdade triangular);

para quaisquer $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^N$.

Prenda-mo-nos agora com algumas noções topológicas propriamente ditas. Sejam $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^N$ e $r > 0$. Definem-se a **bola aberta** de centro \mathbf{a} e raio r por

$$B(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < r\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < r\}$$

e a **bola fechada** de centro \mathbf{a} e raio r por

$$\overline{B(\mathbf{a}, r)} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \leq r\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leq r\}.$$

Na definição seguinte enumeramos as noções topológicas mais importantes.

Definição 1.2.4. *Sejam A um subconjunto de \mathbb{R}^N , com $N \in \mathbb{N}$, e $\mathbf{a} \in A$.*

1. *Diz-se que \mathbf{a} é um **ponto interior** do conjunto A , se existir uma bola aberta $B(\mathbf{a}, r)$ totalmente contida em A . O conjunto de todos os pontos interiores a A designa-se **interior** do conjunto A e denota-se por $\text{int}A$.*
2. *Diz-se que \mathbf{a} é um **ponto exterior** ao conjunto A , se existir uma bola aberta $B(\mathbf{a}, r)$ que não intersecte o conjunto A . O conjunto de todos os pontos exteriores a A designa-se **exterior** do conjunto A e denota-se por $\text{ext}A$.*
3. *Diz-se que \mathbf{a} é um **ponto fronteiro** ao conjunto A , se toda a bola aberta $B(\mathbf{a}, r)$ intersecta o conjunto A bem como o seu conjunto complementar, $\mathbb{R}^N \setminus A$. O conjunto de todos os pontos fronteiros a A designa-se **fronteira** do conjunto A e denota-se por $\text{fr}A$.*
4. *Diz-se que \mathbf{a} é um **ponto aderente** ao conjunto A , se for um ponto interior ou fronteiro ao conjunto A . O conjunto de todos os pontos aderentes de A designa-se **aderência**, ou **fecho**, do conjunto A , denota-se por $\text{ad}A$ e tem-se $\text{ad}A = \text{int}A \cup \text{fr}A$.*
5. *Diz-se que \mathbf{a} é um **ponto de acumulação** do conjunto A , se toda a bola aberta $B(\mathbf{a}, r)$ contém, pelo menos, um ponto de A distinto de \mathbf{a} . O conjunto de todos os pontos de acumulação de A designa-se **derivado** do conjunto A e denota-se por A' .*
6. *Diz-se que \mathbf{a} é um **ponto isolado** do conjunto A , se existir uma bola aberta $B(\mathbf{a}, r)$ que não intersecte nenhum outro ponto de A distinto de \mathbf{a} .*

Um subconjunto A de \mathbb{R}^N diz-se um **conjunto aberto**, se

$$A = \text{int}A,$$

e diz-se um **conjunto fechado**, se

$$A = \text{ad}A.$$

1.3 Sucessões de vectores

Nesta secção introduzimos as sucessões numéricas de termos vectoriais. Usamos aqui a notação \mathbb{R}^M em vez de \mathbb{R}^N para, como vamos ver a seguir, não confundir o índice n habitual na notação das sucessões com a dimensão de espaço euclidiano.

Definição 1.3.1. *Uma **sucessão** numérica infinita de termos **vectoriais** é uma função de variável natural e com valores vectoriais, digamos em \mathbb{R}^M . Usando a escrita habitual para as funções, uma sucessão, digamos \mathbf{f} , escreve-se da forma seguinte:*

$$\begin{aligned} \mathbf{f} : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R}^M \\ n &\mapsto (f_1(n), \dots, f_M(n)). \end{aligned}$$

Por simplicidade de escrita, designamos apenas por sucessão vectorial qualquer sucessão numérica infinita de termos vectoriais. Para distinguir das sucessões vectoriais, as sucessões numéricas de termos reais serão referidas como sucessões escalares. As considerações feitas para as sucessões escalares são também válidas para as sucessões vectoriais. Assim, os vectores $\mathbf{f}(1) = (f_1(1), \dots, f_M(1))$, $\mathbf{f}(2) = (f_1(2), \dots, f_M(2))$, \dots , $\mathbf{f}(n) = (f_1(n), \dots, f_M(n))$, \dots denominam-se **termos da sucessão**: primeiro termo, segundo termo, \dots , n -ésimo termo, \dots . O contradomínio da função \mathbf{f} denomina-se **conjunto dos termos da sucessão**. Usando a notação habitual de letras indexadas nos números naturais, denotamos os termos da sucessão acima por $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n, \dots$, cuja escrita na forma vectorial é a seguinte:

$$\mathbf{u}_1 = (u_{1_1}, u_{1_2}, \dots, u_{1_M}), \mathbf{u}_2 = (u_{2_1}, u_{2_2}, \dots, u_{2_M}), \dots, \mathbf{u}_n = (u_{n_1}, u_{n_2}, \dots, u_{n_M}), \dots;$$

onde u_{n_k} designa a n -ésima componente do vector \mathbf{u}_k . Deste modo, verifica-se que cada sucessão em \mathbb{R}^M de termo geral \mathbf{u}_n determina M sucessões escalares de termos gerais

$$u_{n_k}, \quad k = 1, \dots, M.$$

As sucessões u_{n_k} designam-se **sucessões componentes** ou **sucessões coordenadas** da sucessão \mathbf{u}_n . Por exemplo, u_{n_3} é a sucessão terceira componente, ou a sucessão terceira coordenada, da sucessão \mathbf{u}_{n_M} .

Exercício exemplo 1.3.1. *Indique as sucessões componentes da sucessão vectorial seguinte:*

$$\mathbf{u}_n = \left(\frac{1}{n}, 2^n, \ln(n+1) \right).$$

As operações algébricas de **soma** e **subtracção** de sucessões vectoriais \mathbf{u}_n e \mathbf{v}_n definem-se, como habitualmente, por:

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v})_n = \mathbf{u}_n + \mathbf{v}_n \quad \text{e} \quad (\mathbf{u} - \mathbf{v})_n = \mathbf{u}_n - \mathbf{v}_n.$$

A multiplicação de uma sucessão vectorial \mathbf{u}_n por um escalar α define-se por:

$$(\alpha \mathbf{u})_n = \alpha \mathbf{u}_n.$$

Muitas das definições e resultados sobre sucessões escalares podem ser estendidos às sucessões vectoriais. No entanto, aqui, iremos apenas prender-nos com as noções e alguns resultados sobre sucessão limitada e sucessão convergente.

Definição 1.3.2. Uma *sucessão* vectorial \mathbf{u}_n é *limitada*, se

$$\exists C > 0 : \|\mathbf{u}_n\| \leq C.$$

Exercício exemplo 1.3.2. Verifique que a sucessão seguinte é limitada:

$$\mathbf{u}_n = \left(\frac{1}{n}, e^{-n}, (-1)^n \right).$$

Proposição 1.3.1. Uma sucessão vectorial \mathbf{u}_n em \mathbb{R}^M , $\mathbf{u}_n = (u_{n_1}, \dots, u_{n_M})$, é limitada se e só se cada uma das suas sucessões componentes \mathbf{u}_{n_k} , com $k = 1, \dots, M$, é uma sucessão limitada.

SEM DEMONSTRAÇÃO: Ver, por exemplo, Campos Ferreira p. 30.

Exercício exemplo 1.3.3. Usando a proposição anterior, verifique que a sucessão seguinte não é limitada:

$$\mathbf{u}_n = \left(\sqrt{n}, \frac{\ln(n+1)}{n} \right).$$

Definição 1.3.3. Uma *sucessão* vectorial \mathbf{u}_n de termos em \mathbb{R}^M diz-se *convergente* para $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^M$, se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists p = p(\varepsilon) \in \mathbb{N} : (\forall n \in \mathbb{N} \text{ e } n > p) \Rightarrow \|\mathbf{u}_n - \mathbf{a}\| < \varepsilon.$$

O vector \mathbf{a} da definição anterior chama-se **limite da sucessão** e, tal como para as sucessões escalares, escrevemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{u}_n = \mathbf{a}.$$

Exercício exemplo 1.3.4. Usando a definição, mostre que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n-1}{n}, 0, \frac{1}{3^n} \right) = (1, 0, 0).$$

Proposição 1.3.2. Uma sucessão vectorial \mathbf{u}_n em \mathbb{R}^M , $\mathbf{u}_n = (u_{n_1}, \dots, u_{n_M})$, é convergente para $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^M$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_M)$, se e só se cada uma das suas sucessões componentes u_{n_k} converge para a_k , com $k = 1, \dots, M$.

SEM DEMONSTRAÇÃO: Ver, por exemplo, Campos Ferreira p. 29.

Desta proposição decorre que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{u}_n = \mathbf{a} \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n_1} = a_1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n_2} = a_2, \quad \dots, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n_M} = a_M.$$

Exercício exemplo 1.3.5. Usando a proposição anterior, verifique que a sucessão seguinte é divergente:

$$\mathbf{u}_n = \left(e^{-n}, \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n, (-1)^n \right).$$

Proposição 1.3.3. Sejam \mathbf{u}_n e \mathbf{v}_n sucessões vectoriais convergentes em \mathbb{R}^M e α_n uma sucessão escalar convergente em \mathbb{R} . Então as sucessões vectoriais $\mathbf{u}_n + \mathbf{v}_n$, $\mathbf{u}_n - \mathbf{v}_n$ e $\alpha_n \mathbf{u}_n$ são convergentes em \mathbb{R}^M e as sucessões escalares $\mathbf{u}_n \cdot \mathbf{v}_n$ e $\|\mathbf{u}_n\|$ são convergentes em \mathbb{R} .

SEM DEMONSTRAÇÃO: Ver, por exemplo, Campos Ferreira p. 29.

1.4 Funções reais de várias variáveis

Este capítulo centra-se no estudo de funções do tipo

$$f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R},$$

com $N \in \mathbb{N}$, isto é, funções cujos objectos têm várias variáveis e as imagens estão em \mathbb{R} . Por isto, estas funções recebem, habitualmente, o nome de **campos escalares** para as distinguir dos campos vectoriais, cujas imagens estão em \mathbb{R}^M , com $M \in \mathbb{N}$ não necessariamente igual a N . O domínio da função f , que iremos denotar por \mathbb{D}_f , é o subconjunto de \mathbb{R}^N onde a função está definida. O contra-domínio é o subconjunto de \mathbb{R} onde a função toma valores. O gráfico da função f acima é o subconjunto de \mathbb{R}^{N+1} seguinte

$$\text{Graf}(f) = \{(\mathbf{x}, x) \in \mathbb{R}^{N+1} : x = f(\mathbf{x}), \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^N\}.$$

Como se depreende, é apenas possível esboçar de forma realística os domínios de funções reais de duas ou três variáveis. O domínio de uma função de duas variáveis é esboçado no plano gerado pelo sistema de eixos cartesianos das abcissas e das ordenadas, habitualmente denominados eixo dos xx e eixo dos yy , respectivamente. O domínio de uma função de três variáveis é esboçado no espaço gerado pelo sistema de eixos cartesianos das abcissas, das ordenadas e das cotas, habitualmente denominados eixo dos xx , eixo dos yy e eixo dos zz , respectivamente.

Exercício exemplo 1.4.1. *Determine e esboce os domínios das funções seguintes:*

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2} \quad e \quad g(x, y, z) = \ln[1 - (x^2 + y^2 + z^2)].$$

Do mesmo modo, é apenas possível esboçar, com acuidade geométrica realística, os gráficos de funções reais de duas variáveis apenas. O gráfico de uma função de duas variáveis esboça-se num sistemas de três eixos cartesianos, fazendo corresponder cada ponto do domínio, desenhado no plano gerado pelos eixos dos xx e dos yy , a um único ponto no eixo dos zz .

Exercício exemplo 1.4.2. *Esboce os gráficos das funções seguintes:*

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad e \quad g(x, y) = \begin{cases} \sqrt{1 - (x^2 + y^2)} & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

Assim, iremos estudar, apenas, funções reais de duas ou, quanto muito, três variáveis, uma vez que para mais do que três variáveis as interpretações geométricas já são mais complicadas. Diga-se, em abono da verdade, que esta opção será, na maioria das situações, para simplificar os cálculos.

Definição 1.4.1. *Sejam f uma função real de $N \in \mathbb{N}$ variáveis reais e c uma constante real. Chama-se **conjunto de nível** c da função f ao subconjunto de \mathbb{R}^N onde f atinge o valor c , isto é,*

$$N_c(f) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : f(\mathbf{x}) = c\},$$

sendo c denominado nível da função.

Em particular, no caso de funções de duas variáveis, o conjunto de nível designa-se por **linha de nível** e, no caso de funções de três variáveis, por **superfície de nível**.

Exercício exemplo 1.4.3. *Determine e esboce os conjuntos de nível $c = -9$, $c = -4$, $c = -1$, $c = 0$, $c = 1$, $c = 4$ e $c = 9$ da função $f(x, y) = 4y^2 - x^2$. A partir das linhas de nível, esboce o gráfico da função.*

1.5 Exercícios

1. Considere a função seguinte:

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^3}{2xy}.$$

Determine:

a) $f(y, x)$; b) $f(-x, -y)$; c) $f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$; d) $\frac{1}{f(x, y)}$.

2. Determine o domínio de cada uma das funções seguintes e represente-o graficamente:

a) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{x-y}}$; b) $f(x, y) = \arcsen\left(\frac{y}{x}\right)$;

c) $f(x, y) = \sqrt{x \operatorname{sen} y}$; d) $f(x, y) = \operatorname{tg}\left(\frac{x-y}{x^2+y^2}\right)$;

e) $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 - z)$; f) $f(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$.

3. Para cada um dos conjuntos representados na questão anterior, indique:

- o conjunto dos pontos interiores;
- o conjunto dos pontos exteriores;
- o conjunto dos pontos fronteiros;
- o conjunto dos pontos de acumulação;
- a aderência.

4. Represente graficamente as linhas ou superfícies de nível correspondentes aos valores c indicados das funções seguintes:

a) $f(x, y) = x^2 + y^2$, para $c = 0, 1, 4, 9$;

b) $f(x, y) = e^{xy}$, para $c = e^{-2}, e^{-1}, 1, e, e^2$;

c) $f(x, y, z) = x + y + z$, para $c = -1, c = 0, c = 1$;

d) $f(x, y, z) = \operatorname{sen}(x^2 + y^2 + z^2)$, para $c = -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1$.

5. Determine os conjuntos de nível das funções seguintes:

a) $f(x, y) = x^2 + 2y^2$; b) $f(x, y) = x^2 - y^2$;

c) $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2$; d) $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2$.

6. A partir das linhas de nível, esboce os gráficos das funções seguintes:

a) $f(x, y) = x^2 + 2y^2$; b) $f(x, y) = x^2 - y^2$;

c) $f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$; d) $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$.

Capítulo 2

Continuidade

2.1 Limites

A noção de limite para funções de várias variáveis é em tudo idêntica à mesma para funções de apenas uma variável. A principal diferença é que o módulo dos objectos é agora substituído pela norma. Por outro lado, ainda relativamente aos objectos, os intervalos abertos são substituídos por discos abertos em dimensão $N = 2$ e por esferas abertas em dimensão $N = 3$. A definição seguinte é habitualmente denominada por definição de limite segundo Cauchy.

Definição 2.1.1. *Sejam $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ uma função escalar e \mathbf{a} um ponto de acumulação do domínio \mathbb{D}_f . Diz-se que um ponto $b \in \mathbb{R}$ é o **limite da função** f no ponto \mathbf{a} , ou quando \mathbf{x} tende para \mathbf{a} , se*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : (\forall \mathbf{x} \in \mathbb{D}_f \text{ e } \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta) \implies |f(\mathbf{x}) - b| < \varepsilon.$$

No caso de existir tal $b \in \mathbb{R}$, escrevemos

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f = b.$$

Observemos que \mathbf{a} tem de ser um ponto de acumulação do domínio \mathbb{D}_f , pois, caso contrário, existiria sempre um $\delta > 0$ para o qual

$$(B(\mathbf{a}, \delta) \setminus \{\mathbf{a}\}) = \emptyset$$

e a implicação

$$(\forall \mathbf{x} \in \mathbb{D}_f \text{ e } \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta) \implies |f(\mathbf{x}) - b| < \varepsilon$$

seria verdadeira para qualquer $b \in \mathbb{R}$.

Para o cálculo de limites de funções escalares, procede-se como no caso de funções de uma variável apenas. Começamos por tentar determinar o valor da função no ponto onde se pretende calcular o limite. Se a função estiver definida nesse ponto, então o limite será o valor que a função aí toma. Mesmo que a função não esteja definida nesse ponto, podemos determinar o limite em $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$, desde que não se obtenha uma indeterminação.

Exercício exemplo 2.1.1. Calcule o limite seguinte:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,\pi)} \frac{\text{sen}(x+y)}{x+y}.$$

Os casos em que se obtêm indeterminações são mais delicados, pois, tal como para funções de uma só variável, temos de levantar essas indeterminações. Recordemos que as indeterminações principais existentes em $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ são:

$$\infty - \infty; \quad 0 \times \infty; \quad 1^\infty; \quad \infty^0.$$

A análise da existência ou não destes limites, consiste em reduzir esse estudo a limites de funções de uma só variável. Nos casos mais simples, podemos usar propriedades da função em estudo para tornar o cálculo do limite mais simples.

Exercício exemplo 2.1.2. Calcule o limite seguinte:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty,0)} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}.$$

Nas situações mais complicadas, não é possível levantar a indeterminação e proceder como anteriormente. Nestes casos, temos de analisar a forma como nos podemos aproximar do ponto em que se pretende calcular o limite para obtermos alguma informação sobre a existência ou não de limite. Se a função em estudo tem limite nesse ponto, para provar que o limite existe e é determinada quantidade, temos de usar a definição. A informação de que o limite vai ser determinada quantidade, é nos dada por um dos dois processos seguintes:

Limites direccionais - este processo consiste em calcular os denominados limites direccionais de uma função escalar, isto é, em calcular os limites segundo as várias direcções possíveis de aproximação ao ponto onde se pretende calcular o limite.

Exercício exemplo 2.1.3. Calcule os limites direccionais da função seguinte

$$f(x, y) = \frac{2x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$$

no ponto $(x, y) = (0, 0)$.

Limites repetidos - este processo consiste em reduzir o cálculo do limite de uma função real de N variáveis ao cálculo de N limites sucessivos (ou repetidos). Na verdade, este processo é um caso particular do anterior, pois calculamos, apenas, os limites segundo as direcções dos eixos das coordenadas.

Exercício exemplo 2.1.4. Calcule os limites repetidos da função seguinte

$$f(x, y) = \frac{2x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$$

no ponto $(x, y) = (0, 0)$.

No entanto, convém frisar, que mesmo no caso dos limites anteriores existirem e serem iguais a determinada quantidade, não podemos concluir que o limite existe e que é igual a essa quantidade. Isto decorre do facto de num ponto em \mathbb{R}^N , com $N \geq 2$, passarem infinitas direcções, incluindo as dos eixos de coordenadas. E, por conseguinte, para uma quantidade finita de direcções o limite pode existir e ser o mesmo, mas ficar sempre a possibilidade de haver uma direcção onde o limite venha a não existir ou ser diferente. Nestes casos, o único processo que nos permite concluir que tal limite existe, é usar a definição.

Exercício exemplo 2.1.5. *Usando a definição, mostre que*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^3 - y^3}{x^2 + y^2} = 0.$$

De ora em diante e apenas por simplicidade de apresentação e de cálculo, todos os exemplos que vamos considerar são de limites na origem. Para estudar a existência de limites noutros pontos, procede-se de modo inteiramente análogo. Por outro lado, sempre que possível, podemos fazer uma mudança de variável para recuperar o caso na origem. Convém, no entanto, realçar o caso em que o ponto onde se pretende calcular o limite tem todas as componentes infinitas. Neste caso, a definição de limite (Definição 2.1.1) sofre uma ligeira adaptação:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \left(\forall \mathbf{x} \in \mathbb{D}_f \text{ e } \|\mathbf{x}\| > \frac{1}{\delta} \right) \implies |f(\mathbf{x}) - b| < \varepsilon.$$

Esta definição ainda é válida quando apenas uma das componentes do ponto onde se pretende calcular o limite é infinito.

Exercício exemplo 2.1.6. *Usando a definição, mostre que*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (+\infty, +\infty)} \frac{x + y}{x^2 + y^2} = 0.$$

Muitas das propriedades dos limites de funções reais de variável real permanecem válidas para os limites de funções escalares.

Proposição 2.1.1. *O limite de uma função $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ num ponto de acumulação \mathbf{a} do domínio \mathbb{D}_f quando existe, é único.*

DEMONSTRAÇÃO - EXERCÍCIO: Análoga à demonstração para funções reais de variável real.

Este resultado de unicidade do limite é muito útil na prática. De facto, a proposição anterior obriga a que, quando o limite exista, têm de ser iguais todos os limites direccionais e, por maioria de razão, os limites repetidos. Assim, se verificarmos que para determinada função não coincidem dois dos seus limites direccionais, podemos automaticamente concluir que a função não tem limite no ponto em consideração.

Exercício exemplo 2.1.7. *Mostre que a função seguinte não tem limite no ponto $(0, 0)$:*

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

São, ainda, válidas as propriedades de adição, subtração, multiplicação, divisão e multiplicação por escalar de limites, tal como no caso de funções reais de variáveis reais. A proposição seguinte dá-nos uma definição equivalente de limite, conhecida por definição de limite segundo Heine.

Proposição 2.1.2. *Sejam f uma função escalar e \mathbf{a} um ponto de acumulação de \mathbb{D}_f . Tem-se:*

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = b \iff (\forall \mathbf{x}_n \in \mathbb{D}_f \text{ e } \mathbf{x}_n \neq \mathbf{a} : \mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{a} \implies f(\mathbf{x}_n) \rightarrow b).$$

*Demonstração.*¹

A proposição anterior tem, também, interesse prático no cálculo de limites. Tal como os limites direccionais, este resultado é muito útil para mostrar que o limite não existe.

Exercício exemplo 2.1.8. *Usando a proposição anterior, considere as sucessões \mathbf{x}_n e \mathbf{y}_n a seguir indicadas para mostrar que o limite seguinte não existe:*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad \mathbf{x}_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{2n} \right), \quad \mathbf{y}_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right).$$

Outra propriedade dos limites que convém destacar, é a de limite de funções compostas.

Proposição 2.1.3. *Sejam $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e \mathbf{a} um ponto de acumulação de \mathbb{D}_f suponhamos que existe o limite $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = b$. Então, se b é um ponto de acumulação de \mathbb{D}_g e se existir o limite $\lim_{x \rightarrow b} g(x)$, também existe o limite da função composta $g \circ f$ no ponto \mathbf{a} e*

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} (g \circ f)(\mathbf{x}) = \lim_{x \rightarrow b} g(x).$$

Demonstração.

Exercício exemplo 2.1.9. *Usando a proposição anterior, mostre que*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \cos \left(\frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = 1.$$

2.2 Continuidade

A noção de continuidade está intimamente ligada à noção de limite. Tal como para os limites, a continuidade de funções escalares é uma generalização da correspondente noção para funções reais de uma só variável.

Definição 2.2.1. *Sejam $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ e \mathbf{a} um ponto de acumulação de domínio \mathbb{D}_f . Diz-se que a função f é **contínua** no ponto \mathbf{a} , se*

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$$

ou, equivalentemente, se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : (\forall \mathbf{x} \in \mathbb{D}_f \text{ e } \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta) \implies |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| < \varepsilon.$$

¹ Observe-se que o natural n , índice da sucessão vectorial \mathbf{x}_n , não é necessariamente igual à dimensão do conjunto de partida da função f .

A Proposição 2.1.2 dá-nos a seguinte condição necessária e suficiente de continuidade.

Proposição 2.2.1. *Sejam f uma função escalar e \mathbf{a} um ponto de acumulação de \mathbb{D}_f . Tem-se:*

$$f \text{ é contínua em } \mathbf{a} \iff (\forall \mathbf{x}_n \in \mathbb{D}_f \text{ e } \mathbf{x}_n \neq \mathbf{a} : \mathbf{x}_n \longrightarrow \mathbf{a} \implies f(\mathbf{x}_n) \longrightarrow f(\mathbf{a})).$$

DEMONSTRAÇÃO - EXERCÍCIO: Análoga à demonstração da Proposição 2.1.2².

A função f diz-se **contínua num conjunto** $A \subseteq \mathbb{D}_f$, se for contínua em todos os pontos de A . Diremos que é contínua, sem especificar onde, se for contínua em \mathbb{D}_f .

As propriedades de continuidade das funções reais de variável real estendem-se naturalmente às funções escalares. Assim, a soma, a subtração, o produto e a multiplicação por escalar de funções contínuas ainda é uma função contínua. A função identidade, as transformações lineares e os polinómios de N variáveis são funções contínuas. Todas as funções elementares são funções contínuas nos seus domínios de definição.

De um modo geral, todas as funções que encontramos são contínuas, excepto nos possíveis pontos onde o denominador se anula ou onde a função não está definida. Na prática, justificase que determinada função é contínua no seu domínio de definição, dizendo que as funções elementares que a compõem são contínuas.

Por vezes, podemos prolongar por continuidade uma função até um ponto fora do seu domínio. Mas, como nos diz a definição de limite, esse ponto terá de ser um ponto de acumulação do domínio.

Exercício exemplo 2.2.1. *Estude a função seguinte quanto à continuidade:*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

O exemplo seguinte mostra que nem sempre é possível prolongar, por continuidade, uma função até um ponto fora do seu domínio.

Exercício exemplo 2.2.2. *Verifique se é possível prolongar por continuidade a função seguinte ao ponto $(x, y) = (0, 0)$:*

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

Tal como fizemos para os limites na Proposição 2.1.3, e pelo seu interesse prático, convém destacar a propriedade seguinte sobre a continuidade de funções compostas.

Proposição 2.2.2. *Sejam $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $\mathbf{a} \in \mathbb{D}_f$, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $b = f(\mathbf{a})$. Então a função composta $g \circ f$ é contínua no ponto \mathbf{a} .*

DEMONSTRAÇÃO - EXERCÍCIO: Análoga à demonstração da Proposição 2.1.3.

Exercício exemplo 2.2.3. *Usando a proposição anterior, estude a função seguinte quanto à continuidade:*

$$f(x, y) = \begin{cases} \cos\left(\frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

²Ver nota de roda-pé da página 12.

2.3 Exercícios

1. Calcule os limites seguintes:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow 2} e^{-\frac{1}{x^2(y-1)^2}} \right\}; & \text{b)} \quad & \lim_{y \rightarrow 2} \left\{ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{y}{x}\right)^x \right\}; & \text{c)} \quad & \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\operatorname{sen}^2 y}{3xy^2}\right)^x \right\}; \\ \text{d)} \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ \lim_{y \rightarrow +\infty} \left[1 + \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{y}\right]^{4y} \right\}; & \text{e)} \quad & \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{y}{x}\right)^x - 1}{y} \right\}; \\ \text{f)} \quad & \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{\ln(1+y)}{x}\right)^x - 1}{y} \right\}; & \text{g)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} \left[1 + \frac{1}{x} \ln(1 + xy)\right]^{\frac{2}{\operatorname{tg} y}} \right\}; \\ \text{h)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{\operatorname{tg} x}{y}\right)^{y^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right)} - 1}{\operatorname{sen} x} \right\}; & \text{i)} \quad & \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[1 + \frac{1}{y} \ln\left(1 + \frac{y}{x}\right)\right]^{\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}} \right\}. \end{aligned}$$

2. Considere a função seguinte:

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}.$$

Mostre que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right] \neq \lim_{y \rightarrow 0} \left[\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right]$$

e conclua que $f(x, y)$ não tem limite no ponto $(0, 0)$.

3. Seja

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}.$$

Mostre que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \left[\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right] = 0,$$

mas $f(x, y)$ não tem limite no ponto $(0, 0)$.

4. Discuta a existência dos limites seguintes, usando a definição para provar os que existem:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}; & \text{b)} \quad & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; & \text{c)} \quad & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)x^2 y^2}; \\ \text{d)} \quad & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}; & \text{e)} \quad & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2 - 1 + (x - 1)^2}; & \text{f)} \quad & \lim_{(x,y) \rightarrow (+\infty, +\infty)} \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4}; \\ \text{g)} \quad & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left[x + y \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right]; & \text{h)} \quad & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}; & \text{i)} \quad & \lim_{(x,y) \rightarrow (+\infty, +\infty)} \frac{x + y}{x^2 - xy + y^2}. \end{aligned}$$

5. Calcule os limites seguintes:

$$\text{a) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} e^{-\frac{1}{x^2(y-1)^2}}; \quad \text{b) } \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \text{c) } \lim_{(x,y) \rightarrow (+\infty, +\infty)} \frac{x^2 + y^2}{e^{x+y}}.$$

6. Usando a composição de limites, calcule os limites seguintes:

$$\text{a) } \lim_{(x,y) \rightarrow (+\infty, +\infty)} \frac{\text{sen}(x+y)}{x+y}; \quad \text{b) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{\text{sen}(xy)}{x}; \quad \text{c) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2)^{(x^2+y^2)^2}.$$

7. Estude as funções seguintes quanto à continuidade:

$$\text{a) } f(x, y) = \text{arctg} \left(\frac{1}{x^2 - y} \right); \quad \text{b) } f(x, y) = \cos \left(\frac{1}{xy} \right); \quad \text{c) } f(x, y) = \ln |1 - xy|;$$

$$\text{d) } f(x, y) = \begin{cases} x \text{sen} \left(\frac{1}{y} \right) & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0; \end{cases} \quad \text{e) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{se } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{se } x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

$$\text{f) } f(x, y) = \begin{cases} \text{sen} \left(\frac{x}{y} \right) & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{se } (x, y) = (0, 0); \end{cases} \quad \text{g) } f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{se } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 2 - (x^2 + y^2) & \text{se } x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

8. Determine os valores de α e β de modo que as funções seguintes sejam contínuas em \mathbb{R}^2 :

$$\text{a) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ \alpha & \text{se } (x, y) = (0, 0); \end{cases} \quad \text{b) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ \beta & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

9. Verifique se é possível prolongar por continuidade as funções seguintes:

$$\text{a) } f(x, y) = \frac{y^3}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0); \quad \text{b) } f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x - y}, \quad y \neq x.$$

Capítulo 3

Derivabilidade

3.1 Derivadas parciais

Consideremos uma função escalar $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, N natural superior a 1, e seja $\mathbf{a} \in \text{int}(\mathbb{D}_f)$, com $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_N)$. Fixando $x_2 = a_2, \dots, x_N = a_N$, a função

$$f(x_1, a_2, \dots, a_N)$$

passa a ser uma função de uma só variável independente x_1 . Suponhamos que esta função é derivável, isto é, existe e é finito o limite seguinte

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h, a_2, \dots, a_N) - f(x_1, a_2, \dots, a_N)}{h},$$

para qualquer x_1 , tal que $(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{D}_f$. Então a derivada (ordinária) de $f(x_1, a_2, \dots, a_N)$ em a_1 recebe o nome de **derivada parcial de f em relação à variável x_1** no ponto (a_1, \dots, a_N) e denotá-mo-la por um dos símbolos seguintes:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}); \quad f'_{x_1}(\mathbf{a}); \quad (D_{x_1}f)(\mathbf{a}).$$

Definição 3.1.1. *Sejam $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ uma função escalar e $\mathbf{a} \in \text{int}(\mathbb{D}_f)$, com $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_N)$. Suponhamos que a função $f(a_1, \dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots, a_N)$ é uma função derivável em $x_k = a_k$ e tal que $(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{D}_f$. Então, chama-se **derivada parcial de primeira ordem em relação à variável x_k** ao seguinte limite*

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k + h, a_{k+1}, \dots, a_N) - f(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots, a_N)}{h}.$$

Exercício exemplo 3.1.1. *Usando a definição, calcule as duas derivadas parciais de primeira ordem da função $f(x, y) = xy + \text{sen}(x + y)$ no ponto $(x, y) = (0, \pi)$.*

Quando, para determinada função escalar f , existe a derivada parcial f'_{x_k} , $k = 1, \dots, N$, num ponto $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k, \dots, a_N) \in \mathbb{D}_f$, esta coincide com a derivada ordinária da função real de uma variável real apenas $f(a_1, \dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots, a_N)$ no ponto $x_k = a_k$. Assim, podemos utilizar os formulários de derivação das funções reais, de uma variável real apenas, para o cálculo

das derivadas parciais de funções escalares. Na prática, para calcular a derivada parcial de uma função escalar f em ordem a determinada variável, consideramos todas as outras variáveis como constantes e aplicamos as fórmulas de derivação para funções reais, de uma variável real apenas, em relação a essa variável.

Exercício exemplo 3.1.2. *Usando os formulários de derivação de funções reais de uma variável real apenas, calcule as duas derivadas parciais de primeira ordem da função $f(x, y) = xy + \text{sen}(x + y)$ no ponto $(x, y) = (0, \pi)$.*

Interpretação geométrica

Consideremos o caso particular $N = 2$ de uma função real f de duas variáveis reais (x, y) . No caso de existirem, as duas derivadas parciais de primeira ordem, num ponto $\mathbf{a} = (a, b) \in \text{int}(\mathbb{D}_f)$, são dadas por:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h}.$$

O gráfico de $f(x, y)$ é uma superfície que se esboça no sistema de eixos cartesianos xyz . Seccionando a superfície $z = f(x, y)$ pelo plano $y = b$, obtemos uma função de uma variável apenas (linha) de equação

$$z = f(x, b) = \varphi(x).$$

Esta linha esboça-se num plano paralelo ao plano definido pelos eixos dos xx e dos yy e tem-se

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \varphi'(a).$$

Do que se conhece para funções de uma variável apenas, $f'_x(a, b)$ pode ser interpretada como o declive da recta tangente ao gráfico da linha $z = \varphi(x)$ no ponto $x = a$, isto é,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \text{tg } \alpha,$$

onde α é o ângulo formado pela tangente ao gráfico da linha $z = \varphi(x)$ no ponto $x = a$ e o plano definido pelos eixos dos xx e dos yy . Analogamente,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \text{tg } \beta,$$

sendo β o ângulo formado pela tangente ao gráfico da linha $z = \phi(y)$ no ponto $y = b$ e o plano definido pelos eixos dos xx e dos yy . E a linha $z = \phi(y)$ obtém-se, seccionando, no mesmo ponto (a, b) , a superfície $z = f(x, y)$ pelo plano $x = a$,

3.2 Derivada direccional

Definição 3.2.1. *Sejam $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ uma função escalar, $\mathbf{a} \in \text{int}(\mathbb{D}_f)$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_N)$, e \mathbf{u} um vector arbitrário de \mathbb{R}^N , $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_N)$. Chama-se **derivada** da função f no ponto \mathbf{a} **dirigida** segundo o vector \mathbf{u} ao limite seguinte, quando existe,*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{a})}{h} \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + hu_1, \dots, a_N + hu_N) - f(a_1, \dots, a_N)}{h}.$$

O limite anterior denota-se por um dos símbolos seguintes:

$$f'_{\mathbf{u}}(\mathbf{a}); \quad (D_{\mathbf{u}}f)(\mathbf{a}).$$

No caso de $\|\mathbf{u}\| = 1$, a derivada da função f no ponto \mathbf{a} dirigida segundo o vector \mathbf{u} , chama-se **derivada direccional**. No caso particular de \mathbf{u} ser um vector unitário, digamos $\mathbf{u} = \mathbf{e}_k$, a derivada direccional coincide com a derivada parcial:

$$f'_{\mathbf{e}_k}(\mathbf{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{e}_k) - f(\mathbf{a})}{h} = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a}).$$

Portanto, o conceito de derivada parcial é um caso particular do conceito de derivada dirigida. O significado geométrico da derivada direccional é análogo ao de derivada parcial. Por exemplo, para uma função escalar f de duas variáveis reais (x, y) , tem-se, para qualquer vector unitário $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$,

$$f'_{\mathbf{u}}(a, b) = \text{tg } \gamma,$$

onde γ é o ângulo que a tangente ao gráfico de f , no ponto $(a, b, f(a, b))$ e na direcção de \mathbf{u} , forma com o plano definido pelos eixos dos xx e dos yy .

Exercício exemplo 3.2.1. *Calcule as derivadas dirigidas da função $f(x, y) = xy + \text{sen}(x + y)$, segundo os vectores $\mathbf{u} = (1, 1)$ e $\mathbf{v} = (0, 1)$, no ponto $(x, y) = (0, \pi)$.*

Definição 3.2.2. *Sejam $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ uma função escalar, $\mathbf{a} \in \text{int}(\mathbb{D}_f)$. Suponhamos que existem as derivadas parciais $f'_{x_1}(\mathbf{a}), \dots, f'_{x_N}(\mathbf{a})$. Ao vector de \mathbb{R}^N*

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N}(\mathbf{a}) \right)$$

*chama-se **gradiente** de f no ponto \mathbf{a} e denota-se por um dos símbolos seguintes:*

$$\nabla f(\mathbf{a}); \quad \text{grad}f(\mathbf{a}).$$

Se a função f tiver todas as derivadas parciais em todos os pontos interiores ao seu domínio \mathbb{D}_f , chama-se **função gradiente de f** , à função vectorial seguinte:

$$\begin{aligned} \nabla f : \quad \text{int}(\mathbb{D}_f) &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ (x_1, \dots, x_N) &\mapsto \nabla f(x_1, \dots, x_N). \end{aligned}$$

Exercício exemplo 3.2.2. *Calcule o gradiente da função $f(x, y) = xy + \text{sen}(x + y)$ no ponto $(x, y) = (0, \pi)$ e indique a direcção de maior crescimento da função no ponto $(x, y) = (0, \pi)$.*

Proposição 3.2.1. *Sejam $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ uma função escalar, $\mathbf{a} \in \text{int}(\mathbb{D}_f)$ e \mathbf{u} um vector arbitrário de \mathbb{R}^N . No caso de existirem, a derivada dirigida de f no ponto \mathbf{a} segundo \mathbf{u} e o gradiente de f no mesmo ponto estão relacionados por:*

$$f'_{\mathbf{u}}(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{u}.$$

SEM DEMONSTRAÇÃO: Ver, por exemplo, Campos Ferreira p. 98.

Exercício exemplo 3.2.3. *Usando a proposição anterior, calcule a derivada direccional da função $f(x, y) = xy + \text{sen}(x+y)$, segundo a direcção $\mathbf{u} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, no ponto $(x, y) = (0, \pi)$.*

Interpretação geométrica do gradiente

Usando a proposição anterior e conhecimentos de Geometria Analítica, podemos escrever

$$f'_{\mathbf{u}}(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{u} = \|\nabla f(\mathbf{a})\| \|\mathbf{u}\| \cos \theta, \quad \theta = \angle(\mathbf{u}, \nabla f(\mathbf{a})),$$

desde que $\nabla f(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$. No caso de $\|\mathbf{u}\| = 1$,

$$f'_{\mathbf{u}}(\mathbf{a}) = \|\nabla f(\mathbf{a})\| \cos \theta.$$

Temos $\cos \theta = 1$ quando $\theta = 0$, isto é, o maior valor de $\cos \theta$ é obtido quando seleccionamos \mathbf{u} com a mesma direcção e sentido de $\nabla f(\mathbf{a})$. Então, a derivada direccional tem o valor máximo,

$$f'_{\mathbf{u}}(\mathbf{a}) = \|\nabla f(\mathbf{a})\|,$$

e \mathbf{u} é a direcção de maior crescimento da função. Quando $\theta = \pi$, $\cos \theta = -1$ e corresponde ao caso de \mathbf{u} ter a mesma direcção de $\nabla f(\mathbf{a})$, mas sentido oposto. Neste caso, a derivada direccional tem o valor mínimo,

$$f'_{\mathbf{u}}(\mathbf{a}) = -\|\nabla f(\mathbf{a})\|,$$

e \mathbf{u} é a direcção de maior decrescimento da função. Assim, temos as **interpretações geométricas** seguintes **para o gradiente**:

1. O gradiente de uma função escalar, calculado num ponto interior ao seu domínio, indica-nos a direcção de maior crescimento (gradiente) da função, observada no seu domínio.
2. A norma do gradiente dá-nos a taxa de crescimento da função na sua direcção de maior crescimento.

Como primeira consequência do exposto, verifica-se que o gradiente de uma função f num ponto $\mathbf{a} \in \mathbb{D}_f$ é perpendicular ao conjunto de nível correspondente a esse ponto:

$$\nabla f(\mathbf{a}) \cdot N_c f = 0, \quad \text{onde } c = f(\mathbf{a}), \quad \nabla f(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}.$$

Outra consequência, é a possibilidade de ver o comportamento gráfico de uma função de duas variáveis a partir do conhecimento dos gradientes calculados em alguns pontos do domínio da função.

Definição 3.2.3. Consideremos uma função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de domínio \mathbb{D}_f . Designa-se por **campo de direcções** da função f à correspondência que a cada ponto $(a, b) \in \mathbb{D}_f$, com $\nabla f(a, b) \neq (0, 0)$, associa a direcção das rectas que passam (a, b) e de declive igual a

$$\frac{1}{\|\nabla f(a, b)\|} \nabla f(a, b).$$

O ponto $(a, b) \in \mathbb{D}_f$ é representado no plano xy e a associação que define o campo de direcções pode ser representada por uma seta com a direcção e sentido de $\nabla f(a, b)/\|\nabla f(a, b)\|$. Como o declive de qualquer recta no plano xy é dado por

$$\frac{dy}{dx},$$

em cada ponto $(x, y) \in \mathbb{D}_f$, o declive da seta que representa o campo de direcções corresponde ao declive da curva y solução da equação diferencial seguinte:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}}.$$

Nos casos mais simples, esta equação diferencial pode ser resolvida separando as variáveis e depois integrando a equação. Os casos mais complicados remetemos para o Curso de Equações Diferenciais (ordinárias).

Exercício exemplo 3.2.4. Esboce os campos de direcções da função $f(x, y) = 4 - 2x^2 - y^2$.

3.3 Derivabilidade

Definição 3.3.1. Sejam $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ uma função escalar e $\mathbf{a} \in \text{int}(\mathbb{D}_f)$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_N)$. Diz-se que f é uma **função derivável** no ponto \mathbf{a} , se existir $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ constante tal que, para qualquer $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^N$, $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_N)$, se tem

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \alpha \cdot \mathbf{h} + o(\|\mathbf{h}\|),$$

com \mathbf{h} independente α e $\mathbf{a} + \mathbf{h} \in \mathbb{D}_f$.

A notação $o(\|\mathbf{h}\|)$ quer dizer que $o(\|\mathbf{h}\|)$ é um infinitésimo quando comparado com $\|\mathbf{h}\|$, isto é,

$$\lim_{\|\mathbf{h}\| \rightarrow 0} \frac{o(\|\mathbf{h}\|)}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Na prática, torna-se útil escrever a expressão $f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \alpha \cdot \mathbf{h} + o(\|\mathbf{h}\|)$ na forma seguinte

$$f(a_1 + h_1, \dots, a_N + h_N) = f(a_1, \dots, a_N) + \alpha_1 h_1 + \dots + \alpha_n h_N + o\left(\sqrt{h_1^2 + \dots + h_N^2}\right).$$

Exercício exemplo 3.3.1. Usando a definição, mostre que a função $f(x, y, z) = x^2 + 2x - y - z^2 + 3$ é derivável no ponto $(0, 0, 0)$.

De maneira equivalente, diremos que f é derivável no ponto \mathbf{a} , se existir $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ constante tal que

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \alpha \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|),$$

em todo o ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{D}_f$. Dizer que f é derivável no ponto \mathbf{a} equivale a dizer que o diferencial

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a})$$

pode ser aproximado por uma função linear de \mathbf{h} . Deste modo, podemos dizer que f é derivável no ponto \mathbf{a} , se e só se existir uma única aplicação linear $L_{\mathbf{a}} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + L_{\mathbf{a}}(\mathbf{h}) + o(\|\mathbf{h}\|).$$

Chama-se **derivada de f no ponto \mathbf{a}** , e denota-se por $f'(\mathbf{a})$, à única aplicação linear nas condições anteriores e, neste caso, podemos escrever

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + f'(\mathbf{a})(\mathbf{h}) + o(\|\mathbf{h}\|).$$

Proposição 3.3.1. *Seja $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável num ponto $\mathbf{a} \in \text{int}(\mathbb{D}_f)$. Então:*

1. *A função f é contínua no ponto \mathbf{a} ;*
2. *Para todo o vector $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^N$, existe a derivada dirigida $f'_{\mathbf{u}}(\mathbf{a})$. Em particular, a função f admite todas as derivadas parciais de primeira ordem e, tendo em conta as notações da definição anterior,*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) = \alpha_1, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N}(\mathbf{a}) = \alpha_N,$$

e

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} + o(\|\mathbf{h}\|).$$

Demonstração. A primeira afirmação da proposição anterior permite-nos concluir que, se f não for contínua no ponto \mathbf{a} , então a função também não é derivável nesse ponto. A segunda afirmação permite-nos concluir que, se não existir uma derivada dirigida de f no ponto \mathbf{a} , então a função também não é derivável no ponto \mathbf{a} .

Exercício exemplo 3.3.2. *Usando a resolução do Exercício 3.3.1, indique, sem efectuar mais cálculos, as derivadas parciais $f'_x(0, 0, 0)$, $f'_y(0, 0, 0)$ e $f'_z(0, 0, 0)$.*

A proposição seguinte dá-nos uma condição suficiente de derivabilidade, o que na prática e para justificar a derivabilidade de uma função escalar, nos permite evitar a complicada Definição 3.3.1.

Proposição 3.3.2. *Sejam $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ uma função escalar e $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^N$. Suponhamos que existem e são contínuas, no ponto \mathbf{a} , todas as derivadas parciais de primeira ordem, $f'_{x_1}, \dots, f'_{x_N}$. Então a função f é derivável no ponto \mathbf{a} .*

Demonstração.

Exercício exemplo 3.3.3. *Mostre que para a função seguinte existem todas as derivadas parciais no ponto $(x, y) = (0, 0)$, mas a função não é derivável nesse ponto:*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

As hipóteses da proposição anterior podem ser enfraquecidas. Basta que $N - 1$ das derivadas parciais $f'_{x_1}, \dots, f'_{x_N}$ sejam contínuas no ponto \mathbf{a} . Uma função escalar f para a qual existam e sejam contínuas, num ponto de acumulação do seu domínio, todas as derivadas parciais de primeira ordem, diz-se **função de classe C^1** , ou **função continuamente derivável**, nesse ponto. De um modo geral, dado $k \in \mathbb{N}$, diz-se que f é uma **função de classe C^k** , ou que é uma **função continuamente derivável até à ordem k** , se existirem e forem contínuas todas as derivadas parciais de ordem k . Designam-se por **funções de classe C^0** as funções contínuas e as **função de classe C^∞** , também designadas **funções indefinidamente deriváveis**, são aquelas para as quais existem e são contínuas todas as derivadas parciais de qualquer ordem.

Definição 3.3.2. *Sejam $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ uma função escalar, \mathbf{a} um ponto de \mathbb{R}^N e $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_N)$ um vector de \mathbb{R}^N . Designa-se por **diferencial** da função f no ponto \mathbf{a} relativo ao vector \mathbf{u} ao escalar seguinte*

$$(df)_{\mathbf{u}}(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) u_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_N}(\mathbf{a}) u_N.$$

Resulta da Proposição 3.2.1 que o diferencial de uma função escalar f relativo a um vector, não é mais do que a derivada de f segundo esse mesmo vector, isto é,

$$(df)_{\mathbf{u}}(\mathbf{a}) = f'_{\mathbf{u}}(\mathbf{a}).$$

Se, na definição anterior, escolhermos para vector \mathbf{u} o vector $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_N)$ da Definição 3.3.1, o qual podemos escrever como $\mathbf{h} = (dx_1, \dots, dx_N)$, e não fizermos referência ao ponto \mathbf{a} , obtemos o diferencial seguinte

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_N} dx_N.$$

Esta última expressão do diferencial é habitualmente designada por **diferencial total da função f** .

Exercício exemplo 3.3.4. *Para a função $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, determine o seu diferencial no ponto $(x, y) = (1, 1)$ relativo ao vector $\mathbf{u} = (-1, 1)$. Determine, também, o diferencial total da função f .*

3.4 Derivadas de ordem superior

Se, para cada $k = 1, \dots, N$, a função f da Definição 3.1.1 tiver derivada parcial em ordem k em todos os pontos interiores ao seu domínio \mathbb{D}_f , chama-se **função derivada parcial de f em ordem k** à função seguinte:

$$\begin{aligned} f'_{x_k} : \quad \text{int}(\mathbb{D}_f) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_N) &\longmapsto f'_{x_k}(x_1, \dots, x_N). \end{aligned}$$

Assim, as novas funções f'_{x_k} podem admitir, por sua vez, derivadas parciais. Suponhamos que f'_{x_k} admite derivada parcial em ordem à variável x_j , com $j = 1, \dots, N$, em todos os pontos do domínio $\mathbb{D}_{f'_{x_k}}$. Chama-se (função) **derivada parcial de segunda ordem** de f em relação a x_k , primeiro, e a x_j , depois, à derivada parcial de primeira ordem de f'_{x_k} em relação a x_j . Esta derivada denota-se por um dos símbolos seguintes:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \equiv \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right); \quad f''_{x_k x_j} \equiv (f'_{x_k})'_{x_j}; \quad D_{x_k x_j} f \equiv D_{x_j} (D_{x_k} f).$$

No caso em que $j = k$, isto é, $x_j = x_k$, designamos a derivada parcial de segunda ordem de f em relação a x_k por **derivada quadrada** de f em ordem a x_k e denota-se por um dos símbolos seguintes:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} \equiv \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right); \quad f''_{x_k} \equiv (f'_{x_k})'_{x_k}; \quad D_{x_k^2} f \equiv D_{x_k} (D_{x_k} f).$$

Se $j \neq k$, isto é, $x_j \neq x_k$, designamos a derivada parcial de segunda ordem de f em relação a x_k , primeiro, e a x_j , depois, por **derivada rectangular** ou **derivada cruzada** de f em relação a x_k e a x_j . No caso de existirem as derivadas parciais $f'_{x_k x_j}$ em todos os pontos de $\mathbb{D}_{f'_{x_k x_j}}$, podemos definir as derivadas parciais de terceira ordem

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \right); \quad f'''_{x_i x_j x_k} \equiv (f''_{x_k x_j})'_{x_i}; \quad D_{x_k x_j x_i} f \equiv D_{x_i} (D_{x_k x_j} f).$$

No caso de algum dos x_k, x_j, x_i ser igual a outro, podemos simplificar a escrita como no caso das derivadas parciais de segunda ordem. O mesmo raciocínio pode ser aplicado às derivadas parciais de quarta ordem e assim sucessivamente.

Exercício exemplo 3.4.1. *Determine as (funções) derivadas parciais de primeira e segunda ordem da função $f(x, y) = \arccos(x/y)$.*

Para cada função escalar f de N variáveis vão, possivelmente, existir N^p derivadas parciais de ordem N . No caso particular de uma função escalar de duas variáveis, verifica-se que, em muitas situações, as derivadas parciais cruzadas de segunda ordem são iguais, independentemente da ordem por que variável se deriva.

Proposição 3.4.1 (Schwarz). *Sejam f uma função escalar de duas variáveis (x, y) e \mathbb{D} um subconjunto aberto de \mathbb{D}_f . Suponhamos que existem as funções derivadas parciais f'_x e f'_y em \mathbb{D} e que uma das duas derivadas parciais de segunda ordem, f''_{xy} ou f''_{yx} , existe e é contínua em \mathbb{D} . Então a outra derivada parcial de segunda ordem também existe e tem-se:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) \quad \forall (a, b) \in \mathbb{D}.$$

SEM DEMONSTRAÇÃO: Ver, por exemplo, Campos Ferreira p. 120.

O resultado anterior pode ser generalizado a qualquer função escalar f definida num domínio de \mathbb{R}^N , com $N \geq 2$. Por exemplo, prova-se que, para uma função f definida num domínio de \mathbb{R}^3 e assumindo que as condições correspondentes da proposição anterior são satisfeitas,

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y \partial z} = \frac{\partial^4 f}{\partial z \partial y \partial x^2}.$$

Exercício exemplo 3.4.2. *Mostre que para a função $f(x, y, z) = \text{sen}(xyz)$ se tem sempre*

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial x \partial y}.$$

Uma outra noção que convém ser estendida a uma ordem superior, é a noção de diferencial. Nas condições da Definição 3.3.2, sabemos que o diferencial da função f no ponto \mathbf{a} , relativo ao vector \mathbf{u} , é o escalar definido por:

$$(df)_{\mathbf{u}}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) u_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_N}(\mathbf{a}) u_N.$$

Conhecida esta expressão, podemos escrever o diferencial de primeira ordem do modo seguinte:

$$(df)_{(\mathbf{u})}(\mathbf{a}) = \left(u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + u_N \frac{\partial}{\partial x_N} \right) f(\mathbf{a}).$$

Se existirem todas as derivadas parciais de ordem $k > 1$ da função f no ponto \mathbf{a} , então podemos definir o **diferencial de ordem k** de f no ponto \mathbf{a} , relativo ao vector \mathbf{u} , pela forma simbólica seguinte:

$$(d^k f)_{(\mathbf{u})}(\mathbf{a}) = \left(u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + u_N \frac{\partial}{\partial x_N} \right)^k f(\mathbf{a}).$$

Por exemplo, no caso particular de $k = 2$ e de uma função de duas variáveis (x, y) , a fórmula anterior tem o significado seguinte:

$$(d^2 f)_{(u,v)}(a, b) = u^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) + 2uv \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) + v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b).$$

Procedendo de forma análoga e usando as notações da Definição 3.3.1, definimos o **diferencial total de ordem k** da função f por:

$$d^k f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_N} dx_N \right)^k f.$$

Exercício exemplo 3.4.3. *Determine o diferencial total de segunda ordem da função*

$$f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}.$$

3.5 Derivação de funções compostas

Nesta subsecção vamos considerar a composição de um campo escalar $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ com um campo vectorial $g : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^N$, podendo se ter $M = 1$. A função composta $f \circ g$ é um campo escalar e fica, assim, definida

$$f \circ g : \mathbb{R}^M \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Caso de apenas uma variável independente - este é o caso mais simples, em que $M = 1$ e N é um natural qualquer maior do que 1.

Proposição 3.5.1. *Sejam $\varphi_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \dots, \varphi_N : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ N funções reais, de uma variável real apenas, deriváveis em t e seja $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ um campo escalar derivável em $\mathbf{x} \equiv (x_1, \dots, x_N) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_N(t))$. Então a função composta*

$$u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto u(t) = f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_N(t))$$

é derivável em t e a sua derivada é calculada pela fórmula

$$u'(t) \equiv \frac{du}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{d\varphi_2}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_N} \frac{d\varphi_N}{dt}.$$

SEM DEMONSTRAÇÃO: Ver, por exemplo, Dias Agudo p. 129.

A expressão da derivada de u pode ser simplificada, se considerarmos u como a função composta

$$z = f(x_1, \dots, x_N), \quad x_1 = x_1(t), \dots, x_N = x_N(t).$$

Por isto e embora sendo um abuso de notação, podemos escrever a derivada de u na forma

$$z'(t) \equiv \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial z}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_N} \frac{dx_N}{dt}.$$

Usando a notação matricial, podemos ainda escrever a derivada anterior na forma

$$z'(t) \equiv \frac{dz}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x_1} & \frac{\partial z}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial z}{\partial x_N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_N}{dt} \end{bmatrix}.$$

Exercício exemplo 3.5.1. *Determine a derivada $z'(t)$ da função seguinte, resultante da composição das funções indicadas:*

$$z = \frac{x}{y}, \quad x = e^{2t}, \quad y = \ln t.$$

As derivadas de ordem superior são calculadas aplicando a fórmula da Proposição 3.5.1 a cada função que se obtém por derivação. Por exemplo, para a segunda derivada $z''(t)$ e usando a notação mais simples $z = f(x_1, \dots, x_N)$, obtemos a fórmula

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z}{dt^2} \equiv \frac{d}{dt} \left(\frac{dz}{dt} \right) &= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial z^2}{\partial x_2 x_1} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial z^2}{\partial x_n x_1} \frac{dx_N}{dt} \right) \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial z}{\partial x_1} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \\ &\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 x_2} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial z^2}{\partial x_2^2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial z^2}{\partial x_n x_2} \frac{dx_N}{dt} \right) \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial z}{\partial x_2} \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \\ &\dots + \\ &\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 x_N} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial z^2}{\partial x_2 x_N} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial z^2}{\partial x_N^2} \frac{dx_N}{dt} \right) \frac{dx_N}{dt} + \frac{\partial z}{\partial x_N} \frac{d^2 x_N}{dt^2}. \end{aligned}$$

Exercício exemplo 3.5.2. *Determine a derivada $z''(t)$ da função resultante da composição das funções indicadas no Exercício 3.5.1.*

Caso de várias variáveis independentes - este é o caso geral para N e M naturais, supostamente maiores do que 1.

Proposição 3.5.2. *Sejam $\varphi_1 : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}, \dots, \varphi_N : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$ N funções escalares deriváveis em $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_M)$ e seja $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ um campo escalar derivável em*

$$\mathbf{x} = (\varphi_1(\mathbf{t}), \dots, \varphi_N(\mathbf{t})) = (\varphi_1(t_1, \dots, t_M), \dots, \varphi_N(t_1, \dots, t_M)).$$

Então a função composta

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}^M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{t} &\longmapsto u(\mathbf{t}) = f(\varphi_1(\mathbf{t}), \dots, \varphi_N(\mathbf{t})) \end{aligned}$$

onde, não é demais recordar,

$$\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_M) \quad e \quad u(\mathbf{t}) = f(\varphi_1(\mathbf{t}), \dots, \varphi_N(\mathbf{t})) = f(\varphi_1(t_1, \dots, t_M), \dots, \varphi_N(t_1, \dots, t_M)),$$

é derivável em $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_M)$ e as suas derivadas parciais são calculadas pelas fórmulas

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t_1} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_N} \frac{\partial \varphi_N}{\partial t_1}, \\ \frac{\partial u}{\partial t_2} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_N} \frac{\partial \varphi_N}{\partial t_2}, \\ &\vdots \\ \frac{\partial u}{\partial t_M} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_M} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_M} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_N} \frac{\partial \varphi_N}{\partial t_M}. \end{aligned}$$

SEM DEMONSTRAÇÃO: Ver, por exemplo, Dias Agudo p. 132.

As expressões das derivadas parciais de u também podem ser simplificadas, neste caso, se considerarmos u como a função composta

$$z = f(x_1, \dots, x_N), \quad x_1 = x_1(t_1, \dots, t_M), \dots, x_N = x_N(t_1, \dots, t_M).$$

Novamente e tendo presente que se trata de um abuso de notação, podemos escrever as derivadas parciais de u na forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t_1} &= \frac{\partial z}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial z}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_N} \frac{\partial x_N}{\partial t_1}, \\ \frac{\partial z}{\partial t_2} &= \frac{\partial z}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial z}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_N} \frac{\partial x_N}{\partial t_2}, \\ &\vdots \\ \frac{\partial z}{\partial t_M} &= \frac{\partial z}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_M} + \frac{\partial z}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_M} + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_N} \frac{\partial x_N}{\partial t_M}. \end{aligned}$$

Usando a notação matricial, podemos também escrever as derivadas parciais anteriores na forma

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial t_1} & \frac{\partial z}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial z}{\partial t_M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x_1} & \frac{\partial z}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial z}{\partial x_N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_1}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial t_M} \\ \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial t_M} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_N}{\partial t_1} & \frac{\partial x_N}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial x_N}{\partial t_M} \end{bmatrix}.$$

Exercício exemplo 3.5.3. *Determine as derivadas parciais de primeira ordem z_x e z_y da função seguinte, resultante da composição das funções indicadas:*

$$z = \operatorname{arctg}\left(\frac{u}{v}\right), \quad u = \operatorname{sen}(xy), \quad v = \operatorname{cos}(xy).$$

As derivadas parciais de ordem superior são calculadas aplicando a fórmula da Proposição 3.5.2 a cada função que se obtém por derivação parcial. Por exemplo, para a segunda derivada parcial cruzada em ordem a t_1 e a t_2 e usando a notação mais simples $z = f(x_1, \dots, x_N)$, obtemos a fórmula

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial t_2 \partial t_1} &\equiv \frac{\partial}{\partial t_2} \left(\frac{\partial z}{\partial t_1} \right) = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} \frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 x_1} \frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \cdots + \frac{\partial^2 z}{\partial x_N x_1} \frac{\partial x_N}{\partial t_2} \right) \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial z}{\partial x_1} \frac{\partial^2 x_1}{\partial t_2 \partial t_1} + \\ &\quad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 x_2} \frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} \frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \cdots + \frac{\partial^2 z}{\partial x_N x_2} \frac{\partial x_N}{\partial t_2} \right) \frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \frac{\partial z}{\partial x_2} \frac{\partial^2 x_2}{\partial t_2^2} + \\ &\quad \cdots \cdots \cdots + \\ &\quad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 x_N} \frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 x_N} \frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \cdots + \frac{\partial^2 z}{\partial x_N^2} \frac{\partial x_N}{\partial t_2} \right) \frac{\partial x_N}{\partial t_1} + \frac{\partial z}{\partial x_N} \frac{\partial^2 x_N}{\partial t_2 \partial t_1}. \end{aligned}$$

Exercício exemplo 3.5.4. *Determine as derivadas parciais de segunda ordem z_{xx} , z_{yy} e z_{xy} da função resultante da composição das funções indicadas no Exercício 3.5.3.*

3.6 Funções implícitas

Seja y uma função real de N variáveis reais (x_1, \dots, x_N) e suponhamos que a equação

$$F(x_1, \dots, x_N, y) = 0$$

não é resolúvel em ordem a y . Então dizemos que a equação $F(x_1, \dots, x_N, y) = 0$ define, de forma implícita, y como função de (x_1, \dots, x_N) . Um caso particular, é o da equação

$$F(x, y, z) = 0$$

definir implicitamente z como função de (x, y) . Poder-se-á dar o caso da equação $F(x, y, z) = 0$ definir x ou y como funções implícitas de (y, z) ou (x, z) , respectivamente.

Proposição 3.6.1. *Seja*

$$F : \quad \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_N, y) \quad \mapsto \quad F(x_1, \dots, x_N, y)$$

uma função de classe C^1 num subconjunto aberto $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$, com $N \geq 1$. Suponhamos que as seguintes condições são satisfeitas:

(i) (a_1, \dots, a_N, b) é uma solução da equação $F(x_1, \dots, x_N, y) = 0$;

(ii) $F_y(a_1, \dots, a_N, b) \neq 0$.

Então existem uma bola aberta $B(\mathbf{a}_0, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^N$, com $\mathbf{a}_0 = (a_1, \dots, a_N)$, e uma função

$$\varphi : \quad B(\mathbf{a}_0, \varepsilon) \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_N) \quad \mapsto \quad \varphi(x_1, \dots, x_N),$$

tal que $\varphi(a_1, \dots, a_N) = b$, que define y como função implícita de (x_1, \dots, x_N) :

$$y = \varphi(x_1, \dots, x_N).$$

SEM DEMONSTRAÇÃO: Ver, por exemplo, Campos Ferreira, p. 130.

No caso particular da equação $f(x, y) = 0$ definir implicitamente y como uma função derivável de x , $y = \varphi(x)$, tem-se

$$y' \equiv \frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)}.$$

Exercício exemplo 3.6.1. *Verifique que a equação*

$$5xe^y - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right) + x - 5 = 0$$

define implicitamente y como uma função derivável de x no ponto $(x, y) = (1, 0)$ e calcule $y'(1)$.

Se a equação $F(x_1, \dots, x_N, y) = 0$ definir implicitamente y como uma função de classe C^1 de (x_1, \dots, x_N) , $y = \varphi(x_1, \dots, x_N)$, tem-se

$$\frac{\partial y}{\partial x_k} = -\frac{F'_{x_k}(x_1, \dots, x_N, y)}{F'_y(x_1, \dots, x_N, y)}$$

para qualquer variável x_k , com $1 \leq k \leq N$.

Exercício exemplo 3.6.2. *Considere a equação*

$$x^2y^2 + xz^3 - 2x^4 + zy^3 = 6.$$

1. *Mostre que esta equação define implicitamente, tanto z como uma função derivável de (x, y) , y como uma função derivável de (x, z) ou x como uma função derivável de (y, z) , todas no ponto $(x, y, z) = (1, -1, 2)$.*
2. *Calcule z_x , y_z e x_y no ponto $(x, y, z) = (1, -1, 2)$.*
3. *Verifique que, neste caso, se tem*

$$\frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = -1.$$

3.7 Funções homogêneas

As funções homogêneas têm um papel muito importante em Análise Matemática, em particular em Equações Diferenciais. Em termos simples, uma função homogênea é uma função com um comportamento multiplicativo escalar, isto é, se o argumento da função for multiplicado por um factor, então o resultado da função será multiplicado por uma potência desse factor.

Definição 3.7.1. *Sejam $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, com $N \in \mathbb{N}$, uma função real de uma ou mais variáveis reais. Diz-se que f é uma função homogênea, se existir $k \in \mathbb{Z}$ tal que*

$$f(x_1, \dots, x_N) = t^k f(x_1, \dots, x_N) \quad \text{para todo } t > 0.$$

O inteiro k da definição anterior designa-se por **grau de homogeneidade da função** e diz-se que a **função é homogênea de grau k** . A noção de função homogênea está intimamente ligada com determinado tipo de equações diferenciais como mostra a proposição anterior.

Proposição 3.7.1. *Sejam $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, com $N \in \mathbb{R}$, uma função real de várias variáveis reais e $k \in \mathbb{Z}$. A função f é homogênea de grau k se e só se*

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + x_N \frac{\partial f}{\partial x_N} = k f(x_1, \dots, x_N). \quad (3.7.1)$$

Demonstração. Suponhamos que f é uma função homogênea de grau k . Fixemos $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ e consideremos a função

$$g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(t) = f(t\mathbf{x}) - t^k f(\mathbf{x}) \equiv f(tx_1, \dots, tx_N) - t^k f(x_1, \dots, x_N).$$

Dado que f é homogênea de grau k , temos $g(t) = 0$ para todo $t \geq 0$ e, por consequência, $g'(t) = 0$ para todo $t > 0$. Por outro lado, usando o Teorema de Derivação da Função Composta, temos

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(t\mathbf{x})x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_N}(t\mathbf{x})x_N - kt^{k-1}f(\mathbf{x}).$$

Em particular, tomando $t = 1$ na expressão anterior, obtemos (3.7.1).

Reciprocamente, suponhamos que (3.7.1) é verificada. Considerando a função g definida na prova da condição necessária e observando que $g(1) = 0$, obtemos para todo $t > 0$

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(t\mathbf{x})x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_N}(t\mathbf{x})x_N - kt^{k-1}f(\mathbf{x}) \\ &= t^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(t\mathbf{x})tx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_N}(t\mathbf{x})tx_N \right) - kt^{k-1}f(\mathbf{x}) \\ &= t^{-1}kf(t\mathbf{x}) - kt^{k-1}f(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Isto equivale a

$$tg'(t) = k(f(t\mathbf{x}) - t^{k-1}f(\mathbf{x})) \Leftrightarrow tg'(t) = kg(t).$$

Daqui se infere que a função g satisfaz ao problema de Cauchy seguinte para todo $t > 0$

$$\begin{cases} g'(t) - \frac{k}{t}g(t) = 0 \\ g(1) = 0. \end{cases}$$

Resolvendo este problema, obtemos $g(t) = 0$. Pela definição da função g , concluímos que f é uma função homogênea de grau k . \square

Exemplo 3.7.1. *Mostre que as funções seguintes são homogêneas e satisfazem o Teorema de Euler:*

$$1. f(x, y) = y + xe^{\frac{y}{x}}; \quad 2. f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{\sqrt{x + \sqrt{y}}}.$$

3.8 Aplicações geométricas

As aplicações geométricas a que nos iremos referir dizem respeito, apenas, aos casos das dimensões $N = 2$ ou $N = 3$. Começemos por considerar um campo escalar

$$F : \quad \mathbb{R}^3 \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ (x, y, z) \quad \mapsto \quad F(x, y, z).$$

A equação

$$F(x, y, z) = 0$$

representa, num sistema de eixos cartesianos (x, y, z) e de forma implícita, uma superfície em \mathbb{R}^3 , que denotamos por \mathcal{S} . Dizemos que um ponto $P = (a, b, c)$ pertencente à superfície \mathcal{S} é **ponto regular**, se existem as derivadas parciais F_x , F_y e F_z , e são contínuas em P , e se, além do mais, pelo menos, uma das derivadas parciais, $F_x(P)$, $F_y(P)$ ou $F_z(P)$ é não nula. Se todas as derivadas parciais $F_x(P)$, $F_y(P)$ e $F_z(P)$ forem nulas, ou não existir, no ponto P , pelo menos, uma das derivadas parciais, dizemos que $P = (a, b, c)$ é um **ponto crítico**, ou **ponto singular**, da superfície \mathcal{S} .

Definição 3.8.1. *Seja \mathcal{S} uma superfície em \mathbb{R}^3 e $P = (a, b, c)$ um ponto regular de \mathcal{S} . Chama-se **plano tangente** à superfície \mathcal{S} no ponto P ao plano formado por todas as rectas tangentes à superfície \mathcal{S} no ponto P .*

O ponto $P = (a, b, c)$ da definição anterior é denominado **ponto de contacto** do plano tangente com a superfície \mathcal{S} .

Proposição 3.8.1. *Sejam \mathcal{S} uma superfície em \mathbb{R}^3 , representada de forma implícita pela equação $F(x, y, z) = 0$, e $P = (a, b, c)$ um ponto regular de \mathcal{S} . Então:*

- (i) o vector $\nabla F(P)$ é perpendicular ao plano tangente à superfície \mathcal{S} no ponto P .
- (ii) a equação cartesiana do plano tangente à superfície \mathcal{S} no ponto P é dada por

$$\frac{\partial F}{\partial x}(P)(x - a) + \frac{\partial F}{\partial y}(P)(y - b) + \frac{\partial F}{\partial z}(P)(z - c) = 0.$$

Demonstração. No caso da equação da superfície $F(x, y, z) = 0$ puder ser escrita na forma explícita

$$z = f(x, y),$$

a equação do plano tangente simplifica-se consideravelmente. Neste caso, a **equação cartesiana do plano tangente à superfície \mathcal{S}** no ponto $P = (a, b, c)$, onde $c = f(a, b)$, é escrita na forma seguinte

$$z - c = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b).$$

Exercício exemplo 3.8.1. *Determine a equação cartesiana do plano tangente à superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ no ponto $(\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$.*

Um vector perpendicular ao plano tangente a uma superfície \mathcal{S} , representada de forma implícita pela equação $F(x, y, z) = 0$, num ponto regular P , designa-se por **vector normal**, se tiver norma 1. Pela Proposição 3.8.1, verifica-se que o vector normal à superfície \mathcal{S} no ponto $P = (a, b, c)$ é dado por

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\|\nabla F(P)\|} \nabla F(P) = \frac{1}{\left\| \left(\frac{\partial F}{\partial x}(P), \frac{\partial F}{\partial y}(P), \frac{\partial F}{\partial z}(P) \right) \right\|} \left(\frac{\partial F}{\partial x}(P), \frac{\partial F}{\partial y}(P), \frac{\partial F}{\partial z}(P) \right).$$

Se a superfície \mathcal{S} puder ser escrita, de forma explícita, por $z = f(x, y)$, o vector normal à superfície no ponto $P = (a, b, c)$, com $c = f(a, b)$, escreve-se do modo seguinte

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\left\| \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), -\frac{\partial f}{\partial y}(a, b), 1 \right) \right\|} \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), -\frac{\partial f}{\partial y}(a, b), 1 \right).$$

Definição 3.8.2. *Seja \mathcal{S} uma superfície em \mathbb{R}^3 e $P = (a, b, c)$ um ponto regular de \mathcal{S} . Chama-se **recta normal** à superfície \mathcal{S} à recta perpendicular ao plano tangente à superfície \mathcal{S} no ponto de contacto P .*

Proposição 3.8.2. *Sejam \mathcal{S} uma superfície em \mathbb{R}^3 , representada de forma implícita pela equação $F(x, y, z) = 0$, e $P = (a, b, c)$ um ponto regular de \mathcal{S} . Então, as **equações cartesianas da recta normal à superfície \mathcal{S}** no ponto $P = (a, b, c)$ são dadas por*

$$\frac{x - a}{\frac{\partial F}{\partial x}(P)} = \frac{y - b}{\frac{\partial F}{\partial y}(P)} = \frac{z - c}{\frac{\partial F}{\partial z}(P)}.$$

Demonstração. Resulta da demonstração da proposição anterior que as **equações paramétricas da recta normal**, digamos $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, à superfície \mathcal{S} no ponto $P = (a, b, c)$, são dadas por:

$$\mathbf{r}(t) \equiv (x(t), y(t), z(t)) = P + t \nabla F(P) \Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = a + \frac{\partial F}{\partial x}(a, b, c) t \\ y(t) = b + \frac{\partial F}{\partial y}(a, b, c) t, \\ z(t) = c + \frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c) t \end{cases} \quad \text{com } t \in \mathbb{R}.$$

No caso da equação da superfície \mathcal{S} puder ser escrita na forma explícita $z = f(x, y)$, as equações cartesianas da recta normal à superfície \mathcal{S} no ponto $P = (a, b, c)$, com $c = f(a, b)$, simplificam-se a

$$-\frac{x - a}{\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)} = -\frac{y - b}{\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)} = z - c$$

e as correspondentes equações paramétricas reduzem-se a

$$\mathbf{r}(t) \equiv (x(t), y(t), z(t)) = (a, b, c) + t \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), -\frac{\partial f}{\partial y}(a, b), 1 \right) \Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = a - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) t \\ y(t) = b - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) t \\ z(t) = c + t \end{cases}.$$

Exercício exemplo 3.8.2. *Determine as equações cartesianas e as equações paramétricas da recta normal à superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ no ponto $(\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$.*

3.9 Fórmula de Taylor

Na Definição 3.3.1 e Proposição 3.3.1, vimos que para uma função escalar $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 numa bola aberta $B(\mathbf{a}, \varepsilon) \subset \mathbb{D}_f$, com $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_N)$, se tem

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|),$$

para todo $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, \varepsilon)$. Notemos que o segundo termo do segundo membro da fórmula acima - o diferencial de f , pode ser escrito na forma matricial seguinte

$$\nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = \begin{bmatrix} f_{x_1}(\mathbf{a}) & f_{x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & f_{x_N}(\mathbf{a}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \\ \dots \\ x_N - a_N \end{bmatrix}.$$

A fórmula anterior dá-nos uma aproximação, em termos do diferencial de primeira ordem de uma função escalar f e designá-mo-la por **aproximação de primeira ordem da função f em torno do ponto \mathbf{a}** .

Exercício exemplo 3.9.1. *Determine a aproximação de primeira ordem da função $f(x, y) = e^x \sin y$ em torno do ponto $(x, y) = (0, 0)$.*

A proposição seguinte dá-nos uma aproximação mais precisa da função f , a qual já vai fazer intervir o diferencial de segunda ordem. Designamos esta fórmula por **aproximação de segunda ordem da função f em torno do ponto \mathbf{a}** .

Proposição 3.9.1. *Seja $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ um campo escalar de classe C^2 numa bola aberta $B(\mathbf{a}, \varepsilon) \subset \mathbb{D}_f$, com $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_N)$. Então, para todo $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, \varepsilon)$,*

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \frac{1}{2!} [(\mathbf{x} - \mathbf{a})\mathbf{H}(\mathbf{a})] \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2),$$

onde

$$H = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \cdots & f_{x_1x_N} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & \cdots & f_{x_2x_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & \cdots & f_{x_nx_N} \end{bmatrix}$$

é a denominada **matriz Hessiana** da função f e a notação $o(\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2)$ significa

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{o(\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2} = 0.$$

SEM DEMONSTRAÇÃO: Ver, por exemplo, Apostol p. 308.

Notemos, também aqui, que o terceiro termo do segundo membro da fórmula da proposição anterior - o diferencial de segunda ordem de f , pode ser escrito com a notação matricial seguinte

$$\frac{1}{2!} [(\mathbf{x} - \mathbf{a})\mathbf{H}(\mathbf{a})] \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = \frac{1}{2!} \begin{bmatrix} x_1 - a_1 & x_2 - a_2 & \cdots & x_N - a_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{x_1x_1}(\mathbf{a}) & f_{x_1x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & f_{x_1x_N}(\mathbf{a}) \\ f_{x_2x_1}(\mathbf{a}) & f_{x_2x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & f_{x_2x_N}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_Nx_1}(\mathbf{a}) & f_{x_Nx_2}(\mathbf{a}) & \cdots & f_{x_Nx_N}(\mathbf{a}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \\ \vdots \\ x_N - a_N \end{bmatrix}.$$

Exercício exemplo 3.9.2. Determine a aproximação de segunda ordem da função $f(x, y) = 1/[(1-x)(1-y)]$ em torno do ponto $(x, y) = (0, 0)$.

Podemos continuar este processo de aproximação de uma função escalar f até ao diferencial de uma ordem N qualquer, desde que a função tenha derivabilidade suficiente. No entanto, para as aproximações terem mais rigor, convém estabelecer formas precisas de determinar o infinitésimo $o(\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^N)$.

Proposição 3.9.2 (Fórmula de Taylor). *Seja $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ um campo escalar de classe C^{M+1} , com $M \in \mathbb{N}$, numa bola aberta $B(\mathbf{a}, \varepsilon) \subset \mathbb{D}_f$, com $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_N)$. Então, para todo $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, \varepsilon)$,*

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + f'_{(\mathbf{x}-\mathbf{a})}(\mathbf{a}) + \frac{1}{2!} f''_{(\mathbf{x}-\mathbf{a})}(\mathbf{a}) + \cdots + \frac{1}{M!} f^{(M)}_{(\mathbf{x}-\mathbf{a})}(\mathbf{a}) + R_M(\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

onde

$$R_M(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = \frac{1}{(M+1)!} f^{(M+1)}_{(\mathbf{x}-\mathbf{a})}(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{a})), \quad 0 < \theta < 1.$$

SEM DEMONSTRAÇÃO: Ver, por exemplo, Dias Agudo p. 173.

A fórmula escrita na proposição anterior, designa-se por **Fórmula de Taylor de ordem N em torno do ponto \mathbf{a}** e $R_M(\mathbf{x} - \mathbf{a})$ é o resto de ordem M desta fórmula, denominado **resto de Taylor**. No caso de $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, esta fórmula designa-se por **Fórmula de Mac-Laurin de ordem N** . A notação $f^{(k)}_{(\mathbf{x}-\mathbf{a})}(\mathbf{a})$ indica a derivada de ordem k , com $1 \leq k \leq M+1$, da função f no ponto \mathbf{a} segundo o vector $\mathbf{x} - \mathbf{a}$. Usando o resultado expresso na Proposição 3.2.1, podemos escrever a fórmula de Taylor, até aos termos de segunda ordem, usando a notação

$$f'_{(\mathbf{x}-\mathbf{a})}(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}),$$

$$f''_{(\mathbf{x}-\mathbf{a})}(\mathbf{a}) = [(\mathbf{x} - \mathbf{a})\nabla(\nabla f)(\mathbf{a})] \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = [(\mathbf{x} - \mathbf{a})\mathbf{H}(\mathbf{a})] \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}),$$

onde $\mathbf{H}(\mathbf{a})$ é a matriz Hessiana de f , calculada no ponto \mathbf{a} , referida na Proposição 3.9.1. No entanto, para as derivadas de ordem superior a dois, esta notação torna-se de tal forma complicada que é preferível não a utilizar. Por outro lado, atendendo à Definição 3.3.2, $f^{(k)}_{(\mathbf{x}-\mathbf{a})}(\mathbf{a})$ também pode ser interpretada como o diferencial de ordem k da função f no ponto \mathbf{a} relativo ao vector $\mathbf{x} - \mathbf{a}$, $(d^k f)_{(\mathbf{x}-\mathbf{a})}(\mathbf{a})$. Usando a notação dos diferenciais, a fórmula de Taylor pode ser escrita na forma seguinte:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + (df)_{(\mathbf{x}-\mathbf{a})}(\mathbf{a}) + \frac{1}{2!} (d^2 f)_{(\mathbf{x}-\mathbf{a})}(\mathbf{a}) + \cdots + \frac{1}{M!} (d^M f)_{(\mathbf{x}-\mathbf{a})}(\mathbf{a}) + R_M(\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

onde

$$R_M(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = \frac{1}{(M+1)!} (d^{M+1} f)_{(\mathbf{x}-\mathbf{a})}(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{a})), \quad 0 < \theta < 1.$$

Conhecida a expressão do diferencial de primeira ordem da função escalar f relativo ao vector $\mathbf{x} - \mathbf{a}$, podemos escrevê-lo na forma simbólica seguinte

$$(df)_{(\mathbf{x}-\mathbf{a})}(\mathbf{a}) = \left((x_1 - a_1) \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + (x_N - a_N) \frac{\partial}{\partial x_N} \right) f(\mathbf{a}).$$

De forma análoga, podemos escrever, simbolicamente, a expressão do diferencial de qualquer ordem k , com $1 \leq k \leq M+1$, de f relativo ao vector $\mathbf{x} - \mathbf{a}$ por

$$(d^k f)_{(\mathbf{x}-\mathbf{a})}(\mathbf{a}) = \left((x_1 - a_1) \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + (x_N - a_N) \frac{\partial}{\partial x_N} \right)^k f(\mathbf{a}).$$

Portanto, a escrita da fórmula de Taylor em termos dos diferenciais é mais simples, o que, na resolução de exercícios práticos, se torna numa grande vantagem.

Exercício exemplo 3.9.3. *Determine a Fórmula de Mac-Laurin de terceira ordem da função $f(x, y) = e^{xy}$.*

3.10 Exercícios

Derivadas parciais

1. Determine as (funções) primeira e segundas derivadas parciais das funções seguintes:

$$\text{a) } f(x, y) = \arctg(x + e^y); \quad \text{b) } f(x, y) = \frac{\sinh(x + y)}{\ln(x - y)};$$

$$\text{c) } f(x, y, z) = z \sen(xy) + x \cos(yz); \quad \text{d) } f(x, y) = [\cotg(x + y)]^{\ln(x+y)};$$

$$\text{e) } f(x, y) = xy \arccos(x + y) + \sqrt[3]{xy}; \quad \text{f) } f(x, y, z) = \frac{\text{tgh}(xyz)}{xyz}.$$

2. Verifique que a função

$$z = \ln(e^x + e^y)$$

satisfaz a equação

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0.$$

3. Considere as funções seguintes:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}; \quad g(x, y) = \begin{cases} xy^2 \sen\left(\frac{1}{y}\right) & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases}.$$

a) Estude a continuidade de f e g .

b) Determine as primeiras derivadas parciais de f e g em todos os pontos de \mathbb{R}^2 .

c) Determine $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}$ em todos os pontos de \mathbb{R}^2 .

4. Calcule os gradientes das funções seguintes nos pontos indicados:
- $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ no ponto $(0, 3)$;
 - $u = z^3 \cos(x - y) + \sin(x + y - z)$ no ponto $(\frac{3}{4}\pi, \frac{\pi}{4} + 1, 2)$;
 - $v = (\arctg(\frac{y}{x}))^x$ no ponto $(2, 2)$;
 - $u = xyz$ no ponto $(1, -1, 1)$;
 - $u = 2x^2 + 3y^2 - \cos z$ no ponto $(1, 0, \frac{\pi}{2})$.
5. Determine o produto interno do gradiente da função $u = x^2y^2z^2$ no ponto $(1, 1, -1)$ com o gradiente da função $u = x + y + z$ no ponto $(2, -1, -1)$.

Derivadas direccionais

1. Determine as derivadas das funções seguintes nos pontos e segundo os vectores \vec{v} indicados:
- $f(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$, $P = (1, 1)$, $\vec{v} = (1, 2)$;
 - $f(x, y, z) = 2x^2 - 3xy + 6z^2$, $P = (1, 1, 0)$, $\vec{v} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$;
 - $f(x, y, z) = z - e^x \sin y$, $P = (\ln 3, \frac{3}{2}\pi, -3)$, $\vec{v} = (x, y, z)$;
 - $f(x, y) = xy e^x$, $P = (1, 1)$, $\vec{v} = \vec{PQ}$, sendo $Q = (4, -3)$;
 - $f(x, y) = e^{x^2y^2}$, $P = (0, 1)$, \vec{v} tem a direcção da recta $y = 2x$.
2. Determine as derivadas direccionais das funções seguintes nos pontos e direcções indicados:
- $f(x, y) = x^3 - 2x^2y + xy^2 + 1$ no ponto $(1, 2)$ na direcção $\vec{v} = (3, 4)$;
 - $f(x, y) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3}$ no ponto $(2, 3)$ na direcção $\vec{v} = (3, 4)$;
 - $f(x, y, z) = \frac{1}{\pi}(x - y + z) \operatorname{tg}(x + y - z)$ no ponto (π, π, π) na direcção definida pelo vector $\vec{v} = (1, 2, 2)$;
 - $f(x, y, z) = x \sin(y + z) + y \sin(x + z) + z \sin(x + y)$ no ponto $(\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ na direcção $\vec{v} = (1, 2, 2)$;
 - $f(x, y, z) = \ln(\cos(x^2) + \cos(y^2) + \cos(z^2) + e - \frac{3\sqrt{2}}{2})$ no ponto $(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{\pi}}{2})$ na direcção $\vec{v} = (1, 2, 2)$.

Derivabilidade

1. Estude as funções seguintes quanto à derivabilidade:

$$\text{a) } f(x, y) = xy + 2x^2; \quad \text{b) } f(x, y, z) = z - e^x \sin y;$$

$$\text{c) } f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{xy} & \text{se } xy \geq 0 \\ 0 & \text{se } xy < 0 \end{cases}; \quad \text{d) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

2. Determine o diferencial total das funções seguintes:

$$\text{a) } f(x, y) = \operatorname{tg}(\sin(x + y) + y^2); \quad \text{b) } f(x, y) = \cos(x^2 + y^2) + \frac{x^2 - y^2}{e^x};$$

$$\text{c) } f(x, y, z) = (x + y + z) \sinh(xyz); \quad \text{d) } f(x, y) = (\ln(x + y))^{e^{xy}}.$$

Derivada da função composta

- Determine $f'(t)$, onde $f(x, y) = x^2 - y^2$, $x = \cos(t)$ e $y = \sin(t)$, de dois modos distintos:
 - Substituindo $x = \cos(t)$ e $y = \sin(t)$ em $f(x, y) = x^2 - y^2$ e determinando a derivada;
 - Usando o Teorema de Derivação da Função Composta.
- Resolva o exercício anterior, agora para $f(x, y) = \cos(xy)$, $x = e^t$ e $y = e^{-t}$.
- Determine $f'(t)$ usando o Teorema de Derivação da Função Composta:

$$\text{a) } f(x, y) = x^2 - y^2, \quad x = \sinh t, \quad y = \cosh t;$$

$$\text{a) } f(x, y) = \frac{\ln(1 + e^{x^2})}{1 + e^{y^2}}, \quad x = t, \quad y = e^{-t};$$

$$\text{c) } f(x, y, z) = e^{xyz} \cos(x + y + z), \quad x = \ln t, \quad y = \cos t, \quad z = \sin t;$$

- Para cada uma das alíneas seguintes:

$$\text{a) } f(u, v) = u^2v^3 + 2v^2u, \quad u = x + y, \quad v = x^2 - y^2;$$

$$\text{b) } f(u, v) = \ln(u + v), \quad u = e^x, \quad v = \frac{x + y}{xy};$$

$$\text{d) } f(u, v) = e^{u+v}, \quad u = t^3s^2, \quad v = 5^s, \quad s = 2xy^3, \quad t = \sin(xy);$$

determine as derivadas parciais f_x e f_y de dois modos distintos:

- substituindo as expressões e determinando a derivada;
- usando o Teorema de Derivação da Função Composta.

- Considere a função

$$f(x, y) = xy + xg\left(\frac{x}{y}\right), \quad \text{com } y \neq 0,$$

em que $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^2 e tal que $g(1) = -1$ e $g'(1) = 2$.

- Calcule $\nabla f(1, 1)$.
- Determine a derivada direccional de f no ponto $(1, 1)$ na direcção do ponto $(0, 2)$.

Funções implícitas

- Mostre que a equação

$$x^3 + 4x^2y - y = \frac{1}{3}$$

define y como função de x numa vizinhança do ponto $(0, -1/3)$ e calcule $y'(1)$.

- Seja y uma função de x determinada pela equação

$$\ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Calcule y_x e y_{xx} .

3. Mostre que a equação

$$xe^y + ye^x + z + \cos(xz) = 0$$

define z como função de x e y numa vizinhança do ponto $(0, 0, -1)$ e calcule $z_x(0, 0)$ e $z_y(0, 0)$.

4. Considere a equação

$$x \ln(yz) - y \ln(xz) = 0.$$

a) Mostre que, numa vizinhança do ponto $(1, 1, 1)$, esta equação define y como função de x e z .

b) Calcule $y_x(1, 1)$, $y_{xx}(1, 1)$ e $y_{xz}(1, 1)$.

5. Considere a equação

$$z^3 - z^2 + 2e^{x^2+y^2} = 2.$$

a) Determine z_0 de modo que esta equação defina z como função de x e y numa vizinhança do ponto $(0, 0, z_0)$.

b) Calcule $z_x(0, 0)$, $z_y(0, 0)$, $z_{xx}(0, 0)$, $z_{yy}(0, 0)$ e $z_{xy}(0, 0)$.

Aplicações geométricas

1. Considere a função

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^4.$$

a) Determine os pontos onde o gradiente de f é vertical;

b) Determine os pontos da curva $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 1\}$ onde a tangente é horizontal.

2. Determine os planos tangentes às superfícies seguintes nos pontos indicados:

a) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 0$ no ponto $(5, 4, 3)$;

b) $x^2y^2 - 2x^3z - yz^2 = 1$ no ponto $(-1, 1, 2)$;

c) $z^2 + \arccos(z - y) - x^2 = \frac{\pi}{2}$ no ponto $(-1, 1, 1)$;

d) $x^2 + \arccos(z - y) + 5z = 1 + \arccos\left(\frac{3}{5}\right)$ no ponto $(0, \frac{4}{5}, \frac{1}{5})$;

e) $y^3 + 3x^2z + yz = 7x$ no ponto $(2, 1, 1)$.

3. Verifique se $2x + y - z = 1$ é o plano tangente à superfície $y^2 + 2y^3z^2 + yz = 11x^2$ no ponto $(1, 1, 2)$.

4. Considere a função:

$$f(x, y) = \sqrt{1 - \frac{x}{x+y}}.$$

Determine:

a) a equação da linha de nível que passa no ponto $(0, 1)$;

b) a direcção de maior crescimento da função no ponto $(0, 1)$;

c) a equação do plano tangente à superfície $z = f(x, y)$ no ponto $(0, 1)$;

d) as equações paramétricas da recta normal à superfície $z = f(x, y)$ no ponto $(0, 1)$.

5. Considere a função:

$$f(x, y) = \ln \left(1 - \frac{x^2}{y} \right).$$

Determine:

- a equação da linha de nível que passa no ponto $(1, 2)$;
- a direcção de maior crescimento da função no ponto $(1, 2)$;
- a equação do plano tangente à superfície $z = f(x, y)$ no ponto $(1, 2)$;
- as equações paramétricas da recta normal à superfície $z = f(x, y)$ no ponto $(1, 2)$.

Fórmula de Taylor

- Determine a Fórmula de Taylor, até aos termos de terceira ordem, das funções seguintes em torno dos pontos (a, b) indicados.
 - $f(x, y) = xy^2$, com $(a, b) = (1, 2)$;
 - $f(x, y) = x \operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x$ com $(a, b) = (0, 0)$.
- Determine a Fórmula de Mac-Laurin, até aos termos de terceira ordem, das funções seguintes:
 - $f(x, y) = \cos x \cos y$;
 - $f(x, y) = y^{x+1}$.

Capítulo 4

Extremos

4.1 Extremos livres

Consideremos uma função escalar de classe C^1

$$f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_N) \mapsto f(x_1, \dots, x_N).$$

e seja $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_N)$ um ponto interior ao seu domínio $\mathbb{D}_f \subset \mathbb{R}^N$. Dizemos que a função f tem um **máximo relativo**, ou **máximo local**, no ponto \mathbf{a} , se

$$f(\mathbf{a}) \geq f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in B(\mathbf{a}, \varepsilon),$$

para algum $\varepsilon > 0$. A função f tem um **mínimo relativo**, ou **mínimo local**, no ponto \mathbf{a} , se

$$f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in B(\mathbf{a}, \varepsilon),$$

para algum $\varepsilon > 0$. Designamos por **máximo** ou **mínimo relativo**, ou **local**, da função f ao valor da imagem $f(\mathbf{a})$. Quando não houver necessidade de especificar se este valor é máximo ou mínimo relativo, diremos que $f(\mathbf{a})$ é um **extremo relativo**, ou **extremo local**, da função f . Em muitas aplicações estamos interessados no maior ou menor valor possível de uma função escalar. A função f tem um **máximo absoluto**, ou **máximo global**, no ponto \mathbf{a} , se

$$f(\mathbf{a}) \geq f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{D}_f.$$

A função f tem um **mínimo absoluto**, ou **mínimo global**, no ponto \mathbf{a} , se

$$f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{D}_f.$$

Ao valor $f(\mathbf{a})$, nas condições anteriores, designamos por **máximo** ou **mínimo absoluto**, ou **global**. No caso de não querermos especificar se trata de máximo ou mínimo, designaremos, apenas, por **extremo absoluto** ou **global**. Em geral, uma função escalar não tem necessariamente um máximo ou mínimo absoluto. No entanto, por um resultado da Análise que não demonstraremos aqui¹, sabemos que toda a função contínua num domínio fechado e limitado tem máximo e mínimo absolutos.

¹Ver, por exemplo, Campos Ferreira, p. 55 (Teorema de Weierstrass).

Proposição 4.1.1. *Sejam $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ um campo escalar e $\mathbf{a} \in \text{int}(\mathbb{D}_f)$ onde f é de classe C^1 . Se f tem um extremo no ponto $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_N)$, então*

$$\nabla f(a_1, \dots, a_N) = (0, \dots, 0).$$

Demonstração. Aos pontos \mathbf{a} nas condições da Proposição 4.1.1, isto é, aos pontos $\mathbf{a} \in \text{int}(\mathbb{D}_f)$ onde f é de classe C^1 e tais $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$, vamos designar por **pontos de estacionaridade** da função f . Recordamos que anteriormente já havíamos introduzido a noção de **pontos críticos**, ou **pontos singulares**, pontos onde as derivadas parciais eram todas nulas ou onde, pelo menos, uma das derivadas parciais não existia. Neste sentido, os pontos de estacionaridade de uma função escalar são pontos singulares. Os pontos de estacionaridade de uma função escalar poderão ser de dois tipos diferentes: extremos ou pontos de sela. Os extremos podem ser máximos ou mínimos e os **pontos de sela** são pontos de estacionaridade que não são extremos.

Exercício exemplo 4.1.1 (AULA TEÓRICA). *Determine o ponto de estacionaridade da função $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ e conclua, apenas por análise da função f , qual o tipo de extremo.*

Proposição 4.1.2. *Sejam $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ um campo escalar de classe C^m , com $m > 1$, e $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_N) \in \text{int}(\mathbb{D}_f)$. Suponhamos que \mathbf{a} é um ponto de estacionaridade de f e m é a mais baixa ordem das derivadas direccionais de f que não se anulam em \mathbf{a} . Nestas condições:*

1. *se m é par e $f_{\mathbf{u}}^{(m)}(\mathbf{a}) > 0$ para qualquer direcção \mathbf{u} emergente de \mathbf{a} , então $f(\mathbf{a})$ é um mínimo local;*
2. *se m é par e $f_{\mathbf{u}}^{(m)}(\mathbf{a}) < 0$ para qualquer direcção \mathbf{u} emergente de \mathbf{a} , então $f(\mathbf{a})$ é um máximo local;*
3. *se m é ímpar, ou m é par e $f_{\mathbf{u}}^{(m)}(\mathbf{a})$ não tem sinal definido para alguma direcção \mathbf{u} emergente de \mathbf{a} , então $f(\mathbf{a})$ é um ponto de sela;*
4. *se m é par e $f_{\mathbf{u}}^{(m)}(\mathbf{a})$ tem sinal constante, com excepção de um número finito de direcções \mathbf{u} emergentes de \mathbf{a} para as quais $f_{\mathbf{u}}^{(m)}(\mathbf{a}) = 0$, nada se pode concluir sobre $f(\mathbf{a})$.*

SEM DEMONSTRAÇÃO: Ver, por exemplo, Dias Agudo p. 184.

Em termos práticos, o ponto 4 desta proposição é o de mais difícil resolução, tendo-se, na maioria dos casos, de efectuar um estudo local, ou determinar as derivadas direccionais de f de ordem superior a m , para averiguar a natureza do ponto de estacionaridade \mathbf{a} . Os resultados expressos na proposição anterior são particularmente úteis quando $m = 2$. Por isso, é importante ter presente a caracterização da derivada direccional $f_{\mathbf{u}}^2(\mathbf{a})$, com $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_N)$, através da respectiva matriz Hessiana $\mathbf{H}(\mathbf{a})$:

$$f_{\mathbf{u}}^2(\mathbf{a}) = [\mathbf{u} \mathbf{H}(\mathbf{a})] \cdot \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{x_1 x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & f_{x_1 x_N}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{x_n x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & f_{x_n x_N}(\mathbf{a}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}.$$

Observemos que a matriz Hessiana $\mathbf{H}(\mathbf{a})$ é uma matriz simétrica de ordem $N \times N$ com as entradas todas reais. Portanto, em termos da Álgebra Linear, $f_{\mathbf{u}}^2(\mathbf{a})$ é uma **forma bilinear quadrática** associada à matriz Hessiana $\mathbf{H}(\mathbf{a})$, que pode ser caracterizada como definida positiva ou negativa, semi-definida positiva ou negativa e, ainda, indefinida.

Definição 4.1.1. *Consideremos a forma bilinear quadrática*

$$f_{\mathbf{u}}^2(\mathbf{a}) = [\mathbf{u} \mathbf{H}(\mathbf{a})] \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}^T \mathbf{H}(\mathbf{a}) \mathbf{u}, \quad \mathbf{u}^T = [u_1 \ \cdots \ u_N].$$

1. Diz-se que $f_{\mathbf{u}}^2(\mathbf{a})$ é **definida positiva**, se $\mathbf{u}^T \mathbf{H}(\mathbf{a}) \mathbf{u} > 0$ para todo $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^N \setminus \{\mathbf{0}\}$.
2. Diz-se que $f_{\mathbf{u}}^2(\mathbf{a})$ é **definida negativa**, se $\mathbf{u}^T \mathbf{H}(\mathbf{a}) \mathbf{u} < 0$ para todo $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^N \setminus \{\mathbf{0}\}$.
3. Diz-se que $f_{\mathbf{u}}^2(\mathbf{a})$ é **semi-definida positiva**, se $\mathbf{u}^T \mathbf{H}(\mathbf{a}) \mathbf{u} \geq 0$ para todo $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^N$.
4. Diz-se que $f_{\mathbf{u}}^2(\mathbf{a})$ é **semi-definida negativa**, se $\mathbf{u}^T \mathbf{H}(\mathbf{a}) \mathbf{u} \leq 0$ para todo $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^N$.

Se $f_{\mathbf{u}}^2(\mathbf{a})$ não satisfaz nenhum dos casos da definição anterior, dizemos que $f_{\mathbf{u}}^2(\mathbf{a})$ é uma **forma quadrática indefinida**. Deste modo, a Proposição 4.1.2 pode ser escrita na forma algébrica seguinte, recorrendo às caracterizações da forma quadrática $f_{\mathbf{u}}^2(\mathbf{a})$.

Proposição 4.1.3. *Sejam $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ um campo escalar de classe C^m , com $m > 1$, e $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_N) \in \text{int}(\mathbb{D}_f)$. Suponhamos que \mathbf{a} é um ponto de estacionaridade de f e $m = 2$ é a mais baixa ordem das derivadas direccionais de f que não se anulam em \mathbf{a} . Nestas condições:*

1. se $f_{\mathbf{u}}^2(\mathbf{a})$ é definida positiva, então $f(\mathbf{a})$ é um mínimo local;
2. se $f_{\mathbf{u}}^2(\mathbf{a})$ é definida negativa, então $f(\mathbf{a})$ é um máximo local;
3. se $f_{\mathbf{u}}^2(\mathbf{a})$ é indefinida, então $f(\mathbf{a})$ corresponde a um ponto de sela.;
4. se $f_{\mathbf{u}}^2(\mathbf{a})$ é semi-definida positiva ou negativa, nada se pode concluir sobre $f(\mathbf{a})$.

Demonstração. Tal como na Proposição 4.1.2, o ponto 4 da Proposição 4.1.3 é o de mais difícil resolução, tendo-se, também, de efectuar um estudo local, ou determinar as derivadas direccionais de f de ordem superior a 2, para averiguar a natureza do ponto de estacionaridade \mathbf{a} . Na resolução de exercícios práticos sobre extremos, é mais simples caracterizar a forma bilinear quadrática $f_{\mathbf{u}}^2(\mathbf{a})$ através da matriz Hessiana $\mathbf{H}(\mathbf{a})$ que lhe está associada. O resultado seguinte da Álgebra Linear simplifica-nos bastante essa caracterização.

Proposição 4.1.4. *Consideremos a forma bilinear quadrática*

$$f_{\mathbf{u}}^2(\mathbf{a}) = \mathbf{u}^T \mathbf{H}(\mathbf{a}) \mathbf{u}, \quad \mathbf{u}^T = [u_1 \ \cdots \ u_N].$$

Seja

$$\Delta_1 = f_{x_1 x_1}(\mathbf{a}), \quad \Delta_2 = \det \begin{bmatrix} f_{x_1 x_1}(\mathbf{a}) & f_{x_1 x_2}(\mathbf{a}) \\ f_{x_2 x_1}(\mathbf{a}) & f_{x_2 x_2}(\mathbf{a}) \end{bmatrix}, \dots, \quad \Delta_N = \det \begin{bmatrix} f_{x_1 x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & f_{x_1 x_N}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{x_n x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & f_{x_n x_N}(\mathbf{a}) \end{bmatrix}$$

a cadeia de **menores principais da matriz Hessiana $\mathbf{H}(\mathbf{a})$** .

1. Se $\Delta_k > 0$ para todo $k = 1, \dots, N$, então $f_{\mathbf{u}}^2(\mathbf{a})$ é definida positiva, pelo que $f(\mathbf{a})$ é um mínimo local;
2. Se $\Delta_k < 0$ para todo k ímpar e $\Delta_k > 0$ para todo k par, com $k = 1, \dots, N$, então $f_{\mathbf{u}}^2(\mathbf{a})$ é definida negativa, pelo que $f(\mathbf{a})$ é um máximo local;
3. Se $\Delta_k > 0$ para algum k ímpar ou $\Delta_k < 0$ para algum k par, com $k = 1, \dots, N$, então $f_{\mathbf{u}}^2(\mathbf{a})$ é indefinida, pelo que $f(\mathbf{a})$ corresponde a um ponto de sela;
4. Se $\Delta_j = 0$ para algum $j = 1, \dots, N - 1$ e $\Delta_k \neq 0$ para $k > j$, com $k = 1, \dots, N$, nada se pode concluir sobre a forma quadrática $f_{\mathbf{u}}^2(\mathbf{a})$ e, por consequência, sobre $f(\mathbf{a})$.

SEM DEMONSTRAÇÃO: Ver, por exemplo, Dias Agudo, p. 186.

Se conjugarmos os casos 3 e 4 da Proposição 4.1.4, ainda podemos tirar as conclusões seguintes:

3-4 (i) se $\Delta_j = 0$ para algum j ímpar e $\Delta_k < 0$ para algum $k > j$ par, então $f_{\mathbf{u}}^2(\mathbf{a})$ é indefinida, pelo que $f(\mathbf{a})$ corresponde a um ponto de sela;

3-4 (ii) se $\Delta_j = 0$ para algum j par e $\Delta_k > 0$ para algum $k > j$ ímpar, então $f_{\mathbf{u}}^2(\mathbf{a})$ é indefinida, pelo que $f(\mathbf{a})$ corresponde a um ponto de sela.

Se $\Delta_N = 0$, então a característica² da matriz Hessiana $\mathbf{H}(\mathbf{a})$ é menor do que N , digamos $c(\mathbf{H}(\mathbf{a})) = r$ e $r < N$. Neste caso, o ponto 4 da Proposição 4.1.4, ainda, nos permite as afirmações seguintes, apesar de serem inconclusivas quanto à natureza dos pontos de estacionaridade:

4 (i) se $\Delta_k > 0$ para todo $k = 1, \dots, r$ e $\Delta_k = 0$ para todo $k = r + 1, \dots, N$, então $f_{\mathbf{u}}^2(\mathbf{a})$ é semi-definida positiva e nada se pode concluir $f(\mathbf{a})$;

4 (ii) se, para todo $k = 1, \dots, r$, $\Delta_k < 0$ para k ímpar e $\Delta_k > 0$ para k par, e se, para todo $k = r + 1, \dots, N$, $\Delta_k = 0$, então $f_{\mathbf{u}}^2(\mathbf{a})$ é semi-definida negativa e nada se pode concluir sobre $f(\mathbf{a})$.

Exercício exemplo 4.1.2. *Determine os pontos de estacionaridade da função a seguir indicada e classifique-os como extremos:*

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 3z^2 + yz + 2xz - xy.$$

A Proposição 4.1.4 conjugada com a Proposição 4.1.3 simplifica bastante o estudo dos extremos de funções escalares de duas variáveis.

Proposição 4.1.5 (O caso particular $N = 2$). *Sejam $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ um campo escalar de classe C^2 e*

$$\mathbf{H}(a, b) = \begin{bmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{yx}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{bmatrix}.$$

a matriz Hessiana de f calculada no ponto $(x, y) = (a, b)$. Suponhamos que (a, b) é um ponto de estacionaridade de f . Nestas condições:

²A característica de uma matriz A denota-se por $c(A)$ e, por definição, é o maior número de linhas, ou colunas, de A linearmente independentes.

1. se $\det[\mathbf{H}(a, b)] > 0$ e $f_{xx}(a, b) > 0$, então $f(a, b)$ é um mínimo local;
2. se $\det[\mathbf{H}(a, b)] > 0$ e $f_{xx}(a, b) < 0$, então $f(a, b)$ é um máximo local;
3. se $\det[\mathbf{H}(a, b)] < 0$, então $f(a, b)$ corresponde a um ponto de sela;
4. se $\det[\mathbf{H}(a, b)] = 0$, nada se pode concluir.

Demonstração.

Exercício exemplo 4.1.3. *Determine os pontos de estacionaridade da função a seguir indicada e classifique-os como extremos:*

$$f(x, y) = x^3 - 3x^2 + y^2.$$

4.2 Extremos condicionados

Na secção anterior apresentámos um processo de determinar extremos locais de uma função real de várias variáveis. Nesta secção vamos conhecer um método para determinar extremos de funções deste género, mas que estão restringidas de alguma forma. A restrição será apresentada por uma condição que se escreve por meio de uma equação onde intervêm as mesmas variáveis da função em estudo. Um problema deste género, será designado por **problema de extremos condicionados**. Sempre que possa haver confusão, distinguimos os problemas estudados na secção anterior dos da presente secção, designado-os por **problemas de extremos livres**.

Proposição 4.2.1 (Método dos Multiplicadores de Lagrange). *Se um campo escalar $f : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$ tem um extremo relativo num ponto (x_1, \dots, x_N) interior ao domínio \mathbb{D}_f quando está sujeito a M restrições*

$$\begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_N) = 0, \\ \vdots \\ g_M(x_1, \dots, x_N) = 0, \end{cases} \quad \text{onde } M < N,$$

então existem M escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_M$ tais que

$$\nabla f(x_1, \dots, x_N) = \lambda_1 \nabla g_1(x_1, \dots, x_N) + \dots + \lambda_M \nabla g_M(x_1, \dots, x_N).$$

SEM DEMONSTRAÇÃO:

As funções f, g_1, \dots, g_M da proposição anterior são admitidas terem a derivabilidade necessária para o estudo dos extremos.

Na prática, para determinar os pontos de extremos da função f restringida às M equações, consideramos uma função auxiliar

$$L : \mathbb{R}^{N+M} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$L(x_1, \dots, x_N, \lambda_1, \dots, \lambda_M) = f(x_1, \dots, x_N) + \lambda_1 g_1(x_1, \dots, x_N) + \dots + \lambda_M g_M(x_1, \dots, x_N)$$

e determinamos os pontos de extremo desta nova função. Os pontos de extremo (x_1, \dots, x_N) da função f são encontrados de entre os pontos de extremo $(x_1, \dots, x_N, \lambda_1, \dots, \lambda_M)$ da função auxiliar Λ . Cada multiplicador é introduzido por cada restrição que exista. Os escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_M$ introduzidos e que nos permitem resolver este problema, são designados por **multiplicadores de Lagrange**. Do mesmo modo, a função L é designada por **função de Lagrange**.

Apesar deste método apenas permitir localizar potenciais extremos condicionados de uma função sujeita a uma ou mais restrições, em muitos problemas é possível identificar a natureza dos pontos críticos utilizando argumentos decorrentes da natureza do problema.

Exemplo 4.2.1. *Determine os valores extremos da função $f(x, y) = 2xy$ na circunferência $x^2 + y^2 = 1$.*

4.3 Exercícios

1. Determine e classifique os pontos de estacionariedade das funções seguintes:

- | | |
|---|--|
| (a) $z = x^2 + (y - 1)^2$; | (h) $z = xy(x - 1)$; |
| (b) $z = x^2 + y^4$; | (i) $z = x^4 + y^4 - 2x^2$; |
| (c) $z = x^2 - (y - 1)^2$; | (j) $z = xy \ln(x^2 + y^2)$; |
| (d) $z = 2x^2 - xy - 3y^2 - 3x + 7y$; | (k) $w = \text{sen}(x) \cosh(y)$; |
| (e) $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$; | (l) $w = e^{3x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$; |
| (f) $z = x^2 - 2xy + \frac{1}{3}y^3 - 3y$; | (m) $w = e^{x^2+y^2+z^2}$; |
| (g) $z = x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5$; | (n) $w = x^2 + y^2 + 3z^2 + yz + 2xz - xy$. |

2. Verifique que as condições de 2ª ordem nada podem concluir sobre a totalidade dos pontos de estacionariedade das funções

- | | |
|---|-------------------------------------|
| (a) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$; | (c) $f(x, y) = x^2y^2 - 2xy$; |
| (b) $f(x, y) = x^3 + 6x^2 - 3y^2 + y^3$; | (d) $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^2$. |

3. Determine os extremos da função y definida implicitamente por

$$y^3 - 3x^2y + x^3 = 3.$$

4. Determine os extremos da função z definida implicitamente por

$$x + 2xy + 3z^2 + x^2z = 1.$$

Capítulo 5

Integrais de Linha

5.1 Primeiras noções

Nesta secção vamos desenvolver a noção de integral ao longo de uma curva que é descrita num espaço euclidiano. Por simplicidade de escrita e das aplicações práticas, vamos considerar apenas o plano \mathbb{R}^2 e o espaço \mathbb{R}^3 , os quais iremos designar apenas por plano e espaço, respectivamente.

Definição 5.1.1. *Seja I um intervalo fechado de \mathbb{R} . Uma **linha**, ou **curva**, é um conjunto de pontos cujas coordenadas cartesianas são dadas por:*

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad \text{no caso do plano;}$$

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \quad \text{no caso do espaço;}$$

onde x e y , ou x , y e z são funções contínuas da variável $t \in I$.

Por vezes, denominamos as linhas por curvas e, nesse sentido, é habitual denotar as linhas por \mathcal{C} , notação que iremos seguir neste curso. Outra notação frequente para as linhas é Γ . As linhas são habitualmente escritas na forma paramétrica:

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in I, \quad \text{no caso do plano;}$$

ou

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in I, \quad \text{no caso do espaço.}$$

No entanto podem, também, aparecer escritas na forma cartesiana:

$$y = f(x), \quad x \in I, \quad \text{no caso do plano;}$$

onde f é uma função contínua dada, ou

$$\begin{cases} y = f(x, z) \\ z = g(x, y) \end{cases}, \quad x \in I, \quad \text{no caso do espaço,}$$

onde f e g são funções contínuas dadas. Podem, ainda, ser escritas por outras formas. Por exemplo, fazendo uso das coordenadas polares no caso do plano \mathbb{R}^2 , ou das coordenadas cilíndricas ou esféricas no caso do espaço \mathbb{R}^3 . Mas neste curso vamos estudar, apenas, curvas definidas na forma paramétrica ou na forma cartesiana.

Definição 5.1.2. Designa-se por **caminho** qualquer linha a que lhe está adstrita um sentido em que é descrita, uma origem, uma extremidade e a cada ponto uma multiplicidade.

Os caminhos são, também, denominados por **trajectórias** e são representados por aplicações vectoriais contínuas. Sendo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, com $a < b$, temos as representações seguintes:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{r} : [a, b] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (x(t), y(t)) \end{array} \Leftrightarrow \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in [a, b];$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{r} : [a, b] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & (x(t), y(t), z(t)) \end{array} \Leftrightarrow \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in [a, b];$$

nos casos do plano e espaço, respectivamente. Designam-se por **origem do caminho** ao ponto $A = \mathbf{r}(a)$ e por **extremidade do caminho** ao ponto $B = \mathbf{r}(b)$. Neste caso, dizemos que o **caminho** está **orientado** de A para B . No caso de $A = B$, *i.e.* $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$, diz-se que o **caminho** é **fechado**. Caso contrário, diz-se que o **caminho** é **aberto**. Dizemos que um **ponto** C tem **multiplicidade** k , se corresponder a k valores distintos $t_1, \dots, t_k \in [a, b]$, *i.e.*, se $\mathbf{r}(t_1) = \dots = \mathbf{r}(t_k) = C$.

Por simplicidade de escrita, mas tendo em conta que se trata de um abuso de linguagem, iremos designar os caminhos por linhas e continuaremos a utilizar a letra \mathcal{C} para denotar os caminhos.

Exemplo 5.1.1. Esboce os caminhos seguintes em sistemas de eixos cartesianos apropriados:
a) $\mathbf{r}(t) = (\cos(t), \sin(t))$, com $t \in [0, \pi/2]$.

Resolução: Temos $x(t) = \cos(t)$ e $y(t) = \sin(t)$, pelo que $\mathbf{r}(t) = (\cos(t), \sin(t))$ corresponde ao arco da circunferência $x^2 + y^2 = 1$ entre os pontos de origem $A = (\cos(0), \sin(0)) = (1, 0)$ e extremidade $B = (\cos(\pi/2), \sin(\pi/2)) = (0, 1)$.

b) $\mathbf{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), 3t)$, com $t \in [0, 2\pi]$.

Resolução: Temos $x(t) = \cos(t)$, $y(t) = \sin(t)$ e $z(t) = 3t$. Raciocinando de modo análogo ao da alínea anterior, $\mathbf{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), 3t)$ vai corresponder ao arco da hélice $x^2 + y^2 = 1$ entre os planos $z = 0$ e $z = 6\pi$. Tem por origem o ponto $A = (\cos(0), \sin(0), 3 \times 0) = (1, 0, 0)$ e a sua extremidade é $B = (\cos(2\pi), \sin(2\pi), 3 \times 2\pi) = (0, 1, 6\pi)$.

Definição 5.1.3. Sejam \mathbf{F} uma função vectorial e \mathcal{C} um caminho parametrizado por $\mathbf{r}(t)$, com $t \in [a, b]$ e $a < b$. Define-se o **integral de linha do campo vectorial** \mathbf{F} sobre o caminho \mathcal{C} por

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \equiv \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt.$$

No caso do plano, se o caminho \mathcal{C} está parametrizado por $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ e

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{F} : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (F_1(x, y), F_2(x, y)) \end{array} ,$$

i.e. $\mathbf{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$, a expressão do integral de linha simplifica-se a

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} = \int_a^b (F_1 x' + F_2 y') dt.$$

Se, no espaço, o caminho \mathcal{C} está parametrizado por $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ e

$$\mathbf{F} : \quad \mathbb{R}^3 \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \quad \mapsto \quad (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z)) \quad ,$$

i.e. $\mathbf{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$ a expressão simplifica-se a

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} = \int_a^b (F_1 x' + F_2 y' + F_3 z') dt.$$

Se \mathcal{C} for um caminho fechado, usamos a notação

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \quad \text{em vez de} \quad \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}.$$

Observemos que as expressões dos segundos membros das equações anteriores estão escritas de uma forma abreviada. Convém ter em mente que todas as funções aí envolvidas vêm escritas em função de t . Por exemplo, $F_1 = F_1(x(t), y(t))$ no caso do plano, ou $F_1 = F_1(x(t), y(t), z(t))$ no caso do espaço e $x' = x'(t)$.

Exemplo 5.1.2. Calcule o integral de linha $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}$ nas condições seguintes:

a) $\mathbf{F}(x, y) = (-y, -xy)$ e \mathcal{C} é o caminho parametrizado por $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \text{sen} t)$, com $t \in [0, \pi/2]$.

Resolução: Sabendo que $x(t) = \cos(t)$ e $y(t) = \text{sen}(t)$, $F_1(x(t), y(t)) = -y(t) = -\text{sen}(t)$ e $F_2(x(t), y(t)) = -x(t)y(t) = -\cos(t)\text{sen}(t)$, temos

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} = \int_0^{\pi/2} (F_1 x' + F_2 y') dt = \int_0^{\pi/2} (\text{sen}^2(t) - \text{sen}(t) \cos^2(t)) dt = \\ \left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\text{sen}(2t) + \frac{1}{3}\cos^3(t) \right]_{t=0}^{t=\pi/2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}.$$

b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (z, x, y)$ e \mathcal{C} é o caminho parametrizado por $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \text{sen} t, 3t)$, com $t \in [0, 2\pi]$.

Resolução: Neste caso, $x(t) = \cos(t)$, $y(t) = \text{sen}(t)$ e $z(t) = 3t$, $F_1(x(t), y(t), z(t)) = z(t) = 3t$, $F_2(x(t), y(t), z(t)) = x(t) = \cos(t)$, $F_3(x(t), y(t), z(t)) = y(t) = \text{sen}(t)$. Então

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} = \int_0^{2\pi} (F_1 x' + F_2 y' + F_3 z') dt = \int_0^{2\pi} (-3t \text{sen}(t) + \cos^2(t) + 3 \text{sen}(t)) dt = \\ \left[3t \cos(t) - \text{sen}(t) + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\text{sen}(2t) \right]_{t=0}^{t=2\pi} = 7\pi.$$

No caso particular da função vectorial \mathbf{F} ter apenas uma componente não nula, obtemos uma nova noção de integral de linha. Designaremos este novo integral por integral de linha relativamente a uma variável.

Definição 5.1.4. *Sejam f uma função escalar e \mathcal{C} um caminho parametrizado por $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, no caso do plano, ou $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, no caso do espaço, com $t \in [a, b]$ e $a < b$. O **integral de linha** do campo escalar f ao longo do caminho \mathcal{C} **relativo à variável** x , y ou z é dado, respectivamente, por*

$$\int_{\mathcal{C}} f dx = \int_a^b f x' dt, \quad \int_{\mathcal{C}} f dy = \int_a^b f y' dt, \quad \int_{\mathcal{C}} f dz = \int_a^b f z' dt.$$

Os casos mencionados na definição anterior, correspondem a considerar na Definição 5.1.3, respectivamente, $\mathbf{F} = (f, 0)$ e $\mathbf{F} = (0, f)$ no caso do plano, ou $\mathbf{F} = (0, 0, f)$, $\mathbf{F} = (f, 0, 0)$, $\mathbf{F} = (0, f, 0)$ e $\mathbf{F} = (0, 0, f)$ no caso do espaço.

Exemplo 5.1.3. *Calcule os integrais de linha*

$$\int_{\mathcal{C}} f dx, \quad \int_{\mathcal{C}} f dy \quad e \quad \int_{\mathcal{C}} f dz,$$

onde $f(x, y, z) = xy + y^2 - xyz$ e \mathcal{C} é o arco da parábola dado por $y = x^2$ e $z = 0$ entre os pontos $A = (-1, 1, 0)$ e $B = (2, 4, 0)$.

Resolução: *Observemos que o caminho em questão é um ramo da parábola $y = x^2$ inscrita no plano $z = 0$. Uma parametrização possível para este caminho é $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, 0)$, com $t \in [-1, 2]$ e onde fizemos $x(t) = t$, $y(t) = x(t)^2 = t^2$ e $z(t) = 0$. Por outro lado, tem-se $f(x(t), y(t), z(t)) = x(t)y(t) + y(t)^2 - x(t)y(t)z(t) = t^3 + t^4$. Logo:*

$$\int_{\mathcal{C}} f dx = \int_{-1}^2 f(x(t), y(t), z(t)) x'(t) dt = \int_{-1}^2 (t^3 + t^4) dt = \left[\frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{5}t^5 \right]_{t=-1}^{t=2} = \frac{207}{20};$$

$$\int_{\mathcal{C}} f dy = \int_{-1}^2 f(x(t), y(t), z(t)) y'(t) dt = 2 \int_{-1}^2 (t^4 + t^5) dt = 2 \left[\frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{6}t^6 \right]_{t=-1}^{t=2} = \frac{213}{15};$$

$$\int_{\mathcal{C}} f dz = \int_{-1}^2 f(x(t), y(t), z(t)) z'(t) dt = \int_{-1}^2 (t^3 + t^4) \times 0 dt = 0.$$

Definição 5.1.5. *Sejam f uma função escalar e \mathcal{C} um caminho parametrizado por $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, no caso do plano, ou $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, no caso do espaço, com $t \in [a, b]$ e $a < b$. O **integral de linha** do campo escalar f ao longo do caminho \mathcal{C} **relativamente ao comprimento de arco**, denotado por s , é definido por*

$$\int_{\mathcal{C}} f ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\| dt,$$

sendo $ds = \|d\mathbf{r}/dt\| dt$ designado o **elemento de arco**.

No caso do plano e do espaço, a expressão anterior simplifica-se, respectivamente a

$$\int_{\mathcal{C}} f ds = \int_a^b f \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt \quad e \quad \int_{\mathcal{C}} f ds = \int_a^b f \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} dt$$

Exemplo 5.1.4. Calcule o integral de linha $\int_C f ds$, onde:

a) $f(x, y) = x^2y$ e C é o caminho parametrizado por $\mathbf{r}(t) = (\text{sen } t, \cos t)$, com $t \in [0, \pi/2]$;

Resolução: Observe-se que, neste caso, o caminho em questão é o ramo da circunferência $x^2 + y^2 = 1$ entre os pontos $A = (\text{sen}(0), \cos(0)) = (0, 1)$, de origem, e $B = (\text{sen}(\pi/2), \cos(\pi/2)) = (1, 0)$, extremidade (percorrido no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio). Aqui, $x(t) = \text{sen}(t)$, $y(t) = \cos(t)$ e $f(x(t), y(t)) = x(t)^2y(t) = \text{sen}^2(t)\cos(t)$. Então

$$\begin{aligned} \int_C f ds &= \int_0^{\pi/2} f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \\ &= \int_0^{\pi/2} \text{sen}^2(t) \cos(t) \sqrt{\cos^2(t) + (-\text{sen}(t))^2} dt = \frac{1}{3} [\text{sen}^3(t)]_{t=0}^{t=\pi/2} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

b) $f(x, y, z) = 1/(x^2 + y^2 + z^2)$ e C é o caminho parametrizado por $\mathbf{r}(t) = (\cos(t), \text{sen}(t), t)$, com $t \in [0, 1]$.

Resolução: Agora, o caminho é o ramo de hélice $x^2 + y^2 = 1$ entre os planos $z = 0$ e $z = 1$. A parametrização é dada por $x(t) = \cos(t)$, $y(t) = \text{sen}(t)$ e $z(t) = t$. Logo, $f(x(t), y(t), z(t)) = (\cos^2(t) + \text{sen}^2(t) + t^2)^{-1} = (1 + t^2)^{-1}$ e

$$\begin{aligned} \int_C f ds &= \int_0^1 f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt = \\ &= \sqrt{2} \int_0^1 \frac{dt}{1 + t^2} = \sqrt{2} [\text{arctg}t]_{t=0}^{t=1} = \frac{\sqrt{2}}{4} \pi. \end{aligned}$$

5.2 Motivação

O conceito de integral de linha tem bastantes aplicações em diversos campos das ciências. Vamos aqui considerar, apenas como exemplos de aplicação, um exemplo físico e outro geométrico.

Definição 5.2.1. Sejam C um caminho parametrizado por $\mathbf{r}(t)$, onde $t \in [a, b]$ e \mathbf{F} um campo de forças. Definimos o **trabalho realizado pela força \mathbf{F}** quando o seu ponto de aplicação percorre o caminho C por

$$\mathcal{W} = \int_C \mathbf{F} \equiv \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot d\mathbf{r}.$$

Deste modo, verificamos que o trabalho realizado por um campo de forças ao longo de uma curva é dado pela Definição 5.1.3.

Exemplo 5.2.1. Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, -xy, z^2)$, sobre uma partícula que se move sobre a hélice $\mathbf{r}(t) = (\cos(t), \text{sen}(t), t)$, desde o ponto $A = (1, 0, 0)$ até ao ponto $B = (-1, 0, 3\pi)$.

Resolução: A parametrização do caminho é $x(t) = \cos(t)$, $y(t) = \text{sen}(t)$ e $z(t) = t$ e, pela última componente, vemos que $t \in [0, 3\pi]$. Então, $\mathbf{F}(x(t), y(t), z(t)) = (\cos(t), -\cos(t)\text{sen}(t), t^2)$ e

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \int_C \mathbf{F} = \int_0^{3\pi} (F_1x' + F_2y' + F_3z') dt = \int_0^{3\pi} (-\cos(t)\text{sen}(t) - \cos^2(t)\text{sen}(t) + t^2) dt \\ &= \left[\frac{1}{2} \cos^2(t) + \frac{1}{3} \cos^3(t) + \frac{1}{3} t^3 \right]_{t=0}^{t=3\pi} = 9\pi^3 - \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Definição 5.2.2. *Seja \mathcal{C} um caminho parametrizado por $\mathbf{r}(t)$, onde $t \in [a, b]$. Definimos o comprimento do caminho \mathcal{C} por*

$$s = \int_{\mathcal{C}} ds = \int_a^b \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\| dt.$$

Por abuso de linguagem, poderemos falar em **comprimento da curva \mathcal{C}** em vez de comprimento do caminho \mathcal{C} . Tal como vimos acima, também aqui, a expressão para o comprimento da curva \mathcal{C} pode ser escrita nas formas mais simples

$$s = \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt \quad \text{e} \quad s = \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} dt,$$

nos casos do plano e do espaço, respectivamente.

Exemplo 5.2.2. *Calcule o comprimento das curvas seguintes:*

a) *circunferência $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$;*

Resolução: *Uma parametrização possível é $x(t) = 3\cos(t) - 2$ e $y(t) = 3\sin(t) + 1$, com $t \in [0, \pi]$.*

O comprimento desta circunferência é, então, dado por:

$$\int_{\mathcal{C}} ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-3\sin(t))^2 + (3\cos(t))^2} dt = 6\pi.$$

b) *hélice, parametrizada por $\mathbf{r}(t) = (t, \sin(t), \cos(t))$, desde o ponto $A = (0, 0, 1)$ até ao ponto $B = (3\pi, 0, -1)$.*

Resolução: *A parametrização indicada é $x(t) = t$, $y(t) = \sin(t)$ e $z(t) = \cos(t)$, e, pela primeira componente, vemos que $t \in [0, 3\pi]$. Assim, o comprimento da hélice é dado por:*

$$\int_{\mathcal{C}} ds = \int_0^{3\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt = \int_0^{3\pi} \sqrt{1 + (\cos(t))^2 + (-\sin(t))^2} dt = 3\sqrt{2}\pi.$$

5.3 Propriedades gerais

Proposição 5.3.1. *Sejam \mathbf{F} e \mathbf{G} campos vectoriais, α uma constante real e \mathcal{C} um caminho. Então:*

1. $\int_{\mathcal{C}} (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} + \int_{\mathcal{C}} \mathbf{G}$;
2. $\int_{\mathcal{C}} \alpha \mathbf{F} = \alpha \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}$;
3. *Se \mathcal{C} é a união de dois caminhos, digamos \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 , então $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} = \int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} + \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F}$.*

DEMONSTRAÇÃO - EXERCÍCIO:

Exemplo 5.3.1. *Calcule o integral de $\mathbf{F}(x, y) = (y, x)$ ao longo do caminho rectilíneo \mathcal{C} que une a origem de referencial ao ponto $(3, 1)$, passando pelo ponto $(3, 0)$.*

Antes de passarmos ao resultado seguinte, convém referir que se entende por **caminho oposto** de um dado caminho \mathcal{C} como sendo o caminho percorrido ao longo da curva \mathcal{C} , mas em sentido contrário. Denotamos o caminho oposto por \mathcal{C}^- .

Proposição 5.3.2. *Seja \mathcal{C} um caminho parametrizado por $\mathbf{r}(t)$, com $t \in [a, b]$ e \mathcal{C}^- o seu caminho oposto. O caminho \mathcal{C}^- é parametrizado por $\mathbf{r}^-(t) = \mathbf{r}(a + b - t)$ e temos*

$$\int_{\mathcal{C}^-} \mathbf{F} = - \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}$$

Demonstração.

Exemplo 5.3.2. *a) Calcule o integral de $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy)$ ao longo da parábola $y = x^2$ desde o ponto $A = (-1, 1)$ até ao ponto $B = (1, 1)$.*

b) Calcule o integral anterior, mas no caminho oposto.

5.4 Integral de linha independente do caminho

Como temos vindo a ver nas secções precedentes, um dos principais problemas para o cálculo dos integrais de linha prende-se com a determinação de uma parametrização para o caminho. Contudo, existem integrais de linha para os quais não é necessário conhecer como é descrito o caminho, isto é, a parametrização. Basta conhecermos a origem e a extremidade do caminho. Recordemos que se define e denota o **gradiente de uma função escalar** f por

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \text{no caso do plano,}$$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right), \quad \text{no caso do espaço.}$$

Por vezes, o gradiente de uma função f é denotado por $\text{grad } f$.

Proposição 5.4.1. *Sejam \mathcal{C} um caminho que une o ponto A ao ponto B e \mathbf{F} um campo vectorial tal que $\mathbf{F} = \nabla f$ para alguma função escalar f . Então*

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} = f(B) - f(A).$$

Demonstração. A proposição anterior diz-nos que, a existir tal campo escalar, o integral de linha vai ser independente do caminho que é percorrido entre o ponto A e o ponto B . Isto é, o integral de linha sobre caminhos distintos que unam o ponto A ao B tem sempre o mesmo valor. Em particular, se \mathcal{C} for um caminho fechado, $A = B$ e, por consequência $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} = 0$. Deste modo, vamos denotar o integral independente do caminho por

$$\int_A^B \mathbf{F}.$$

Em termos físicos, podemos interpretar o resultado anterior do modo seguinte. Quando um potencial (a função escalar f) existe, o trabalho realizado por uma força (a função vectorial \mathbf{F}) para mover uma partícula ao longo de uma curva que una o ponto A a B , é a diferença entre os potenciais de B e A .

Na resolução de exercícios práticos, há que determinar a função escalar f , para podermos calcular o integral de linha.

Exemplo 5.4.1. Calcule o integral de linha de $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xy^3z, 3x^2y^2z, x^2y^3)$ ao longo do caminho que une o ponto $A = (1, -1, 2)$ a $B = (-3, 2, 5)$.

Existem casos em que o enunciado é omissivo quanto ao integral ser independente do caminho ou não. Nestes casos, necessitamos de condições que nos garantam que determinado campo vectorial corresponde ao gradiente de alguma função escalar. O próximo resultado fornece-nos uma condição necessária, mas não suficiente, para verificarmos isso.

Proposição 5.4.2. *Seja \mathbf{F} um campo vectorial. Suponhamos que existe uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$. Então:*

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}, \quad \text{no caso do plano;} \quad (5.4.1)$$

ou

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}, \quad \text{no caso do espaço.} \quad (5.4.2)$$

Demonstração. Este resultado é muito útil pelo que diz a sua afirmação contra-recíproca. Isto é, se a condição (5.4.1), ou a condição (5.4.2), não é satisfeita, então não existe um campo escalar f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

Exemplo 5.4.2. *Considere o integral de linha de $\mathbf{F} = (5z, xy, x^2z)$ ao longo de uma curva que une o ponto $A = (0, 0, 0)$ a $B = (1, 1, 1)$.*

a) *Verifique que este integral não é independente do caminho.*

b) *Para corroborar a), calcule este integral de linha quando o caminho é parametrizado por:*

(i) $\mathbf{r}_1(t) = (t, t, t)$, com $t \in [0, 1]$;

(ii) $\mathbf{r}_2(t) = (t, t, t^2)$, com $t \in [0, 1]$.

A questão que agora se põe é a de saber em que condições a afirmação recíproca da expressa na Proposição 5.4.2 é suficiente para o integral de linha ser independente do caminho.

Proposição 5.4.3. *Seja \mathcal{C} um caminho contido num domínio simplesmente conexo¹ \mathbb{D} de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 que contém o caminho \mathcal{C} . Suponhamos que $\mathbf{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$, ou $\mathbf{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$ são tais que, respectivamente,*

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}, \quad \text{no caso do plano;} \quad (5.4.3)$$

ou

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}, \quad \text{no caso do espaço.} \quad (5.4.4)$$

Então o integral $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}$ é independente do caminho \mathcal{C} .

SEM DEMONSTRAÇÃO:

¹Um conjunto \mathbb{D} diz-se um domínio simplesmente conexo, se qualquer caminho fechado \mathcal{C} contido em \mathbb{D} puder ser encolhido até um ponto no interior de \mathbb{D} sem intersectar pontos exteriores ao conjunto \mathbb{D} .

5.5 Exercícios

1. Esboce as curvas seguintes no plano:

- a) $\mathbf{r}(t) = (t, 2t - 1)$, com $t \in [0, 1]$;
- b) $\mathbf{r}(t) = (t, -\sqrt{1 - t^2})$, com $t \in [-1, 1]$;
- c) $\mathbf{r}(t) = (t, 1/t)$, com $t \in (-\infty, 0)$;
- d) $\mathbf{r}(t) = (\frac{3}{2} \cos(t), 3 \operatorname{sen}(t))$, com $t \in [0, 2\pi]$.

2. Esboce o caminho retilíneo fechado \mathcal{C} parametrizado por:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} (t, t) & \text{se } 1 \leq t < 2 \\ (4 - t, t) & \text{se } 2 \leq t < 3 \\ (1, 6 - t) & \text{se } 3 \leq t \leq 5 \end{cases}.$$

3. Esboce o caminho fechado \mathcal{C} parametrizado por:

$$\mathbf{r}(t) \equiv (x(t), y(t)) = \begin{cases} (-t, 1 - t^2) & -1 \leq t < 1 \\ (t - 2, 0) & 1 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

4. Esboce as curvas seguintes no espaço:

- a) $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen}(2t), 0)$, com $0 \leq t \leq 2\pi$;
- b) $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3)$, com $0 \leq t \leq 2$.

5. Calcule o integral de linha $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}$ nos casos seguintes:

- a) $\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{-y}{4x^2 + y^2}, \frac{x}{4x^2 + y^2} \right)$, onde \mathcal{C} é o caminho dado no Exercício 1-d).
- b) $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$, onde \mathcal{C} é o caminho dado no Exercício 3.
- c) $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2 - z^2, 2yz, -x^2)$ e \mathcal{C} é o caminho parametrizado por $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3)$, com $t \in [0, 1]$;
- d) $\mathbf{F}(x, y, z) = (\cosh x, \operatorname{senh} y, e^z)$ e \mathcal{C} é o caminho parametrizado por $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3)$, com $t \in [0, 2]$;

6. Sendo \mathcal{C} o caminho parametrizado por $\mathbf{r}(t) = (2 \cos t, \operatorname{sen} t)$, calcule os integrais de linha seguintes:

$$\text{a) } \int_{\mathcal{C}} y \, dx; \quad \text{b) } \int_{\mathcal{C}} (x^2 + y^2) \, dy; \quad \text{c) } \int_{\mathcal{C}} y^2 \, dx + x^2 \, dy.$$

7. Calcule o integral seguinte, onde \mathcal{C} é o caminho do Exercício 2:

$$\int_{\mathcal{C}} 2(x^2 + y^2) \, dx + 2(x + y)^2 \, dy.$$

8. Calcule o integral $\int_{\mathcal{C}} y \, dx + z \, dy + x \, dz$, onde \mathcal{C} é o caminho percorrido no sentido positivo e que resulta da intersecção das superfícies $x + y = 2$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$.

9. Calcule os integrais de linha $\int_{\mathcal{C}} f \, ds$, onde:

- a) $f(x, y) = x + y$ e \mathcal{C} é o caminho retilíneo fechado, percorrido no sentido positivo, que passa pelos pontos $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$ e $C = (0, 1)$;
- b) $f(x, y, z) = z$ e \mathcal{C} é o caminho parametrizado por $\mathbf{r}(t) = (t \cos t, t \operatorname{sen} t, t)$, com $0 \leq t \leq 2\pi$.

10. Calcule os comprimentos das curvas seguintes:

a) $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, com $t \in [0, 2\pi]$;

b) asteróide $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$;

c) curva parametrizada pelo caminho dado no Exercício 2.

11. Mostre que a função vectorial envolvida nos integrais seguintes é o gradiente de um potencial e calcule o valor dos respectivos integrais:

a) $\int_{(0,\pi)}^{(3,\pi/2)} e^x (\cos y dx - \sin y dy)$; b) $\int_{(0,-1,1)}^{(2,4,0)} e^{x-y+z^2} (dx - dy + 2z dz)$;

c) $\int_{(1,1,1)}^{(2,1,1)} yz dx + xz dy + xy dz$.

12. Calcule os integrais de linha seguintes:

a) $\int_{(-1,5)}^{(4,3)} (3z^2 dx + 6xz dz)$; b) $\int_{(0,2,3)}^{(1,1,1)} [yz \sinh(xz) dx + \cosh(xz) dy + xy \sinh(xz) dz]$;

c) $\int_{(\frac{\pi}{4},1,1)}^{(\pi,0,2)} (z^2 - y \sin(x)) dx + (\cos(x) - 2z) dy + (2xz - 2y + z) dz$.

Capítulo 6

Integrais Duplos

Neste capítulo, vamos estender a noção de integral para funções escalares de duas variáveis. As regiões de integração vão, agora, ser subconjuntos de \mathbb{R}^2 . Primeiro, consideramos regiões de integração rectangulares e depois consideramos regiões mais gerais com fronteiras curvilíneas.

6.1 Integral de Riemann

Começemos por estender a noção de partição de um intervalo limitado de \mathbb{R} a um rectângulo (limitado) contido em \mathbb{R}^2 . Para isso, recordemos que uma **partição de um intervalo** $[a, b] \subset \mathbb{R}$ é um conjunto finito de pontos, digamos x_0, x_1, \dots, x_n , que divide o intervalo $[a, b]$ em subintervalos tais que

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$

onde n é um número natural arbitrário. O comprimento do i -ésimo intervalo é

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

A localização dos pontos x_0, x_1, \dots, x_n , e a consequente divisão do intervalo $[a, b]$, é arbitrária. Em particular, os subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ não têm necessariamente o mesmo comprimento. A partição, desta forma definida, vai ser denotada por P e escreve-se do modo seguinte:

$$P : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Definição 6.1.1. *Sejam a, b, c e d números reais tais que $a < b$ e $c < d$. Consideremos o rectângulo*

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d\}$$

e as partições dos intervalos $[a, b]$ e $[c, d]$, definidas, respectivamente, por

$$P_1 : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b \quad e \quad P_2 : c = y_0 < y_1 < \dots < y_{m-1} < y_m = d,$$

*onde n e m são números naturais arbitrários. Designa-se por **partição do rectângulo** R ao conjunto seguinte*

$$P = \{(x_i, y_j) \in R : 0 \leq i \leq n, \quad 0 \leq j \leq m\}.$$

Uma partição P do rectângulo R tal como acima definimos, determina mn subrectângulos de R :

$$R_{ij} = \{(x_i, y_j) \in \mathbb{R}^2 : x_{i-1} \leq x \leq x_i, \quad y_{j-1} \leq y \leq y_j\},$$

cujas áreas são dadas por

$$\Delta x_i \Delta y_j = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}).$$

A colecção destes subrectângulos R_{ij} , é o que verdadeiramente constitui a partição P .

Definição 6.1.2. *Seja f uma função definida num rectângulo $R \subset \mathbb{R}^2$. Designamos por **soma de Riemann** da função f no rectângulo R à quantidade seguinte:*

$$\sum_{i=0, j=0}^{n, m} f(x_{ij}^*) \Delta x_i \Delta y_j \equiv \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n f(x_{ij}^*) \Delta x_i \Delta y_j \equiv f(x_{11}^*) \Delta x_1 \Delta y_1 + \cdots + f(x_{nm}^*) \Delta x_n \Delta y_m;$$

onde x_{ij}^* são pontos seleccionados aleatoriamente nos subrectângulos R_{ij} respectivos.

Para a noção de integral duplo, interessa-nos que as partições sejam muito finas. Definimos a quantidade que define a finura de dada partição P de um rectângulo $R \subset \mathbb{R}^2$ por

$$|P| = \max_{i, j} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_j)^2}.$$

Observemos que $|P|$ é o comprimento da maior diagonal de todos os subrectângulos R_{ij} considerados na partição P .

Definição 6.1.3. *Sejam f uma função definida num rectângulo $R \subset \mathbb{R}^2$ e*

$$P = \{(x_i, y_j) \in R : 0 \leq i \leq n, \quad 0 \leq j \leq m\}$$

uma partição arbitrária de R . Diz-se que a **função** f é **integrável** (à Riemann) no rectângulo R , se existir (e for finito) o limite seguinte:

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n f(x_{ij}^*) \Delta x_i \Delta y_j,$$

independentemente de como a partição P do rectângulo R é formada, ou de como os pontos x_{ij}^* pertencentes aos subrectângulos R_{ij} são escolhidos.

No caso de existir, o limite da definição anterior designa-se por **integral da função** f e denota-se por

$$\int \int_R f(x, y) dx dy \quad \text{ou} \quad \int \int_R f(x, y) dy dx,$$

onde $dx dy$, ou $dy dx$, indica um elemento de área ao qual ainda não está subjacente nenhuma ordem de integração.

A noção de função integrável que acabamos de introduzir, estende-se a qualquer função definida num conjunto limitado $D \subset \mathbb{R}^2$ que não seja propriamente um rectângulo. Apenas temos de considerar um rectângulo R que contenha D e aí fazer a análise anterior. O único cuidado a tomar para a definição fazer sentido, é fixar o valor de $f(x_{ij}^*)$ igual a zero quando x_{ij}^* não pertencer a D .

Proposição 6.1.1. *Seja D um subconjunto de \mathbb{R}^2 limitado e cuja fronteira é constituída pela união de curvas (contínuas). Consideremos uma função f definida em D . Se f é contínua em D excepto, quanto muito, num conjunto de medida nula¹, então f é integrável em D .*

Demonstração. Ver, por exemplo, Dias Agudo, Volume I, p. 236. \square

A proposição anterior diz-nos basicamente que todas as funções elementares que conhecemos serão integráveis em domínios limitados.

As propriedades do análogo integral definido em \mathbb{R} , serão válidas *mutatis mutandis* para o integral duplo. Em particular, o integral duplo é um operador linear e satisfaz a propriedade aditiva dos integrais.

6.2 Integral repetido

Em integração de funções reais de uma variável real apenas, o denominado Teorema Fundamental do Cálculo Integral dá-nos um modo muito prático de calcular integrais. A proposição seguinte vai-nos permitir calcular alguns integrais duplos usando integrações repetidas de funções reais de uma variável real.

Proposição 6.2.1 (Fubini). *Seja f uma função integrável num rectângulo*

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}, \quad \text{onde } a < b \text{ e } c < d.$$

Suponhamos que $\int_a^b f(x, y) dx$ existe para qualquer $y \in [c, d]$, e que $\int_c^d f(x, y) dy$ existe para qualquer $x \in [a, b]$. Então

$$\int \int_R f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx.$$

Demonstração. Ver, por exemplo, Dias Agudo, Volume I, p. 247. \square

Os integrais expressos no segundo membro da equação dada na proposição anterior designam-se por **integrais repetidos ou iterados**. Observe-se que por aplicação do Teorema Fundamental ao cálculo dos integrais entre parêntesis rectos acima referidos, se primitiva a função f em relação à variável aí referida, fixando a outra variável como se fosse constante.

Exemplo 6.2.1. *Esboce a região de integração e calcule o integral respectivo:*

$$\int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}(2x - 3y) dx dy.$$

A Proposição 6.2.1 pode ser generalizada a qualquer domínio limitado $D \subset \mathbb{R}^2$. Isto é, o cálculo de um integral duplo num domínio limitado, resume-se ao cálculo de integrais repetidos.

¹Um subconjunto E de \mathbb{R}^2 diz-se de medida nula, se existir uma quantidade finita de rectângulos cuja união contém E e de tal modo que a soma das áreas é tão pequena quanto se queira.

Proposição 6.2.2. 1. *Sejam g e h duas funções reais de uma variável real, contínuas num intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, com $a < b$, e tais que, para cada $a \leq x \leq b$, $g(x) \leq h(x)$. Consideremos uma função f contínua no domínio*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}.$$

Então

$$\int \int_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

2. *Sejam i e j duas funções reais de uma variável real, contínuas num intervalo $[c, d] \subset \mathbb{R}$, com $c < d$, e tais que, para cada $c \leq y \leq d$, $i(y) \leq j(y)$. Consideremos uma função f contínua no domínio*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, i(y) \leq x \leq j(y)\}.$$

Então

$$\int \int_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_{i(y)}^{j(y)} f(x, y) dx \right] dy.$$

Demonstração. É uma consequência da Proposição 6.2.1. \square

Exemplo 6.2.2. *Esboce as regiões de integração e calcule os integrais respectivos:*

$$\text{a) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\text{sen}(y)} e^x \cos(y) dx dy \quad e \quad \text{b) } \int_0^1 \int_{1-x}^{1-x^2} x^2 dy dx.$$

Na maioria das situações, podemos integrar tanto primeiro em relação a uma variável, digamos x , e em seguida relativamente à outra, y , como pela ordem inversa. No entanto, em qualquer exercício prático, uma das alternativas anterior é mais fácil de calcular do que a outra. Mas, existem situações em que, por diversas razões, é manifestamente impossível calcular o integral primeiro relativamente a uma das variáveis, sendo a mais comum a impossibilidade de determinar a primitiva da função dada em relação a essa variável. Nestes casos, somos obrigados a calcular o integral como um integral repetido, mas com uma única ordem de integração possível. No caso dos limites de integração serem constantes, então pela Proposição 6.2.1, podemos inverter a ordem de integração da forma que nos for mais conveniente. Contudo, se os limites de integração não são constantes, a inversão da ordem de integração vai afectar também as funções que limitam a região de integração. Na prática, ao inverter a ordem de integração destes integrais, vamos considerar as inversas das funções que limitam o domínio, fazendo depois a devida mudança de variável.

Exemplo 6.2.3. *Inverta a ordem de integração do integral duplo seguinte, onde $f(x, y)$ é uma função arbitrária integrável no domínio indicado:*

$$\int_{e^{-2}}^1 \int_{\ln y}^{-\frac{1}{2} \ln y} f(x, y) dx dy.$$

Exemplo 6.2.4. Comece por verificar que, usando os métodos de primitivação conhecidos, é impossível calcular o integral seguinte pela ordem de integração que está escrito. Inverta a ordem de integração e calcule o seu valor:

$$\int_0^3 \int_{x^2}^9 x^3 e^{y^3} dy dx.$$

6.3 Mudança de variáveis

Em muitos exercícios práticos, e quando é possível, a simples inversão de ordem de integração não simplifica muito o cálculo do integral duplo. Tal como acontece em integração de funções reais de uma só variável real, também aqui podemos fazer uma transformação do integral duplo, de modo ao seu cálculo ser mais simples. Esta transformação corresponde a uma mudança de variáveis. Neste caso, não só a expressão designatória da função integranda vem alterada, assim como a própria região de integração passa a ser diferente.

Proposição 6.3.1 (Mudança de variáveis). *Sejam D e Ω dois subconjuntos abertos de \mathbb{R}^2 limitados por funções diferenciáveis e seja*

$$\begin{aligned} \varphi: \quad \Omega &\longrightarrow D \\ (u, v) &\mapsto (x, y) = \varphi(u, v) \equiv (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v)) \end{aligned}$$

uma função bijetiva com derivadas parciais contínuas. Então, se $f(x, y)$ é uma função integrável em D , temos,

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int \int_{\varphi^{-1}(D)} f(\varphi(u, v)) |J| du dv,$$

onde

$$J = \det \left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right] \equiv \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Ver, por exemplo, Dias Agudo, Volume I, p. 258 \square

Observe-se que, por φ ser bijetiva, $\varphi^{-1}(D) = \Omega$. A quantidade J expressa na proposição anterior designa-se por **jacobiano** da mudança de variáveis (x, y) para (u, v) e a matriz $\left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right]$ é a denominada **matriz jacobiana** dessa transformação. Esta matriz poderá, ainda, ser escrita da forma seguinte:

$$\left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right] \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \end{bmatrix}.$$

Exemplo 6.3.1. *Fazendo a mudança de variáveis $u = x - y$ e $v = x + y$, calcule o integral seguinte:*

$$\int \int_D \frac{\cos(x - y)}{\sen(x + y)} dx dy,$$

onde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x + y \leq 2, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\}$.

No integral duplo, o exemplo de mudança de variáveis com mais interesse prático é a **transformação para coordenadas polares**. Recordemos o que são as coordenadas polares de um ponto no plano. Seja P um ponto em \mathbb{R}^2 (plano) cujas coordenadas rectangulares num sistema de eixos cartesiano são dadas por (x, y) . Fixemos o triângulo rectângulo de vértices $(0, 0)$, $(x, 0)$ e $P = (x, y)$. Designemos a hipotenusa deste rectângulo por r e seja θ o ângulo formado entre o semi-eixo positivo dos xx e a semi-recta com origem no ponto de coordenadas $(0, 0)$ e que passa por $P = (x, y)$. Da trigonometria elementar, temos o seguinte:

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{r} \\ \text{sen}(\theta) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{y}{r} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \text{sen}(\theta) \end{cases}. \quad (6.3.1)$$

Deste modo, podemos definir o ponto P num sistema de eixos cartesiano à custa das variáveis (r, θ) , as quais se designam por **coordenadas polares** do ponto P . De facto, para qualquer ponto $P = (x, y)$ do plano, existem $r \geq 0$ e $\theta \in [0, 2\pi]$ tais que $P = (r \cos(\theta), r \text{sen}(\theta))$.

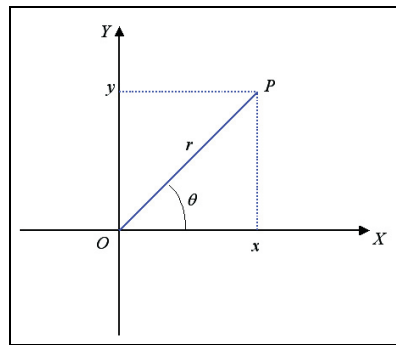


Figura 6.1: Coordenadas polares.

A mudança de variáveis para coordenadas polares é particularmente importante quando a região de integração, vista em termos das coordenadas polares, tem fronteiras ao longo das quais r ou θ é constante.

Proposição 6.3.2. *O módulo do jacobiano da mudança de variáveis para coordenadas polares, conforme (6.3.1), é $|J| = r$.*

Demonstração. Fazendo, então $x = r \cos(\theta)$ e $y = r \text{sen}(\theta)$, temos

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -r \text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & r \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Logo

$$|J| = \left| \det \begin{bmatrix} \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \end{bmatrix} \right| = |r \cos^2(\theta) + r \text{sen}^2(\theta)| = r,$$

o que conclui a demonstração. \square

Exemplo 6.3.2. Fazendo a mudança de variáveis para coordenadas polares, calcule o integral seguinte:

$$\int \int_D e^{x^2+y^2} dx dy, \quad \text{onde } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

6.4 Integração por partes

Nesta secção vamos ver como é que a fórmula de integração por partes se estende ao caso de integrais duplos. A primeira grande diferença é que em vez de integrarmos sobre um intervalo, vamos aqui integrar sobre um domínio planar. Por outro lado, as derivadas aqui serão parciais e a parte da fórmula quando se tomam os valores nos extremos do intervalo, vai aqui corresponder a um integral de linha relativamente ao comprimento de arco.

Proposição 6.4.1 (Teorema de Gauss-Green). *Seja u uma função de duas variáveis reais, com derivadas parciais contínuas num domínio aberto Ω de \mathbb{R}^2 . Sejam, ainda, \mathcal{C} um caminho diferenciável, fechado e totalmente contido em Ω , $D = \mathcal{C} \cup \text{int}(\mathcal{C}) \subset \Omega$ e $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ a normal unitária exterior a \mathcal{C} . Então:*

$$\int \int_D \frac{\partial u}{\partial x} dx dy = \int_{\mathcal{C}} u n_x ds, \quad \int \int_D \frac{\partial u}{\partial y} dx dy = \int_{\mathcal{C}} u n_y ds. \quad (6.4.2)$$

Demonstração. Ver, por exemplo, Dias Agudo, Volume 2, p. 103, ou Apostol, Volume II, p. 381. \square

Prova-se que se \mathcal{C} for um caminho diferenciável, então existe a normal unitária exterior $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ em todos os pontos de \mathcal{C} . No entanto, a validade do Teorema de Gauss-Green requer apenas que o caminho seja contínuo no sentido de Lipschitz, já que neste caso a normal existe em quase todos os pontos.

Uma consequência imediata do Teorema de Gauss-Green é o resultado da proposição seguinte.

Proposição 6.4.2 (Teorema da Divergência). *Seja $\mathbf{u} = (u, v)$, com u e v nas condições do Teorema de Gauss-Green. Então*

$$\int \int_D \text{div } \mathbf{u} dx dy = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds, \quad (6.4.3)$$

onde $\text{div } \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$ denota a divergência do campo vectorial \mathbf{u} .

Demonstração. Se, na fórmula (6.4.2), substituirmos u pela i -ésima componente de um campo vectorial $\mathbf{u} = (u, v)$, e somarmos as fórmulas respectivas, obtemos

$$\int \int_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\mathcal{C}} u n_x + v n_y ds \Leftrightarrow \int \int_D \text{div } \mathbf{u} dx dy = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds,$$

o que conclui a demonstração. \square

Depois de estabelecido o Teorema de Gauss-Green, estamos, agora, em condições de dar uma expressão para a fórmula de integração por partes para integrais duplos.

Proposição 6.4.3 (Fórmula de integração por partes). *Sejam u e v funções reais de duas variáveis reais, com derivadas parciais contínuas num domínio aberto Ω de \mathbb{R}^2 . Sejam, ainda, \mathcal{C} um caminho diferenciável, fechado e totalmente contido em Ω , $D = \mathcal{C} \cup \text{int}(\mathcal{C}) \subset \Omega$ e $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ a normal unitária exterior a \mathcal{C} . Então:*

$$\int \int_D \frac{\partial u}{\partial x} v \, dx dy = \int_{\mathcal{C}} u v n_x \, ds - \int \int_D u \frac{\partial v}{\partial x} \, dx dy; \quad (6.4.4)$$

$$\int \int_D \frac{\partial u}{\partial y} v \, dx dy = \int_{\mathcal{C}} u v n_y \, ds - \int \int_D u \frac{\partial v}{\partial y} \, dx dy. \quad (6.4.5)$$

Demonstração. A demonstração segue facilmente a partir do Teorema de Gauss-Green, substituindo u por uv em (6.4.2). \square

Se, nas fórmulas de integração por partes (6.4.4)-(6.4.5), substituirmos v pela primeira componente de um campo vectorial $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$, no caso de (6.4.4), e pela segunda componente no caso de (6.4.5), e somarmos as fórmulas respectivas, obtemos a fórmula seguinte de integração por partes mais geral:

$$\begin{aligned} \int \int_D \nabla u \cdot \mathbf{F} \, dx dy &= \int_{\mathcal{C}} u \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds - \int \int_D u \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx dy \quad \Leftrightarrow \\ \int \int_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} F_1 + \frac{\partial u}{\partial y} F_2 \right) \, dx dy &= \int_{\mathcal{C}} u (F n_x + F n_y) \, ds - \int \int_D u \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \right) \, dx dy. \end{aligned} \quad (6.4.6)$$

onde usamos a notação $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ para o gradiente de u .

Concluimos esta secção com algumas fórmulas que são bastante úteis nas aplicações.

Proposição 6.4.4 (Fórmulas de Green). *Sejam u e v funções reais de duas variáveis reais, com derivadas parciais contínuas num domínio aberto Ω de \mathbb{R}^2 . Sejam, ainda, \mathcal{C} um caminho diferenciável, fechado e totalmente contido em Ω , $D = \mathcal{C} \cup \text{int}(\mathcal{C}) \subset \Omega$ e $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ a normal unitária exterior a \mathcal{C} . Então:*

1. $\int \int_D \Delta u \, dx dy = \int_{\mathcal{C}} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, ds;$
2. $\int \int_D \nabla u \cdot \nabla v \, dx dy = \int_{\mathcal{C}} \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} u \, ds - \int \int_D u \Delta v \, dx dy;$
3. $\int \int_D (u \Delta v - v \Delta u) \, dx dy = \int_{\mathcal{C}} \left(\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} u - \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v \right) \, ds;$

onde

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \nabla u \cdot \mathbf{n}, \quad \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = \nabla v \cdot \mathbf{n}$$

são as designadas derivadas de u e v (segundo a) normal \mathbf{n} e

$$\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u)$$

é o Laplaciano de u .

Demonstração. Para demonstrar 1., usamos a fórmula de integração por partes (6.4.4)-(6.4.5), fazendo $v = 1$, e com $\frac{\partial u}{\partial x}$ no lugar de u , no caso de (6.4.4), e com $\frac{\partial u}{\partial y}$ no lugar de u no caso de (6.4.5). A demonstração de 2. sai, também, de (6.4.4) substituindo v por $\frac{\partial u}{\partial x}$ e de (6.4.5) com v no papel de $\frac{\partial u}{\partial y}$. A afirmação 3., usa (6.4.4) com $\frac{\partial u}{\partial x}$ no lugar de u e (6.4.5) com $\frac{\partial u}{\partial y}$ substituindo u . Depois considera-se a equação obtida com u e v com os papéis trocados. A equação final resulta da subtração das duas equações obtidas anteriormente. \square

6.5 Teorema de Green

Nesta secção, vamos abordar a questão importante de como se relaciona o integral duplo com o integral de linha. A resposta a esta questão, vai ser dada pelo Teorema de Green no plano.

Proposição 6.5.1 (Teorema de Green). *Sejam f e g funções reais de duas variáveis reais, com derivadas parciais contínuas num domínio aberto Ω de \mathbb{R}^2 . Sejam, ainda, \mathcal{C} um caminho simples, fechado e totalmente contido em D , onde $D = \mathcal{C} \cup \text{int}(\mathcal{C}) \subset \Omega$. Então:*

$$\int_{\mathcal{C}} f dx + g dy = \int \int_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy.$$

SEM DEMONSTRAÇÃO: Ver, por exemplo, Dias Agudo, Volume 2, p. 103.

A equação integral do Teorema de Green, é muitas vezes designada por **Fórmula de Riemann**.

Exemplo 6.5.1. *Verifique a Fórmula de Riemann do Teorema de Green para o campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = (y^2 - 7y, 2xy + 2x)$ na circunferência $x^2 + y^2 = 1$.*

O Teorema de Green é uma ferramenta muito poderosa, não só em termos práticos de resolução de alguns exercícios, assim como na demonstração de alguns resultados teóricos, alguns deles já estabelecidos. Por exemplo, fica trivial mostrar que o integral de linha de um campo conservativo calculado sobre um caminho simples fechado é zero.

Existem outras formas de apresentar o Teorema de Green no plano. Os dois resultados que apresentamos a seguir num único enunciado, são casos particulares, no plano, de resultados mais gerais.

Proposição 6.5.2. *Sejam Ω , D e \mathcal{C} como no enunciado da Proposição 6.5.1 e seja \mathbf{F} um campo vectorial cujas suas componentes, F_1 e F_2 , têm derivadas parciais contínuas em Ω . Admitamos que o caminho \mathcal{C} resulta de uma parametrização derivável e sejam \mathbf{n} e \mathbf{t} os vectores unitários normal e tangente, respectivamente, à curva \mathcal{C} . Então:*

1. Teorema da Divergência

$$\int \int_D \text{div } \mathbf{F} dx dy = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds;$$

2. Teorema de Stokes

$$\int \int_D \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{z} dx dy = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} ds,$$

onde \mathbf{z} é o vector normal unitário ao plano xy , isto é, $\mathbf{z} = (0, 0, 1)$.

SEM DEMONSTRAÇÃO: : É uma consequência imediata do Teorema de Green no plano dado acima.

Como vimos, aquando do estudo dos integrais de linha, os integrais dos segundos membros das equações integrais da proposição anterior, são integrais de linha relativamente ao comprimento de arco, sendo ds o denominado elemento de arco. Designa-se por **divergência** de um campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$, ao campo escalar definido por:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}.$$

Observe-se que qualquer vector, definido num espaço vectorial qualquer, se pode decompor em duas componentes - uma normal e outra tangente. Em Análise Matemática, normal tem o significado de perpendicular. Assim, para um campo vectorial qualquer \mathbf{F} , tem-se:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_n \mathbf{n} + \mathbf{F}_t \mathbf{t}, \quad \text{onde } \mathbf{F}_n = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{F}_t = \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} \quad \text{e} \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{t} = 0.$$

O vector unitário tangente à curva \mathcal{C} é dado por

$$\mathbf{t} = \frac{1}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \mathbf{r}'(t) = \frac{1}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} (x'(t), y'(t)).$$

Por consequência, o vector unitário normal à mesma curva pode ser dado por

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} (y'(t), -x'(t)).$$

Deste modo, o Teorema da Divergência escrito acima resume-se a

$$\int \int_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\mathcal{C}} (F_1 dy - F_2 dx),$$

onde usamos a igualdade formal $\mathbf{n} ds = (dy, -dx)$. Esta igualdade corresponde à Fórmula de Riemann com $f = -F_2$ e $g = F_1$. Por outro lado, sabemos que $\mathbf{rot} \mathbf{F}$ denota o rotacional do campo vectorial $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ e, neste caso, reduz-se a

$$\mathbf{rot} \mathbf{F} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}.$$

Do mesmo modo, o Teorema de Stokes escrito acima resume-se a

$$\int \int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\mathcal{C}} (F_1 dx + F_2 dy),$$

onde usamos, agora, a igualdade formal $\mathbf{t} ds = (dx, dy)$ e, na verdade, fizemos $\mathbf{F} = (F_1, F_2, 0)$ e

$$\mathbf{rot} \mathbf{F} = \left(0, 0, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right).$$

Verificamos pois que o que obtemos, é a Fórmula de Riemann com $f = F_1$ e $g = F_2$.

A principal aplicação prática do Teorema de Green, é a possibilidade de podermos calcular a área de determinado domínio plano, interior a um caminho, através do conhecimento apenas do integral de linha.

Proposição 6.5.3. *Sejam C e D , respectivamente, um caminho e um domínio nas condições da Proposição 6.5.1. Então:*

$$\text{Área}(D) = \frac{1}{2} \int_C x dy - y dx.$$

Demonstração.

Exemplo 6.5.2. *Usando o Teorema de Green no plano, calcule a área do círculo $x^2 + y^2 \leq 1$. Se, na proposição anterior, fizermos uma mudança de variáveis para coordenadas polares, $x = r \cos(\theta)$ e $y = r \sin(\theta)$, obtemos a fórmula seguinte:*

$$\text{Área}(D) = \frac{1}{2} \int_C r^2 d\theta.$$

Esta fórmula é útil para o cálculo da área interior a uma curva escrita em coordenadas polares.

6.6 Aplicações

Nesta secção vamos restringir-nos às aplicações geométricas, alertando apenas o leitor de existirem muitas outras aplicações, como o cálculo do centro de massa de um objecto, bem como o cálculo dos seus momentos de inércia.

Definição 6.6.1. *Seja D um domínio limitado de \mathbb{R}^2 . A **área do domínio** D é determinada através do integral duplo, calculado sobre o domínio D , da função identicamente igual a 1. Ou seja,*

$$\text{Área}(D) = \int \int_D dx dy.$$

Exemplo 6.6.1. *Usando integrais duplos, calcule a área do domínio D seguinte:*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, \quad x \leq y \leq -x^2 + x + 1\}.$$

No caso do domínio D ser a reunião de dois domínios, digamos D_1 e D_2 , então:

$$\text{Área}(D) = \int \int_{D_1} dx dy + \int \int_{D_2} dx dy.$$

Por outro lado, se o domínio D resultar da diferença de dois domínios, digamos $D = D_1 \setminus D_2$, temos:

$$\text{Área}(D) = \int \int_{D_1} dx dy - \int \int_{D_2} dx dy.$$

Exemplo 6.6.2. *Usando integrais duplos, calcule a área do domínio*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

A proposição seguinte mostra que área de um domínio plano pode, também, ser calculado usando o Teorema de Gauss-Green, reduzindo o cálculo a um integral de linha.

Proposição 6.6.1. *Seja D um domínio conexo de \mathbb{R}^2 limitado por uma curva simples \mathcal{C} . Então*

$$\text{Área}(D) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{C}} xdy - ydx. \quad (6.6.7)$$

Demonstração. De facto, se $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ é a normal unitária exterior à curva \mathcal{C} , tem-se, tomando $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$ e $\frac{\partial u}{\partial y} = 1$ em (6.4.2),

$$\text{Área}(D) = \int \int_D dx dy = \int_{\mathcal{C}} x n_x ds = \int_{\mathcal{C}} y n_y ds.$$

Pelo que, podemos escrever

$$\text{Área}(D) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{C}} (x n_x + y n_y) ds.$$

Em particular, se usarmos a notação (??) para a normal unitária, podemos escrever a equação anterior na forma (6.6.7). \square

Exemplo 6.6.3. *Usando o integral de linha, calcule a área do domínio*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Já para o cálculo do comprimento de uma curva, podemos usar o integral de linha.

Definição 6.6.2. *Seja \mathcal{C} um caminho parametrizado por $\mathbf{r}(t)$, onde $t \in [a, b]$. Definimos o **comprimento do caminho \mathcal{C}** por*

$$s = \int_{\mathcal{C}} ds = \int_a^b \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\| dt.$$

Por abuso de linguagem, poderemos falar em **comprimento da curva \mathcal{C}** em vez de comprimento do caminho \mathcal{C} . Tal como vimos acima, também aqui, a expressão para o comprimento da curva \mathcal{C} pode ser escrita na forma mais simples

$$s = \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt.$$

Exemplo 6.6.4. *Calcule o comprimento da circunferência*

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9.$$

Resolução: *Uma parametrização possível é $x(t) = 3 \cos(t) - 2$ e $y(t) = 3 \sin(t) + 1$, com $t \in [0, \pi]$. O comprimento desta circunferência é, então, dado por:*

$$\int_{\mathcal{C}} ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-3 \sin(t))^2 + (3 \cos(t))^2} dt = 6\pi.$$

Na proposição seguinte relacionamos o cálculo da área de um círculo, assim como o comprimento de uma circunferência, com o cálculo da função Gama.

Proposição 6.6.2. *Consideremos um círculo D de centro (a, b) e raio $R > 0$, e denotemos por \mathcal{C} a circunferência que limita D . Então a área do círculo D e o perímetro da circunferência \mathcal{C} podem ser calculados à custa da função Gama da forma seguinte:*

$$\text{Área}(D) = R^2 \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2)} = \pi R^2, \quad \text{Perímetro}(\mathcal{C}) = 2R \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2)} = 2\pi R.$$

Demonstração. De acordo com o exposto acima, designando por D o círculo $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$, temos

$$\text{Área}(D) = \int \int_D dx dy = 2 \int_{a-R}^{a+R} \sqrt{R^2 - (x-a)^2} dx$$

Fazendo a substituição

$$\frac{x-a}{R} = t \Leftrightarrow x = Rt + a \Rightarrow dx = R dt,$$

obtemos

$$\text{Área}(D) = 2R^2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt = 4R^2 \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt.$$

Fazendo, agora, a substituição

$$t^2 = s \Rightarrow t = \sqrt{s} \Rightarrow dt = \frac{1}{2} s^{-\frac{1}{2}} ds,$$

vem, usando o conhecimento das funções Gama e Beta,

$$\begin{aligned} \text{Área}(D) &= 2R^2 \int_0^1 s^{-\frac{1}{2}} (1-s)^{\frac{1}{2}} ds = 2R^2 B\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = 2R^2 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right)} \\ &= R^2 \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2)} = \pi R^2. \end{aligned}$$

Para a fórmula do perímetro, começamos por observar que, por transformação para coordenadas polares, se tem:

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases} \Rightarrow \text{Área}(D) = \int \int_D dx dy = \int_0^R \int_0^{2\pi} r d\theta dr.$$

Usando a fórmula da área estabelecida na primeira parte desta prova, obtemos, derivando em ordem a R ,

$$R^2 \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2)} = \int_0^R \int_0^{2\pi} r d\theta dr \Rightarrow 2R \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2)} = \int_0^{2\pi} R d\theta.$$

Por outro lado, parametrizando a circunferência \mathcal{C} , temos

$$\begin{cases} x(t) = R \cos(t), & t \in [0, 2\pi] \\ y(t) = R \sin(t) \end{cases} \Rightarrow \text{Perímetro}(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} ds = \int_0^{2\pi} R dt.$$

Igualando as duas expressões obtidas, concluímos que

$$\text{Perímetro}(\mathcal{C}) = 2R \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2)} = 2\pi R,$$

o que termina a demonstração. \square

A proposição anterior, permite-nos concluir que, no caso do círculo de raio $R > 0$, se tem:

$$\frac{d}{dR} \int \int_D dx dy = \int_C ds.$$

Um outro exemplo de aplicação geométrica de integrais duplos, é o cálculo de volumes de sólidos limitados por superfícies $z = f(x, y)$, onde f é uma função definida num domínio limitado $D \subset \mathbb{R}^2$. Por simplicidade de exposição, admitamos que f é uma função não negativa em D .

O **volume do corpo**

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, \quad 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

é determinado pelo integral duplo de f , calculado sobre o domínio D , isto é,

$$\text{Volume}(\Omega) = \int \int_D f(x, y) dx dy.$$

No caso do corpo ser dado por

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, \quad g(x, y) \leq z \leq f(x, y)\},$$

então:

$$\text{Volume}(\Omega) = \int \int_D [f(x, y) - g(x, y)] dx dy.$$

Exemplo 6.6.5. Usando integrais duplos, calcule o volume do corpo seguinte:

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \quad z \geq 0\}.$$

6.7 Exercícios

1. Descreva as regiões de integração e calcule os integrais respectivos:

(a) $\int_0^2 \int_0^4 (x^2 + y^2) dx dy;$

(d) $\int_{-1}^1 \int_0^{|x|} dy dx;$

(b) $\int_1^2 \int_{x^2}^{x^3} x dy dx;$

(e) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} dy dx;$

(c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-y}^y \text{sen}(x) dx dy;$

(f) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{3 \cos(\phi)} r^2 \text{sen}^2(\phi) dr d\phi.$

2. Calcule os integrais das funções seguintes sobre as regiões indicadas:

(a) $f(x, y) = x \cos(x+y)$ sobre o triângulo de vértices $A = (0, 0)$, $B = (\pi, 0)$ e $C = (\pi, \pi)$;

(b) $f(x, y) = x$ sobre a região limitada por $y = x^2$ e $y = x^3$;

- (c) $f(x, y) = x - y$ sobre a região limitada por $y = \sin x$ e pelo eixo dos xx entre os pontos $x = 0$ e $x = \pi$;
- (d) $f(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ sobre a região limitada pela parábola $y = \frac{x^2}{2}$ e pela recta $y = x$;
- (e) $f(x, y) = \sqrt{xy - y^2}$ sobre a região limitada pelo triângulo de vértices $A = (0, 0)$, $B = (10, 1)$ e $C = (1, 1)$ (integrando primeiro em ordem a x);
- (f) $f(x, y) = e^{\frac{x}{y}}$ sobre a região limitada pela parábola $x = y^2$ e pelas rectas $x = 0$ e $y = 1$ (integrando primeiro em ordem a x).

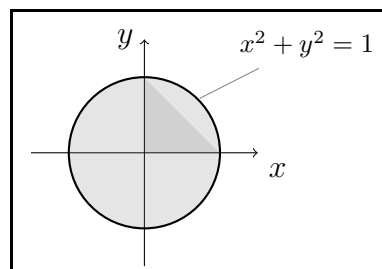
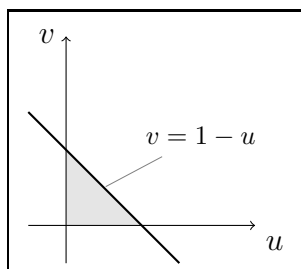
3. Inverta a ordem de integração dos integrais duplos seguintes:

- (a) $\int_0^1 \int_y^1 f(x, y) dx dy$; (c) $\int_{-4}^3 \int_{x^2-9}^{-x+3} f(x, y) dy dx$;
- (b) $\int_0^2 \int_{x^2}^{9-x} f(x, y) dy dx$; (d) $\int_{-6}^2 \int_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x, y) dx dy$.

4. Verifique que os integrais duplos seguintes não têm primitivas imediatas, se resolvidos pela ordem de integração apresentada. Inverta a ordem de integração e calcule os integrais:

- (a) $\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 e^{1+x^3} dx dy$; (c) $\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 \sqrt{x^4 + 1} dx dy$;
- (b) $\int_0^1 \int_x^1 \sqrt{y^2 + 1} dy dx$; (d) $\int_0^1 \int_0^{10y} \sqrt{yx - x^2} dx dy$.

5. Indique qual a aplicação que permite transformar o triângulo seguinte no círculo abaixo representados:



6. Determine e represente num sistema de eixos cartesianos as novos domínios que se obtêm por aplicação das transformações de variáveis nas regiões indicadas. Calcule os jacobianos de cada transformação:

- (a) D é limitada pela elipse $x^2 + \frac{y^2}{36} = 1$ e a transformação é: $x = \frac{u}{2}$ e $y = 3v$;
- (b) D é a região limitada pelas rectas $y = -x + 4$, $y = x + 1$ e $y = \frac{x-4}{3}$, e a transformação é: $x = \frac{1}{2}(u+v)$ e $y = \frac{1}{2}(u-v)$.

- (c) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq x\}$ e a transformação por coordenadas polares;
 (d) D é a região limitada pelo quadrilátero de vértices $(0, 0)$, $(5, 0)$, $(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$ e $(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2})$, e a transformação é: $x = 2u + 3v$ e $y = 2u - 3v$.

7. Calcule os integrais seguintes usando as mudanças de variáveis indicadas:

- (a) $\int_1^2 \int_{x+2}^{x+3} \frac{dydx}{\sqrt{xy - x^2}}$, $x = u$, $y = u + v$;
 (b) $\int \int_D (x + y) dx dy$, $x = u - v$, $y = u + v$, onde D é a região limitada pelas rectas $y = x$, $y = 3x$, $x + y = 4$;
 (c) $\int \int_D (x^2 + y^2) dx dy$, $u = x + y$, $v = x - y$, onde D é a região limitada pelas rectas $y = x$, $y = -x$, $y = x - 2$ e $y = 2 - x$;
 (d) $\int \int_D e^{\frac{y-x}{y+x}} dx dy$, $u = y - x$, $v = y + x$, onde D é a região limitada pela recta $x + y = 2$ e pelos dois eixos de coordenadas.

8. Calcule os integrais seguintes usando a mudança de variáveis para coordenadas polares:

- (a) $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (4 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} dx dy$;
 (b) $\int_0^{\frac{3}{2}} \int_{\sqrt{3}x}^{\sqrt{9-x^2}} e^{-(x^2+y^2)} dy dx$;
 (c) $\int \int_D (x^2 + y^2) e^{(x^2+y^2)^2} dx dy$, onde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$;
 (d) $\int \int_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, onde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.

9. Usando integrais duplos, calcule a área dos domínios planos seguintes:

- (a) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi/4, \text{sen}x \leq y \leq \cos x\}$;
 (b) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 2, -|x| \leq y \leq |x|\}$;
 (c) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x^2 - y^2 \geq 0\}$;
 (d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge y \geq 1\}$;
 (e) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + y^2 \leq 1 \wedge x^2 + (y - 1)^2 \leq 1\}$.

10. Esboce, num sistema de eixos cartesianos, os corpos cujos volumes podem ser calculados através dos integrais duplos seguintes:

- (a) $\int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y) dy dx$;
 (b) $\int_0^2 \int_{2-x}^2 (4 - x - y) dy dx$;
 (c) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x) dy dx$;
 (d) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1 - x^2 - y^2} dy dx$.

11. Usando integrais duplos, calcule o volume dos domínios espaciais seguintes:

- (a) D é o domínio do primeiro octante limitado por $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x + z = 6$ e $z = 0$;
- (b) D é o domínio do primeiro octante limitado pelas superfícies $y = 1 - x^2$ e $z = 1 - x^2$;
- (c) D é o domínio do primeiro octante interior ao cilindro $x^2 + z^2 = 4$ e limitado pelo plano $x = y$;
- (d) D é limitado pelo elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, onde a , b e c são números reais não nulos.

12. Usando o Teorema de Green, calcule os integrais de linha $\int_C \mathbf{F}$ nas situações seguintes:

- a) $\mathbf{F}(x, y) = (x^2e^y, y^2e^x)$ e C é o retângulo de vértices $A = (0, 0)$, $B = (2, 0)$, $C = (2, 3)$ e $D = (0, 3)$.
- b) $\mathbf{F}(x, y) = (e^y/x, e^y \ln x + 2x)$ e C é a curva dada por $1 + x^2 \leq y \leq 2$.

13. Usando o Teorema de Green, calcule os integrais de linha seguintes:

$$\text{a) } \int_{C_1} (2x - y^2) dx + (xy - 1) dy, \quad \text{b) } \int_{C_2} (x^4 - y^3) dx + (x^3 + y^5) dy,$$

onde C_1 é o triângulo de vértices $A = (0, 0)$, $B = (2, 0)$ e $C = (0, 1)$, e C_2 é a circunferência $x^2 + y^2 = 1$.

14. Usando o Teorema de Green no plano, calcule as áreas interiores às curvas fechadas parametrizadas por:

$$\text{a) } \mathbf{r}(t) = \left(\frac{\sin t}{3}, \frac{\cos t}{2} \right), \quad t \in [0, 2\pi]; \quad \text{b) } \mathbf{r}(t) = \begin{cases} (-t, 1 - t^2) & -1 \leq t < 1 \\ (t - 2, 0) & 1 \leq t \leq 3. \end{cases}$$

15. Usando o Teorema de Green, calcule as áreas das figuras geométricas limitadas pelas curvas seguintes:

- a) elipse $x^2 + 4y^2 = 4$;
- b) asteróide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$.

Capítulo 7

Integrais de Superfície

Nesta secção, pretende-se introduzir a noção de integral de superfície que será fundamental para a integração por partes em integrais triplos.

7.1 Superfícies

Por superfície entende-se, de um dodo geral, como sendo o gráfico de uma função real de duas variáveis reais e que é contínua em ambas as variáveis. Este modo de definir uma superfície corresponde à denominada representação cartesiana da superfície. E, desta forma, dizemos habitualmente que uma superfície está representada, de forma implícita, pela equação cartesiana

$$F(x, y, z) = 0.$$

No entanto, para definirmos o integral de superfície, esta noção de superfície não é satisfatória na grande maioria das situações. Tal como para as linhas que definimos aquando da secção sobre o integral de linha, vai ser necessário definir o que se entende por representação paramétrica de uma superfície.

Definição 7.1.1. *Seja D um subconjunto conexo de \mathbb{R}^2 . Chama-se superfície ao conjunto de pontos de \mathbb{R}^3 cujas coordenadas cartesianas são dadas por:*

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases},$$

onde x , y e z são funções contínuas das variáveis $(u, v) \in D$.

As superfícies são habitualmente denotadas pela letra S e podem ser escritas na forma vectorial seguinte:

$$\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v));$$

onde \mathbf{r} é uma aplicação vectorial definida de $D \subset \mathbb{R}^2$ em \mathbb{R}^3 .

Exemplo 7.1.1. *Um cilindro de raio 2 definido pela equação cartesiana $x^2 + y^2 = 4$ e com $-3 \leq z \leq 4$ é representado parametricamente por:*

$$\begin{cases} x = 2 \cos(u) \\ y = 2 \operatorname{sen}(u) \\ z = v \end{cases}, \quad \text{onde } (u, v) \in [0, 2\pi] \times [-3, 4].$$

Exemplo 7.1.2. A superfície de uma esfera de raio 3 definida pela equação cartesiana $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ é representada parametricamente por:

$$\begin{cases} x = 3 \cos(v) \cos(u) \\ y = 3 \cos(v) \sin(u) \\ z = 3 \sin(v) \end{cases}, \quad \text{onde} \quad (u, v) \in [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

7.2 Plano tangente e normal a uma superfície

Nesta parte, convém, agora, introduzir as noções de plano tangente e recta normal a uma superfície. Começemos por recordar as noções de plano tangente e normal a uma superfície S que é representada, de forma implícita, pela equação cartesiana:

$$F(x, y, z) = 0, \quad \text{onde} \quad F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) \longmapsto F(x, y, z).$$

Sendo $P = (a, b, c)$ um ponto regular pertencente à superfície S , sabemos que:

- (i) o vector $\nabla F(P)$ é perpendicular ao plano tangente à superfície S no ponto P .
- (ii) a **equação cartesiana do plano tangente à superfície S** no ponto P é dada por

$$\frac{\partial F}{\partial x}(P)(x - a) + \frac{\partial F}{\partial y}(P)(y - b) + \frac{\partial F}{\partial z}(P)(z - c) = 0.$$

Observemos que o ponto P é o denominado ponto de contacto da superfície com o plano tangente. O **ponto P** diz-se **regular**, se existem as derivadas parciais F_x , F_y e F_z , e são contínuas em P , e se, além do mais, pelo menos, uma das derivadas parciais, $F_x(P)$, $F_y(P)$ ou $F_z(P)$ é não nula. Se todas as derivadas parciais $F_x(P)$, $F_y(P)$ e $F_z(P)$ forem nulas, ou não existir, no ponto P , pelo menos, uma das derivadas parciais, dizemos que $P = (a, b, c)$ é um **ponto singular** da superfície S . O **vector normal** à superfície S no ponto $P = (a, b, c)$ é dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \frac{1}{\|\nabla F(P)\|} \nabla F(P) \\ &= \frac{1}{\left\| \left(\frac{\partial F}{\partial x}(P), \frac{\partial F}{\partial y}(P), \frac{\partial F}{\partial z}(P) \right) \right\|} \left(\frac{\partial F}{\partial x}(P), \frac{\partial F}{\partial y}(P), \frac{\partial F}{\partial z}(P) \right). \end{aligned} \quad (7.2.1)$$

A ideia agora, é a de definir, de forma equivalente, o plano tangente e a normal à superfície S no ponto de contacto $P = (a, b, c)$, mas usando a representação paramétrica da superfície.

Proposição 7.2.1. *Seja S uma superfície parametrizada por:*

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases},$$

tal, que em cada ponto $P = (a, b, c)$ de S , os vectores derivadas parciais

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) \quad e \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right)$$

são contínuos e são linearmente independentes. Então, em cada ponto de S , tem-se:

(i) existe uma única normal cuja direcção depende de forma contínua dos pontos de S e que é dada por:

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\|} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}, \quad (7.2.2)$$

onde

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} := \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} = J_{yz}\mathbf{e}_1 - J_{xz}\mathbf{e}_2 + J_{xy}\mathbf{e}_3, \quad (7.2.3)$$

$$J_{yz} := \det \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}, \quad J_{xz} := \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}, \quad J_{xy} := \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}. \quad (7.2.4)$$

(ii) existe um único plano tangente à superfície S no ponto $P = (a, b, c)$ que é gerado pelos vectores $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ e $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ e cuja equação é dada por:

$$(x - a, y - b, z - c) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0) \right) = 0; \quad (7.2.5)$$

onde (u_0, v_0) é um ponto em D tal que $\mathbf{r}(u_0, v_0) = (a, b, c) \equiv P$.

Demonstração. Sabemos que $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ e $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ definem duas rectas tangentes, no ponto $P = (a, b, c)$, à superfície considerada, uma com direcção do eixo dos xx e a outra com a direcção do eixo dos yy . Por outro lado, sabemos da Álgebra Linear que os vectores $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ e $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ são linearmente independentes se e só se

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \neq \mathbf{0}.$$

Deste modo, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ é perpendicular ao plano gerado pelas rectas $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ e $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$. Como consequência a relação (7.2.5) define o plano tangente à superfície considerada no ponto $P = (a, b, c)$. \square

Exemplo 7.2.1. Usando a proposição anterior, determine a normal e a equação do plano tangente à superfície S , definida por $y^2 + z^2 = 4$, no ponto $P = (3, -\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

7.3 Noção de integral de superfície relativamente à área

Neste momento, estamos em condições de poder definir o integral de superfície. No que se segue, diremos que S é uma superfície de classe C^1 se for parametrizada por uma função vectorial $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ se os vectores derivadas parciais $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ e $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ existirem e forem contínuos no subdomínio de \mathbb{R}^2 onde se define a parametrização.

Definição 7.3.1. Sejam f um campo escalar definido e contínuo num subconjunto Ω de \mathbb{R}^3 , S , de classe C^1 , uma superfície parametrizada por $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, com $(u, v) \in$

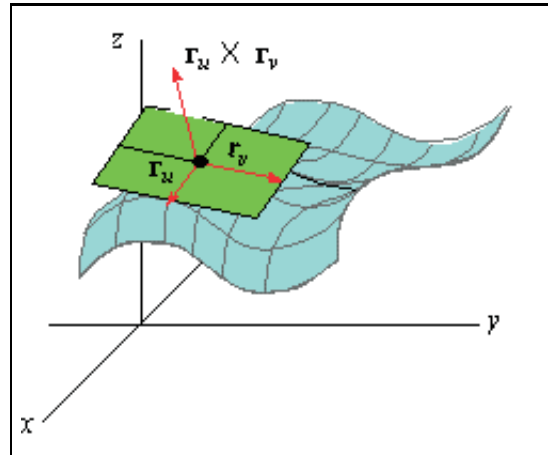


Figura 7.1: Plano tangente e recta normal.

D e tal que $\mathbf{r}(D) \subseteq \Omega$. Define-se o **integral de superfície do campo escalar** f sobre a superfície S , relativamente à área S , por:

$$\int \int_S f(x, y, z) dS = \int \int_D f(\mathbf{r}(u, v)) \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| du dv,$$

sendo

$$dS := \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| du dv$$

o designado elemento de área.

Usando as expressões (7.2.3)-(7.2.4) para o cálculo da norma do elemento de área, podemos escrever o integral de superfície na forma seguinte

$$\int \int_S f(x, y, z) dS = \int \int_D f(\mathbf{r}(u, v)) \sqrt{J_{yz}^2 + J_{xz}^2 + J_{xy}^2} du dv.$$

Observe-se que esta noção de integral de superfície é a versão análoga para superfícies do integral de linha relativamente ao comprimento de arco. Por outro lado, note-se que $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ dá-nos a recta normal à superfície S .

Exemplo 7.3.1. Sendo $f(x, y, z) = x + y + z$, calcule o integral, relativamente à área, sobre a superfície definida pelo rectângulo $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ e $z = \frac{1}{2}$.

A proposição seguinte permite-nos calcular o integral de superfície de uma função escalar no caso da superfície puder ser escrita, de modo explícito, na forma cartesiana.

Proposição 7.3.1. Sejam f um campo escalar definido e contínuo num subconjunto Ω de \mathbb{R}^3 , S uma superfície definida pela equação cartesiana $z = \varphi(x, y)$, com $(x, y) \in D$ e φ é uma função de classe C^1 em D . Então, o integral de f , relativamente à área, sobre a superfície S é dado por:

$$\int \int_S f(x, y, z) dS = \int \int_D f(x, y, \varphi(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2} dx dy. \quad (7.3.6)$$

Demonstração. Para a parametrização $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, \varphi(x, y))$, temos

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & 0 & \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{bmatrix} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{e}_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{e}_2.$$

Pelo que a fórmula do integral de superfície sai imediatamente. \square

No caso da superfície S ser definida por $y = \varphi(x, z)$ ou $x = \varphi(y, z)$, tem-se, respectivamente,

$$\int \int_S f(x, y, z) dS = \int \int_D f(x, \varphi(x, z), z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2} dx dz \quad (7.3.7)$$

ou

$$\int \int_S f(x, y, z) dS = \int \int_D f(\varphi(y, z), y, z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2} dy dz. \quad (7.3.8)$$

Exemplo 7.3.2. Usando a proposição anterior, calcule o integral de $f(x, y, z) = x + y + z$ sobre a superfície do cubo $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ e $0 \leq z \leq 1$.

7.4 Outras noções de integral de superfície

Usando a noção de integral de superfície, relativamente à área S de uma função escalar, podemos definir o que se entende por integral de superfície, relativamente à área S de uma função vectorial.

Definição 7.4.1. Sejam \mathbf{F} um campo vectorial definido e contínuo num subconjunto Ω de \mathbb{R}^3 , S uma superfície, de classe C^1 , parametrizada por $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, com $(u, v) \in D$ e tal que $\mathbf{r}(D) \subseteq \Omega$. Define-se o **integral de superfície do campo vectorial \mathbf{F}** sobre a superfície S , relativamente à área S , por:

$$\int \int_S \mathbf{F} \equiv \int \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int \int_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{n}(u, v) \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| du dv.$$

A definição anterior é um caso particular da Definição 7.5.1, onde se considera

$$f(\mathbf{r}(u, v)) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{n}(u, v).$$

Por outro lado, observemos que, em cada ponto de uma superfície S , supostamente de classe C^1 , existem duas normais unitárias com sentidos opostos. Portanto, em determinadas situações, convém ter presente em que face estamos a considerar o integral de superfície. Tendo em conta isto e usando a definição de normal apresentada em (7.2.2), podemos escrever a identidade integral da Definição 7.4.1 na forma seguinte:

$$\int \int_S \mathbf{F} \equiv \int \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \pm \int \int_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) du dv;$$

sendo o sinal desta identidade integral escolhido de acordo com a face da superfície que se considera.

Exemplo 7.4.1. Calcule o integral do campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, -x, z^2)$ sobre o parabolóide $z = x^2 + y^2$, com $0 \leq z \leq 1$.

Tal como para o integral de linha, no caso particular da função vectorial \mathbf{F} ter apenas uma componente não nula, obtemos uma nova noção de integral de superfície. Designaremos este novo integral por integral de superfície relativamente a duas das três variáveis x , y e z .

Definição 7.4.2. Sejam f um campo escalar definido e contínuo num subconjunto Ω de \mathbb{R}^3 , S uma superfície de classe C^1 parametrizada por $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, com $(u, v) \in D$ e tal que $\mathbf{r}(D) \subseteq \Omega$. Define-se o **integral de superfície do campo escalar f relativamente às variáveis (x, y) , (x, z) e (y, z)** , respectivamente, por:

$$\begin{aligned} \int \int_S f \, dx \, dy &= \int \int_D f(\mathbf{r}(u, v)) J_{xy} \, du \, dv; \\ \int \int_S f \, dx \, dz &= \int \int_D f(\mathbf{r}(u, v)) J_{xz} \, du \, dv; \\ \int \int_S f \, dy \, dz &= \int \int_D f(\mathbf{r}(u, v)) J_{yz} \, du \, dv. \end{aligned} \quad (7.4.9)$$

Como referimos acima, estas noções de integral de superfície correspondem a considerar na Definição 7.4.1 $\mathbf{F} = (f, 0, 0)$, $\mathbf{F} = (0, f, 0)$ e $\mathbf{F} = (0, 0, f)$, respectivamente. Observe-se que, tal como no integral duplo, $dx \, dy$, $dx \, dz$ e $dy \, dz$ não indicam nenhuma ordem de integração. Resulta das propriedades dos determinantes que, para os integrais de superfície da Definição 7.4.2, se tenha:

$$\begin{aligned} \int \int_S f \, dx \, dy &= - \int \int_S f \, dy \, dx; \\ \int \int_S f \, dx \, dz &= - \int \int_S f \, dz \, dx; \\ \int \int_S f \, dy \, dz &= - \int \int_S f \, dz \, dy. \end{aligned}$$

Tendo em conta que estamos perante integrais de superfície, podemos escrever estas igualdades na forma abreviada seguinte:

$$dx \, dy = -dy \, dx; \quad dx \, dz = -dz \, dx; \quad dy \, dz = -dz \, dy.$$

Exemplo 7.4.2. Calcule os integrais seguintes sobre a superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ correspondente ao hemisfério superior:

$$\text{a) } \int \int_S z \, dx \, dy; \quad \text{b) } \int \int_S y \, dx \, dz; \quad \text{c) } \int \int_S x \, dy \, dz.$$

Usando estas noções de integral de superfície relativamente a duas das três variáveis x , y e z , podemos então reescrever a igualdade integral da Definição 7.4.1.

Proposição 7.4.1. Nas condições da Definição 7.4.1, escrevendo o campo vectorial na forma $\mathbf{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$, temos:

$$\int \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int \int_S F_1 \, dy \, dz + F_2 \, dz \, dx + F_3 \, dx \, dy.$$

Demonstração. A demonstração é uma consequência imediata da conjugação das Definições 7.3.1 e 7.4.1. \square

Exemplo 7.4.3. Calcule o integral seguinte sobre a superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ correspondente ao hemisfério superior:

$$\int \int_S x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy.$$

No caso da superfície S puder ser escrita na forma cartesiana através da equação

$$F(x, y, z) = 0,$$

a proposição seguinte permite-nos escrever a identidade integral da Definição 7.4.1 numa forma que faz intervir a função escalar F que define a superfície.

Proposição 7.4.2. Nas condições da Definição 7.4.1, supondo que a superfície S é definida pela equação cartesiana $F(x, y, z) = 0$, temos:

$$\int \int_S \mathbf{F} \equiv \int \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int \int_S (F_1 \cos(\alpha) + F_2 \cos(\beta) + F_3 \cos(\gamma)) \, dS;$$

onde

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{D} \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \cos(\beta) = \frac{1}{D} \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \cos(\gamma) = \frac{1}{D} \frac{\partial F}{\partial z}$$

e

$$D = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}.$$

Demonstração. A demonstração resulta da conjugação da definição de normal a uma superfície escrita na forma cartesiana, que foi apresentada em (7.2.1), com a Definição 7.4.1. \square

Os cosenos $\cos(\alpha)$, $\cos(\beta)$ e $\cos(\gamma)$, são **designados coseno directores da normal \mathbf{n}** , isto é,

$$\mathbf{n} = (\cos(\alpha), \cos(\beta), \cos(\gamma)).$$

A escolha do sinal de D deve ser feita de acordo com a face da superfície que se considera.

Exemplo 7.4.4. Usando a proposição anterior, calcule o integral de $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ sobre a face exterior da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ correspondente ao hemisfério superior.

Pelas Proposições 7.4.1 e 7.4.2, e sempre que faça sentido, podemos escrever a igualdade integral seguinte:

$$\int \int_S (F_1 \cos(\alpha) + F_2 \cos(\beta) + F_3 \cos(\gamma)) \, dS = \int \int_S F_1 \, dy \, dz + F_2 \, dz \, dx + F_3 \, dx \, dy. \quad (7.4.10)$$

7.5 Aplicações

A principal aplicação dos integrais de superfície é de cariz geométrico e corresponde ao cálculo da área de uma superfície.

Definição 7.5.1. *Seja S uma superfície de classe C^1 parametrizada por $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, com $(u, v) \in \mathbb{D}$ e tal que $\mathbf{r}(\mathbb{D}) \subseteq \Omega$. Define-se a **área da superfície** de S por:*

$$A(S) = \int \int_S dS \equiv \int \int_{\mathbb{D}} \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| du dv.$$

Exemplo 7.5.1. *Calcule a área da superfície lateral do cilindro $x^2 + y^2 = 4$, com $0 \leq z \leq 10$.*

No caso da superfície puder ser escrita, de modo explícito, na forma cartesiana $z = \varphi(x, y)$, com $(x, y) \in \mathbb{D}$ e φ uma função de classe C^1 em \mathbb{D} , então, de acordo com a Proposição 7.3.1, a área da superfície S pode ser calculada da forma seguinte:

$$A(S) = \int \int_{\mathbb{D}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

De modo análogo, se a superfície S puder ser escrita na forma $y = \varphi(x, z)$ ou $x = \varphi(y, z)$, tem-se, respectivamente,

$$A(S) = \int \int_{\mathbb{D}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2} dx dz, \quad A(S) = \int \int_{\mathbb{D}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2} dy dz.$$

Exemplo 7.5.2. *Usando a equação cartesiana da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, calcule a sua área de superfície.*

Os integrais de superfície têm também muita aplicação em Mecânica dos Fluidos. Nesta área da Mecânica é importante determinar a quantidade de massa de fluido que passa através de uma superfície S por unidade de tempo. Esta quantidade é designada em Mecânica dos Fluidos por fluxo ou vazão de um fluido.

Definição 7.5.2. *Seja \mathbf{v} o campo de velocidades (vector) associado a um fluido. O fluxo, ou vazão, do fluido que atravessa uma superfície S é dado por:*

$$F(S) = \int \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \equiv \int \int_{\mathbb{D}} \mathbf{v}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{n}(u, v) \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| du dv.$$

Exemplo 7.5.3. *Determine o fluxo de água que atravessa o cilindro parabólico $y = x^2$, com $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq z \leq 3$, sabendo que o seu campo de velocidades é dado por $\mathbf{v} = (3z^2, 6, 6xz)$ $m s^{-1}$.*

7.6 Exercícios

1. Determine uma equação cartesiana que represente as superfícies definidas parametricamente por

$$\text{a) } \begin{cases} x = 1 \\ y = u \\ z = v \end{cases}, \quad 0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 1; \quad \text{b) } \begin{cases} x = u \\ y = \sqrt{1 - u^2 - v^2} \\ z = v \end{cases}, \quad u^2 + v^2 \leq 1.$$

2. Determine uma representação paramétrica para as superfícies definidas pelas equações cartesianas seguintes:

- a) $x^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 4$ (esfera);
 b) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, com $0 \leq z \leq 3$ (cone);
 c) $9x^2 + 4y^2 = 36$ (cilindro elíptico).

3. Usando as representações paramétricas das superfícies em causa, determine as normais e as equações dos planos tangentes às superfícies seguintes nos pontos P indicados:

- a) $2x + 3y - 5z = 7$, $P = (3, 2, 1)$;
 b) $x^2 + y^2 = 4$, $P = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)$;
 c) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $P = (3, 4, 0)$.

4. Sendo $f(x, y, z) = x + y + z$, calcule o integral de f , relativamente à área, sobre a superfície do cubo $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ e $0 \leq z \leq 1$.

5. Calcule o integral de superfície, relativamente à área, seguinte:

$$\iint_S (x^2 + y^2) dS, \quad S : x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

6. Usando as equações cartesianas das superfícies indicadas, calcule os integrais de superfície seguintes:

$$\text{a) } \iint_S (x + y + z) dS, \quad S : 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad z = \frac{1}{2};$$

$$\text{b) } \iint_S (x^2 + y^2) dS, \quad S : x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

7. Calcule os integrais dos campos vectoriais seguintes sobre as superfícies indicadas:

a) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, 0, 3y^2)$, S é a porção do plano $x + y + z = 1$ que está no primeiro octante.

b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (0, y, -z)$, S é dada pelas superfícies do parabolóide $y = x^2 + z^2$, com $0 \leq y \leq 1$, e do disco $x^2 + z^2 \leq 1$, com $y = 1$. (Resposta: 0)

8. Calcule os integrais seguintes:

$$\text{a) } \iint_S yz dy dz + xz dz dx + xy dx dy, \quad S \text{ é a face externa de } x + y + z = 1 \text{ no } 1^\circ \text{ octante};$$

$$\text{b) } \iint_S xz dy dz + yz dz dx + x^2 dx dy, \quad S \text{ é a parte exterior da esfera } x^2 + y^2 + z^2 = 4.$$

9. Calcule as área das superfícies S seguintes:

- a) S é a superfície face externa do tetraedro $x + y + z = 1$ que está no 1º octante;
- b) S é a parte do parabolóide $z = x^2 + y^2$ interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 4$;
- c) S é a superfície total (incluindo a base) do cone $z^2 = x^2 + y^2$, com $0 \leq z \leq 4$.

10. Esboce as superfícies descritas pelas equações paramétricas (ou equação vectorial) seguintes e calcule as áreas respectivas:

a) $\mathbf{r}(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v)$, com $u \in [0, 2\pi]$ e $v \in [-1, 1]$;

b) $\mathbf{r}(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), u^2)$, com $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 2\pi$, R: $\pi(5\sqrt{5} - 1)/6$;

c) $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$, com $0 \leq u^2 + v^2 \leq 1$, R: $\pi(5\sqrt{5} - 1)/6$.

11. Considere a superfície \mathcal{S} de \mathbb{R}^3 parametrizada por

$$\mathbf{r}(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v), \quad \text{com } u \in [0, 2\pi] \text{ e } v \in (-1, 1).$$

- a) Esboce a superfície \mathcal{S} .
- b) Usando integrais de superfície, calcule a área da superfície \mathcal{S} .
- c) Tomando \mathcal{S} como a parte exterior da superfície dada, calcule o integral de superfície

$$\int \int_{\mathcal{S}} x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy.$$

12. Seja

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{q}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x, y, z)$$

o campo eléctrico criado por uma carga q localizada na origem. Calcule o fluxo de \mathbf{E} através da superfície esférica de raio 2 e centrada na origem, com a normal apontando para fora da esfera. Observe que este fluxo não depende do raio da esfera.

(Resposta: $4\pi q$)

Capítulo 8

Integrais Triplos

Depois de introduzido o integral duplo, torna-se mais fácil estender as noções de integração para funções escalares de três variáveis. Portanto, as regiões de integração são agora subconjuntos de \mathbb{R}^3 . Vamos, primeiro, considerar regiões de integração paralelipédicas e, depois, iremos considerar regiões mais gerais cujas fronteiras são limitadas por superfícies não propriamente planares.

8.1 Integral de Riemann

De igual modo como fizemos para o integral duplo, comecemos por estender a noção de partição para um paralelipédo (limitado) contido em \mathbb{R}^3 .

Definição 8.1.1. *Sejam a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 e c_2 números reais tais que $a_1 < a_2, b_1 < b_2, c_1 < c_2$. Consideremos o paralelipédo*

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a_1 \leq x \leq a_2, \quad b_1 \leq y \leq b_2, \quad c_1 \leq z \leq c_2\}$$

e as partições dos intervalos $[a_1, a_2]$, $[b_1, b_2]$ e $[c_1, c_2]$, definidas, respectivamente, por

$$\mathcal{P}_1 : a_1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = a_2,$$

$$\mathcal{P}_2 : b_1 = y_0 < y_1 < \cdots < y_{m-1} < y_m = b_2$$

$$\mathcal{P}_3 : c_1 = z_0 < z_1 < \cdots < z_{l-1} < z_l = c_2,$$

onde m, n e l são números naturais arbitrários. Designa-se por **partição do paralelipédo** P ao conjunto seguinte

$$\mathcal{P} = \{(x_i, y_j, z_k) \in P : 0 \leq i \leq n, \quad 0 \leq j \leq m, \quad 0 \leq k \leq l\}.$$

Uma partição \mathcal{P} do paralelipédo P , tal como a definida acima, determina mnl paralelipédos contidos em P :

$$P_{ijl} = \{(x_i, y_j, z_k) \in \mathbb{R}^3 : x_{i-1} \leq x \leq x_i, \quad y_{j-1} \leq y \leq y_j, \quad z_{k-1} \leq z \leq z_k, \},$$

cujos volumes são dados por

$$\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1}).$$

Em termos objectivos, a colecção formada por estes paralelepípedos P_{ijl} , é o que verdadeiramente constitui a partição \mathcal{P} .

Definição 8.1.2. *Seja f uma função definida num paralelepípedo $P \subset \mathbb{R}^3$. Designamos por **soma de Riemann** da função f no paralelepípedo P à quantidade seguinte*

$$\begin{aligned} \sum_{i=1, j=1, k=1}^{n, m, l} f(x_{ijl}^*) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_l &\equiv \sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n f(x_{ijl}^*) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_l \\ &\equiv f(x_{111}^*) \Delta x_1 \Delta y_1 \Delta z_1 + \cdots + f(x_{nml}^*) \Delta x_n \Delta y_m \Delta z_l, \end{aligned}$$

onde x_{ijl}^* são pontos seleccionados aleatoriamente nos paralelepípedos respectivos P_{ijl} .

Para a noção de qualquer integral, interessa-nos que as partições sejam muito finas. Definimos a quantidade que define a finura de dada partição \mathcal{P} de um paralelepípedo $P \subset \mathbb{R}^3$ por

$$|\mathcal{P}| = \max_{i, j, k} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_j)^2 + (\Delta z_k)^2}.$$

No caso do integral triplo, $|\mathcal{P}|$ corresponde ao comprimento da maior diagonal de todos os paralelepípedos P_{ijk} considerados na partição \mathcal{P} .

Definição 8.1.3. *Sejam f uma função definida num paralelepípedo $P \subset \mathbb{R}^3$ e*

$$P = \{(x_i, y_j, z_k) \in P : 0 \leq i \leq n, \quad 0 \leq j \leq m, \quad 0 \leq k \leq l\}$$

uma partição arbitrária de P . Diz-se que a **função** f é **integrável** (à Riemann) no paralelepípedo P , se existir (e for finito) o limite seguinte:

$$\lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n f(x_{ij}^*) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k,$$

independentemente de como a partição \mathcal{P} do paralelepípedo P é formada, ou de como os pontos x_{ijl}^* pertencentes aos subparalelepípedos P_{ijl} são escolhidos.

No caso de existir, o limite da definição anterior designa-se por **integral da função** f e denota-se por uma das formas seguintes:

$$\begin{aligned} \int \int \int_P f(x, y, z) dx dy dz, \quad \int \int \int_P f(x, y, z) dx dz dy, \quad \int \int \int_P f(x, y, z) dy dx dz, \\ \int \int \int_P f(x, y, z) dy dz dx, \quad \int \int \int_P f(x, y, z) dz dx dy, \quad \int \int \int_P f(x, y, z) dz dy dx; \end{aligned}$$

onde $dx dy dz$, $dx dz dy$, $dy dx dz$, $dy dz dx$, $dz dx dy$ ou $dz dy dx$ indica um elemento de volume ao qual ainda não está subjacente nenhuma ordem de integração.

Esta noção de função integrável que acabamos de introduzir, estende-se a qualquer função definida num conjunto limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ que não seja propriamente um paralelepípedo. Apenas temos de considerar um paralelepípedo P que contenha Ω e aí fazer a análise anterior. Neste caso, para a definição precedente fazer sentido, fixamos o valor de $f(x_{ijl}^*)$ igual a zero quando x_{ijl}^* não pertencer a Ω .

Proposição 8.1.1. *Seja Ω um subconjunto de \mathbb{R}^3 limitado e cuja fronteira é constituída pela união de superfícies (contínuas). Consideremos uma função f definida em Ω . Se f é contínua em Ω excepto, quanto muito, num conjunto de medida nula, então f é integrável em Ω .*

Demonstração. Ver, por exemplo, Dias Agudo, Volume I, p. 236. \square

A proposição anterior diz-nos, então, que todas as funções elementares de três variáveis que conhecemos serão integráveis em domínios limitados de \mathbb{R}^3 .

As propriedades do integral de Riemann definido em \mathbb{R} , serão válidas *mutatis mutandis* para o integral triplo. Em particular, o integral triplo é um operador linear e satisfaz a propriedade aditiva dos integrais.

8.2 Integral repetido

O processo de integração repetida do integral duplo generaliza-se a qualquer integral em dimensão superior, em particular também para o integral triplo. Podemos, assim, reduzir o cálculo de um integral triplo a um integral duplo. Em particular, o Teorema de Fubini generaliza-se de modo imediato ao integral triplo.

Proposição 8.2.1. *Sejam f uma função contínua num conjunto limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ e $D \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto fechado e limitado.*

1. *Sejam $g(x, y)$ e $h(x, y)$ duas funções contínuas em D tais que, para quaisquer $(x, y) \in D$, $g(x, y) \leq h(x, y)$, e seja $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y) \leq z \leq h(x, y), (x, y) \in D\}$. Então:*

$$\int \int \int_{\Omega} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int \int_D \left[\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x, y, z) \, dz \right] \, dx \, dy.$$

2. *Sejam $g(x, z)$ e $h(x, z)$ duas funções contínuas em D tais que, para quaisquer $(x, z) \in D$, $g(x, z) \leq h(x, z)$, e seja $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, z) \leq y \leq h(x, z), (x, z) \in D\}$. Então:*

$$\int \int \int_{\Omega} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int \int_D \left[\int_{g(x,z)}^{h(x,z)} f(x, y, z) \, dy \right] \, dx \, dz.$$

3. *Sejam $g(y, z)$ e $h(y, z)$ duas funções contínuas em D tais que, para quaisquer $(y, z) \in D$, $g(y, z) \leq h(y, z)$, e seja $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(y, z) \leq x \leq h(y, z), (y, z) \in D\}$. Então:*

$$\int \int \int_{\Omega} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int \int_D \left[\int_{g(y,z)}^{h(y,z)} f(x, y, z) \, dx \right] \, dy \, dz.$$

Demonstração. Ver, por exemplo, Dias Agudo, Volume I, p. 247. \square

Exemplo 8.2.1. *Descreva a região de integração e calcule o respectivo integral:*

$$\int_0^1 \int_0^2 \int_1^3 xy^2z \, dx \, dy \, dz.$$

As considerações sobre o cálculo do integral repetido e inversão de ordem de integração feitas para o integral duplo, podem ser adaptadas para o integral triplo.

8.3 Mudança de variáveis

Tal como acontece no cálculo de outros integrais, por vezes, também no cálculo do integral triplo se torna necessário fazer mudança de variáveis para se poder calcular os integrais.

Proposição 8.3.1 (Mudança de variáveis). *Sejam Ω e Δ dois subconjuntos abertos de \mathbb{R}^3 limitados por funções diferenciáveis e seja*

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \Delta &\longrightarrow \Omega \\ (u, v, w) &\mapsto (x, y, z) = \varphi(u, v, w) \end{aligned}$$

uma função bijectiva com derivadas parciais contínuas. Então, se $f(x, y, z)$ é uma função integrável em Ω , temos:

$$\int \int \int_{\Omega} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int \int \int_{\varphi^{-1}(\Omega)} f(\varphi(u, v, w)) |J| \, du \, dv \, dw,$$

onde

$$J = \det \left[\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right] \equiv \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Ver, por exemplo, Dias Agudo, Volume I, p. 258. \square

Tendo em conta que φ é uma aplicação bijectiva, $\varphi^{-1}(\Omega) = \Delta$. Tal como no integral duplo, a quantidade J continua a designar-se por **jacobiano** da mudança de variáveis (x, y, z) para (u, v, w) e a matriz

$$\left[\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right]$$

é a denominada **matriz Jacobiana** dessa transformação. Mais, tendo em conta que podemos escrever

$$(x, y, z) = \varphi(u, v, w) \equiv (\varphi_1(u, v, w), \varphi_2(u, v, w), \varphi_3(u, v, w)),$$

a matriz Jacobiana pode ser escrita na forma seguinte:

$$\left[\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right] \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial w} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial w} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial w} \end{bmatrix}.$$

Exemplo 8.3.1. *Fazendo a mudança de variáveis $u = x + y - z$ e $v = x + 2y + z$ e $w = z$, calcule o integral seguinte:*

$$\int \int \int_{\Omega} \frac{\text{sen}(x + y - z)}{x + 2y + z} \, dx \, dy \, dz,$$

onde

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x + 2y + z \leq 2, 0 \leq x + y - z \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq z \leq 1 \right\}.$$

No integral triplo, usamos com frequência uma mudança de variáveis correspondente à transformação para coordenadas polares do integral duplo. Aqui, esta mudança de variáveis recebe o nome de transformação para coordenadas cilíndricas. Usando a trigonometria no espaço, qualquer ponto P de coordenadas paralelepípedicas (x, y, z) pode ser escrito em termos das **coordenadas cilíndricas**:

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \\ z = z, \end{cases} \quad (8.3.1)$$

onde:

- r é a distância radial do ponto P à origem do referencial $(x, y, z) = (0, 0, 0)$;
- $\theta \in [0, 2\pi]$ é o ângulo formado pelo semi-eixo positivo dos xx e pela semi-recta com origem em $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ e que passa pela projecção do ponto P no plano xy , e é medido a partir do semi-eixo positivo dos xx até 360° ;
- z é a cota do ponto P .

De facto, para (r, θ, z) dados como acima, temos

$$\begin{cases} \sin(\theta) = \frac{\text{cat. op.}}{\text{hip.}} = \frac{y}{r} \\ \cos(\theta) = \frac{\text{cat. adj.}}{\text{hip.}} = \frac{x}{r} \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow (8.3).$$

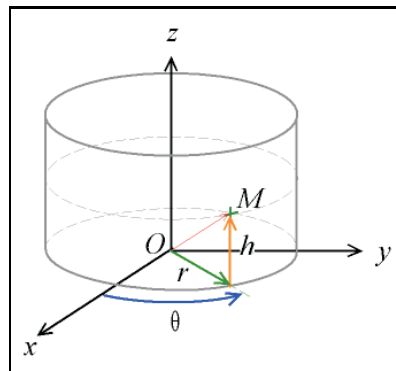


Figura 8.1: Coordenadas cilíndricas.

Proposição 8.3.2. O jacobiano da transformação para coordenadas cilíndricas (8.3) é $J = r$.

Demonstração. Considerando a transformação para coordenadas cilíndricas (8.3), temos

$$J = \det \left[\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} \right] = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = r,$$

onde usamos o Teorema de Laplace no cálculo do determinante. \square

Observemos que se trocarmos duas colunas de posição, o jacobiano vem com o sinal alterado. Por exemplo,

$$J = \det \left[\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, z, \theta)} \right] = -r.$$

Exemplo 8.3.2. Calcule o integral seguinte fazendo mudança de variáveis para coordenadas cilíndricas:

$$\int \int \int_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz, \quad \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2z, z \leq 2\}.$$

Tal como as coordenadas polares no caso do integral duplo, a mudança de variáveis para coordenadas cilíndricas no integral triplo é particularmente importante quando a região de integração tem fronteiras ao longo das quais r ou θ é constante.

Outra mudança de variáveis muito comum em integrais triplos, é a transformação para **coordenadas esféricas** (cf. Figura 8.2a):

$$\begin{cases} x = r \cos(\phi) \cos(\theta) \\ y = r \cos(\phi) \sin(\theta) \\ z = r \sin(\phi) \end{cases} \quad (8.3.2)$$

onde:

- r é a distância radial do ponto P à origem do referencial $(x, y, z) = (0, 0, 0)$;
- $\theta \in [0, 2\pi]$ é o ângulo formado pelo semi-eixo positivo dos xx e pela semi-recta com origem em $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ e que passa pela projecção do ponto P no plano xy , e é medido a partir do semi-eixo positivo dos xx até 360° ;
- $\phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ é o ângulo formado pelo plano $z = 0$ e pela semi-recta com origem em $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ e que passa pelo ponto P , e é medido a partir do plano $z = 0$ até $\pm 90^\circ$.

De facto, para (r, θ, ϕ) dados como acima e denotando por r_{xy} a distância radial r projectada sobre o plano dos xy , temos

$$\begin{cases} \text{sen}(\phi) = \frac{\text{cat. op.}}{\text{hip.}} = \frac{z}{r} \\ \text{cos}(\phi) = \frac{\text{cat. adj.}}{\text{hip.}} = \frac{r_{xy}}{r} \\ \text{sen}(\theta) = \frac{\text{cat. op.}}{\text{hip.}} = \frac{y}{r_{xy}} \\ \text{cos}(\theta) = \frac{\text{cat. adj.}}{\text{hip.}} = \frac{x}{r_{xy}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = r \text{sen}(\phi) \\ r_{xy} = r \text{cos}(\phi) \\ y = r_{xy} \text{sen}(\theta) \\ x = r_{xy} \text{cos}(\theta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = r \text{cos}(\phi) \text{cos}(\theta) \\ y = r \text{cos}(\phi) \text{sen}(\theta) \\ z = r \text{sen}(\phi) \end{cases}.$$

Proposição 8.3.3. O jacobiano da transformação para coordenadas esféricas (8.3.2) é $J = \pm r^2 \cos(\phi)$.

Demonstração. Fazendo a transformação para coordenadas esféricas (8.3.2), tem-se

$$\begin{aligned}
J &= \det \left[\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} \right] = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \cos(\phi) \cos(\theta) & -r \cos(\phi) \sin(\theta) & -r \sin(\phi) \cos(\theta) \\ \cos(\phi) \sin(\theta) & r \cos(\phi) \cos(\theta) & -r \sin(\phi) \sin(\theta) \\ \sin(\phi) & 0 & r \cos(\phi) \end{bmatrix} \\
&= \sin(\phi) \det \begin{bmatrix} -r \cos(\phi) \sin(\theta) & -r \sin(\phi) \cos(\theta) \\ r \cos(\phi) \cos(\theta) & -r \sin(\phi) \sin(\theta) \end{bmatrix} + r \cos(\phi) \det \begin{bmatrix} \cos(\phi) \cos(\theta) & -r \cos(\phi) \sin(\theta) \\ \cos(\phi) \sin(\theta) & r \cos(\phi) \cos(\theta) \end{bmatrix} \\
&= \sin(\phi) \times r^2 \sin(\phi) \cos(\phi) + r \cos(\phi) \times r \cos^2(\phi) = r^2 \cos(\phi),
\end{aligned}$$

onde usamos o Teorema de Laplace sobre a última linha. Se, na matriz Jacobiana, trocarmos a segunda com a terceira coluna, obtemos

$$J = \det \left[\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \phi, \theta)} \right] = -r^2 \cos(\phi),$$

o que termina a demonstração. \square

Podemos introduzir as **coordenadas esféricas equivalentes** da forma seguinte (*cf.* Figura 8.2b):

$$\begin{cases} x = r \sin(\phi) \cos(\theta) \\ y = r \sin(\phi) \sin(\theta) \\ z = r \cos(\phi) \end{cases} \quad (8.3.3)$$

onde, agora:

- $\phi \in [0, \pi]$ é o ângulo formado pelo semi-eixo positivo dos zz e pela semi-recta com origem em $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ e que passa pelo ponto P , e é medido a partir do semi-eixo positivo dos zz até 180° .

De facto, para (r, θ, ϕ) dados como acima e denotando por r_{xy} a distância radial r projectada sobre o plano dos xy , temos

$$\begin{cases} \sin(\phi) = \frac{\text{cat. op.}}{\text{hip.}} = \frac{r_{xy}}{r} \\ \cos(\phi) = \frac{\text{cat. adj.}}{\text{hip.}} = \frac{z}{r} \\ \sin(\theta) = \frac{\text{cat. op.}}{\text{hip.}} = \frac{y}{r_{xy}} \\ \cos(\theta) = \frac{\text{cat. adj.}}{\text{hip.}} = \frac{x}{r_{xy}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_{xy} = r \sin(\phi) \\ z = r \cos(\phi) \\ y = r_{xy} \sin(\theta) \\ x = r_{xy} \cos(\theta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = r \sin(\phi) \cos(\theta) \\ y = r \sin(\phi) \sin(\theta) \\ z = r \cos(\phi) \end{cases}$$

Proposição 8.3.4. *O jacobiano da transformação para coordenadas esféricas equivalentes (8.3.3) é $J = \pm r^2 \sin(\phi)$.*

Demonstração. Fazendo a transformação para coordenadas esféricas equivalentes (8.3.3), tem-se

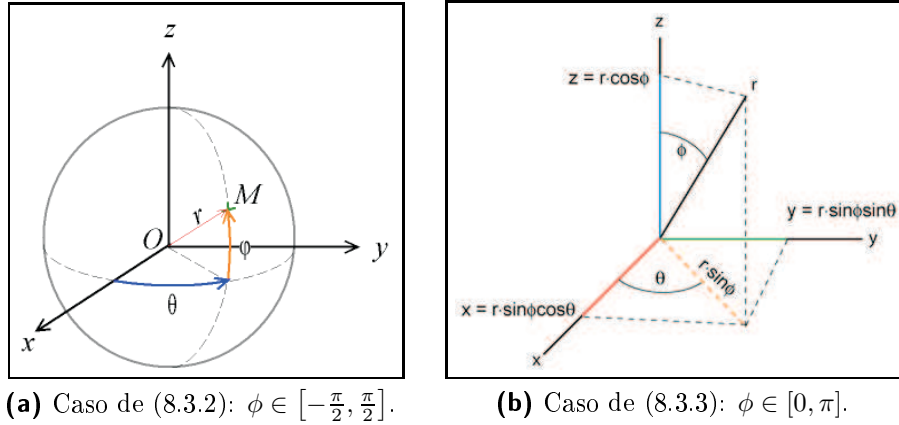
(a) Caso de (8.3.2): $\phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.(b) Caso de (8.3.3): $\phi \in [0, \pi]$.

Figura 8.2: Coordenadas esféricas.

$$\begin{aligned}
 J &= \det \left[\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} \right] = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \sin(\phi) \cos(\theta) & -r \sin(\phi) \sin(\theta) & r \cos(\phi) \cos(\theta) \\ \sin(\phi) \sin(\theta) & r \sin(\phi) \cos(\theta) & r \cos(\phi) \sin(\theta) \\ \cos(\phi) & 0 & -r \sin(\phi) \end{bmatrix} \\
 &= \cos(\phi) \det \begin{bmatrix} -r \sin(\phi) \sin(\theta) & r \cos(\phi) \cos(\theta) \\ r \sin(\phi) \cos(\theta) & r \cos(\phi) \sin(\theta) \end{bmatrix} - r \sin(\phi) \det \begin{bmatrix} \sin(\phi) \cos(\theta) & -r \sin(\phi) \sin(\theta) \\ \sin(\phi) \sin(\theta) & r \sin(\phi) \cos(\theta) \end{bmatrix} \\
 &= \cos(\phi) [-r^2 \sin(\phi) \cos(\phi) \sin^2(\theta) - r^2 \sin(\phi) \cos(\phi) \cos^2(\theta)] \\
 &\quad - r \sin(\phi) [r \sin^2(\phi) \cos^2(\theta) + r \sin^2(\phi) \sin^2(\theta)] \\
 &= -r^2 \sin(\phi) [\cos^2(\phi) \sin^2(\theta) + \sin^2(\phi) \sin^2(\theta)] - r^2 \sin(\phi) [\cos^2(\phi) \cos^2(\theta) + \sin^2(\phi) \cos^2(\theta)] \\
 &= -r^2 \sin(\phi),
 \end{aligned}$$

onde usamos o Teorema de Laplace sobre a última linha. Também neste caso, se, na matriz Jacobiana, trocarmos a segunda com a terceira coluna, obtemos

$$J = \det \left[\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \phi, \theta)} \right] = r^2 \sin(\phi),$$

o que termina a demonstração. \square

Tal como foi mencionado nas demonstrações das duas proposições anteriores, a escolha do sinal $+$ ou $-$ está relacionada com a ordem pela qual escrevemos as colunas da matriz Jacobiana. Se escolhermos a ordem (r, ϕ, θ) , virá $-$ na fórmula de J da Proposição 8.3.3, ou $+$ na fórmula de J da Proposição 8.3.4. Se a ordem for (r, θ, ϕ) , então os sinais vêm trocados. As duas transformações para coordenadas esféricas são equivalentes, temos apenas de ter o cuidado que o domínio de variação do ângulo ϕ é diferente e que, na substituição do integral a calcular, deverá aparecer $|J|$. Assim, se usarmos a forma das coordenadas esféricas (8.3.2), obtemos:

$$|J| = r^2 \cos(\phi), \quad \text{pois } \cos(\phi) \geq 0 \quad \text{para } \phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Se, porventura, usarmos as coordenadas esféricas equivalentes (8.3.3), temos:

$$|J| = r^2 \sin(\phi), \quad \text{pois } \sin(\phi) \geq 0 \quad \text{para } \phi \in [0, \pi].$$

Exemplo 8.3.3. Calcule o integral seguinte fazendo uma mudança de variáveis para coordenadas esféricas:

$$\int \int \int_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz, \quad \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}.$$

8.4 Integração por partes

Nesta secção vamos ver como é que a fórmula de integração por partes se estende ao caso de integrais duplos. Depois deste assunto ter sido tratado nos integrais duplos, a única novidade aqui é o facto de termos mais dimensão.

Proposição 8.4.1 (Teorema de Gauss-Green). *Seja u uma função de três variáveis reais, com derivadas parciais contínuas num domínio aberto Ω de \mathbb{R}^3 . Sejam, ainda, \mathcal{S} uma superfície diferenciável, fechada e totalmente contida em Ω , $D = \mathcal{S} \cup \text{int}(\mathcal{S}) \subset \Omega$ e $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ a normal unitária exterior a \mathcal{S} . Então:*

$$\begin{aligned} \int \int_D \frac{\partial u}{\partial x} dx dy dz &= \int \int_{\mathcal{S}} u n_x dS, \\ \int \int_D \frac{\partial u}{\partial y} dx dy dz &= \int \int_{\mathcal{S}} u n_y dS, \\ \int \int_D \frac{\partial u}{\partial z} dx dy dz &= \int \int_{\mathcal{S}} u n_z dS. \end{aligned} \tag{8.4.4}$$

Demonstração. Ver, por exemplo, Dias Agudo, Volume 2, p. 103, ou Apostol, Volume II, p. 381. \square

Prova-se que se \mathcal{S} for uma superfície diferenciável, então existe a normal unitária exterior $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ em todos os pontos de \mathcal{S} . No entanto, a validade do Teorema de Gauss-Green requer apenas que o caminho seja contínuo no sentido de Lipschitz, já que neste caso a normal existe em quase todos os pontos.

Teorema 8.4.1 (Teorema da Divergência). *Seja $\mathbf{u} = (u, v, w)$ um campo vectorial cujas componentes são funções de três variáveis reais, com derivadas parciais contínuas num domínio aberto Ω de \mathbb{R}^3 . Então, nas condições do Teorema de Gauss-Green, temos*

$$\int \int_D \text{div } \mathbf{u} dx dy dz = \int \int_{\mathcal{S}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS, \tag{8.4.5}$$

onde

$$\text{div } \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

denota a divergência do campo vectorial \mathbf{u} .

Demonstração. Se, na fórmula (8.4.4), substituirmos u por u_i , a i -ésima componente de um campo vectorial $\mathbf{u} = (u, v, w)$, e somarmos as fórmulas respectivas, obtemos

$$\int \int \int_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dx dy dz = \int \int_{\mathcal{S}} u n_x + v n_y + w n_z dS,$$

que é equivalente a (8.4.5). \square

Proposição 8.4.2 (Fórmula de integração por partes). *Sejam u e v funções reais de três variáveis reais, com derivadas parciais contínuas num domínio aberto Ω de \mathbb{R}^3 . Sejam, ainda, \mathcal{S} uma superfície diferenciável, fechada e totalmente contida em Ω , $D = \mathcal{S} \cup \text{int}(\mathcal{S}) \subset \Omega$ e $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ a normal unitária exterior a \mathcal{S} . Então:*

$$\int \int \int_D \frac{\partial u}{\partial x} v \, dx dy dz = \int \int_S u v n_x \, dS - \int \int \int_D u \frac{\partial v}{\partial x} \, dx dy dz; \quad (8.4.6)$$

$$\int \int \int_D \frac{\partial u}{\partial y} v \, dx dy dz = \int \int_S u v n_y \, dS - \int \int \int_D u \frac{\partial v}{\partial y} \, dx dy dz; \quad (8.4.7)$$

$$\int \int \int_D \frac{\partial u}{\partial z} v \, dx dy dz = \int \int_S u v n_z \, dS - \int \int \int_D u \frac{\partial v}{\partial z} \, dx dy dz. \quad (8.4.8)$$

Demonstração. A demonstração segue facilmente a partir do Teorema de Gauss-Green, substituindo u por uv em (8.4.4). \square

Se, em cada uma das fórmulas de integração por partes (8.4.6)-(8.4.8) substituirmos v pela i -ésima componente de um campo vectorial $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ e somarmos as fórmulas obtidas, obtemos a fórmula seguinte de integração por partes mais geral:

$$\begin{aligned} \int \int \int_D \nabla u \cdot \mathbf{F} \, dx dy dz &= \int \int_S u \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS - \int \int \int_D u \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx dy dz \quad \Leftrightarrow \\ \int \int \int_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} F_1 + \frac{\partial u}{\partial y} F_2 + \frac{\partial u}{\partial z} F_3 \right) \, dx dy dz &= \\ \int \int_S u (F_1 n_x + F_2 n_y + F_3 n_z) \, dS - \int \int \int_D u \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) \, dx dy dz. \end{aligned} \quad (8.4.9)$$

onde usamos a notação

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

para o gradiente de u .

Concluimos esta secção com algumas fórmulas que são bastante úteis nas aplicações.

Proposição 8.4.3 (Fórmulas de Green). *Sejam u e v funções reais de três variáveis reais, com derivadas parciais contínuas num domínio aberto Ω de \mathbb{R}^3 . Sejam, ainda, \mathcal{S} uma superfície diferenciável, fechada e totalmente contida em Ω , $D = \mathcal{S} \cup \text{int}(\mathcal{S}) \subset \Omega$ e $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ a normal unitária exterior a \mathcal{S} . Então:*

1. $\int \int \int_D \Delta u \, dx dy dz = \int \int_S \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, dS;$
2. $\int \int \int_D \nabla u \cdot \nabla v \, dx dy dz = \int \int_S \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} u \, dS - \int \int \int_D u \Delta v \, dx dy dz;$
3. $\int \int \int_D (u \Delta v - v \Delta u) \, dx dy dz = \int \int_S \left(\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} u - \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v \right) \, dS;$

onde

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \nabla u \cdot \mathbf{n}, \quad \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = \nabla v \cdot \mathbf{n}$$

são as designadas derivadas de u e v (segundo a) normal \mathbf{n} e

$$\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u)$$

é o Laplaciano de u .

Demonstração. Para demonstrar 1., usamos a fórmula de integração por partes (8.4.6)-(8.4.7), fazendo $v = 1$, e com $\frac{\partial u}{\partial x}$ no lugar de u , no caso de (8.4.6), com $\frac{\partial u}{\partial y}$ no lugar de u no caso de (8.4.7) e com $\frac{\partial u}{\partial z}$ no lugar de u no caso de (8.4.8). A demonstração de 2. sai, também, de (8.4.6) substituindo v por $\frac{\partial u}{\partial x}$, de (8.4.7) com v no papel de $\frac{\partial u}{\partial y}$ e de (8.4.8) com v no papel de $\frac{\partial u}{\partial z}$. A afirmação 3., usa (8.4.6) com $\frac{\partial u}{\partial x}$ no lugar de u , (8.4.7) com $\frac{\partial u}{\partial y}$ substituindo u e, ainda, usa (8.4.8) com $\frac{\partial u}{\partial z}$ a substituir u . Depois considera-se a equação obtida com u e v com os papéis trocados. A equação final resulta da subtração das duas equações obtidas anteriormente. \square

8.5 Teorema de Green

Nesta secção apresentamos duas extensões para o espaço \mathbb{R}^3 , do Teorema de Green no plano \mathbb{R}^2 : o Teorema da Divergência e o Teorema de Stokes. O Teorema da Divergência está associado à divergência de um campo vectorial e o Teorema de Stokes está associado com o rotacional. Começemos por definir o que se entende por divergência de um campo vectorial e recordar a noção de rotacional.

Definição 8.5.1. *Seja \mathbf{F} um campo vectorial de \mathbb{R}^3 em \mathbb{R}^3 de classe C^1 , tal que $\mathbf{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$. Chama-se **divergência** do campo vectorial \mathbf{F} ao campo escalar denotado por $\operatorname{div} \mathbf{F}$ e definido por*

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

Por vezes, também se usa a notação $\nabla \cdot \mathbf{F}$ para denotar a divergência de \mathbf{F} , onde ∇ é um operador diferencial e que é dado por:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Usando esta notação, podemos escrever

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (F_1, F_2, F_3).$$

Uma interpretação física da divergência é a seguinte. Se \mathbf{F} for o campo de velocidades de um fluido que atravessa uma superfície na direcção da normal unitária, então $\operatorname{div} \mathbf{F}$ dá-nos a taxa de variação de massa de fluido (por unidade de massa e por unidade de tempo) em cada ponto do domínio limitado pela superfície. Em particular, se $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$, esta taxa de variação é nula e o fluido diz-se incompressível.

Definição 8.5.2. *Seja \mathbf{F} um campo vectorial de \mathbb{R}^3 em \mathbb{R}^3 de classe C^1 , tal que $\mathbf{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$. Chama-se **rotacional** do campo vectorial \mathbf{F} ao campo vectorial denotado por $\mathbf{rot} \mathbf{F}$ e definido por*

$$\mathbf{rot} \mathbf{F} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{bmatrix},$$

onde $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ é a base canónica de \mathbb{R}^3 .

O rotacional pode, também, ser definido usando o operador diferencial ∇ :

$$\mathbf{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (F_1, F_2, F_3).$$

À luz da Mecânica dos Fluidos, também podemos dar uma interpretação física do rotacional. Se \mathbf{F} é o campo de velocidades de um fluido, então $\mathbf{rot} \mathbf{F}$ é a quantidade, ou rotação, pela qual o fluido gira em torno de determinado ponto. Neste contexto, o rotacional é habitualmente designado por vorticidade.

Proposição 8.5.1. *Seja Ω uma região fechada e limitada de \mathbb{R}^3 cuja fronteira \mathcal{S} é uma superfície orientada¹ limitada por uma curva simples fechada \mathcal{C} . Seja \mathbf{F} um campo vectorial cujas suas componentes, F_1, F_2, F_3 têm derivadas parciais contínuas em Ω e suponhamos que a superfície \mathcal{S} resulta de uma parametrização derivável. Sejam, ainda, \mathbf{n} o vector unitário normal à superfície \mathcal{S} e \mathbf{t} o vector unitário tangente à curva \mathcal{C} . Então:*

1. **Teorema da Divergência**

$$\int \int \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx \, dy \, dz = \int \int_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS;$$

2. **Teorema de Stokes**

$$\int \int_{\mathcal{S}} \mathbf{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} \, ds.$$

SEM DEMONSTRAÇÃO: Ver, por exemplo, Dias Agudo, Volume I, pp. 126 e 130.

Recordemos, que, se a superfície \mathcal{S} for parametrizada por $\mathbf{r}(u, v)$, então o vector unitário normal à superfície \mathcal{S} é dado por:

$$\mathbf{n} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\|}.$$

Por outro lado, se a curva \mathcal{C} for parametrizada por $\mathbf{r}(t)$, então o vector unitário tangente à curva \mathcal{C} é dado por:

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}.$$

Mais, se usarmos a notação dos integrais de superfície e de linha introduzida anteriormente, podemos escrever as identidades integrais da proposição anterior nas formas abreviadas seguintes mais simples:

¹Grosso modo, uma superfície diz-se orientada, se tiver dois lados.

- Teorema da Divergência

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx \, dy \, z = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F};$$

- Teorema de Stokes

$$\iint_{\mathcal{S}} \operatorname{rot} \mathbf{F} = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}.$$

Podemos, ainda, escrevê-las nas formas seguintes mais intuitivas:

- Teorema da Divergência

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz = \iint_{\mathcal{S}} F_1 \, dydz + F_2 \, dzdx + F_3 \, dxdy;$$

- Teorema de Stokes

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{S}} \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy \\ = \int_{\mathcal{C}} F_1 \, dx + F_2 \, dy + F_3 \, dz. \end{aligned}$$

O Teorema da Divergência é, por vezes, designado por Teorema de Gauss e, habitualmente, é designado na literatura russa por Teorema de Ostrogradsky-Gauss. Aquando do estudo do integral duplo, vimos como o então também Teorema da Divergência relacionava o integral duplo com o integral de linha. O Teorema da Divergência desta secção relaciona o integral triplo com o integral de superfície.

Exemplo 8.5.1. Usando o Teorema da Divergência, calcule o integral de superfície

$$\iint_{\mathcal{S}} x^3 \, dydz + x^2y \, dzdx + x^2z \, dxdy$$

onde \mathcal{S} é a superfície lateral do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e $0 \leq z \leq 1$ (superfície lateral e bases).

O Teorema de Stokes relaciona o integral de superfície com o integral de linha e tem a interpretação física seguinte. O fluxo do rotacional de \mathbf{F} através de \mathcal{S} coincide com circulação de \mathbf{F} ao longo da fronteira de \mathcal{S} .

Exemplo 8.5.2. Usando o Teorema de Stokes, calcule o integral de superfície

$$\iint_{\mathcal{S}} \operatorname{rot} \mathbf{F}, \quad \mathbf{F}(x, y, z) = (z - y, x + z, -x - y),$$

onde \mathcal{S} é a superfície $z = 4 - x^2 - y^2$ e $0 \leq z \leq 4$.

O Teorema de Stokes é um resultado essencialmente do espaço. Aquele de que falamos na secção do integral duplo, é um caso particular do desta secção, quando se considera uma superfície \mathcal{S} plana.

8.6 Aplicações

Nesta secção vamos apenas considerar a aplicação de integrais triplos ao cálculo de volumes de corpos.

Seja Ω um domínio limitado de \mathbb{R}^3 . O **volume** do domínio Ω é determinado através do integral triplo, calculado sobre o domínio Ω , da função identicamente igual a 1. Ou seja,

$$\text{Volume}(\Omega) = \int \int \int_{\Omega} dx dy dz.$$

Exemplo 8.6.1. Usando integrais triplos, calcule o volume do paralelepípedo com vértices $V_1 = (0, 0, 0)$, $V_2 = (1, 0, 0)$, $V_3 = (0, 1, 0)$, $V_4 = (1, 1, 0)$, $V_5 = (0, 0, \sqrt{2})$, $V_6 = (1, 0, \sqrt{2})$, $V_7 = (0, 1, \sqrt{2})$, $V_8 = (1, 1, \sqrt{2})$.

Se o domínio Ω for a reunião de dois domínios, digamos Ω_1 e Ω_2 , então:

$$\text{Volume}(\Omega) = \int \int \int_{\Omega_1} dx dy dz + \int \int \int_{\Omega_2} dx dy dz.$$

Por outro lado, se o domínio Ω resultar da diferença de dois domínios, digamos $\Omega = \Omega_1 \setminus \Omega_2$, temos:

$$\text{Volume}(\Omega) = \int \int \int_{\Omega_1} dx dy dz - \int \int \int_{\Omega_2} dx dy dz.$$

Exemplo 8.6.2. Usando integrais triplos, calcule o volume do domínio Ω compreendido entre o rectângulo, do plano $z = 0$, com vértices $A = (0, 0)$, $B = (3, 0)$, $C = (3, 2)$ e $D = (0, 2)$, e a superfície $z = 4x^2 + 9y^2$.

A proposição seguinte mostra que o volume de domínio tri-dimensional pode, também, ser calculado usando o Teorema de Gauss-Green, reduzindo o cálculo a um integral de superfície.

Proposição 8.6.1. Seja D um domínio conexo de \mathbb{R}^3 limitado por uma superfície \mathcal{S} . Então

$$\text{Volume}(D) = \frac{1}{3} \int \int_{\mathcal{S}} x dydz + y dx dz + z dx dy. \quad (8.6.10)$$

Demonstração. De facto, se $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ é a normal unitária exterior à superfície \mathcal{S} , tem-se, tomando $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 1$ e $\frac{\partial u}{\partial z} = 1$ em (8.4.4),

$$\begin{aligned} \text{Volume}(D) &= \int \int \int_D dx dy dz = \frac{1}{3} \int \int_{\mathcal{S}} x n_x + y n_y + z n_z dS \\ &= \frac{1}{3} \int \int_{\mathcal{S}} x dydz + y dx dz + z dx dy. \end{aligned} \quad (8.6.11)$$

Na última igualdade usamos as relações (7.2.2)-(7.2.4) e (7.4.9). \square

Por outro lado, se conjugarmos (8.6.11) com (7.4.10), podemos escrever (8.6.10) na forma equivalente seguinte

$$\text{Volume}(D) = \frac{1}{3} \int \int_{\mathcal{S}} x \cos(\alpha) + y \cos(\beta) + z \cos(\gamma) dS.$$

Esta última fórmula é mais apropriada para superfícies escritas na forma cartesiana.

Exemplo 8.6.3. Mostre que o volume do domínio seguinte é $\frac{4\pi}{3}$:

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\} ;$$

a) usando o integral triplo ;

b) usando o integral de superfície.

Já para o cálculo da área de uma superfície, podemos usar o integral de superfície.

Definição 8.6.1. Seja \mathcal{S} uma superfície parametrizada por $\mathbf{r}(u, v)$, onde $(u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$. Definimos a **área da superfície** \mathcal{S} por

$$S = \int \int_{\mathcal{S}} dS = \int \int_D \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| dudv.$$

Usando as notações (7.2.2)-(7.2.4), podemos escrever a fórmula para a área de uma superfície na forma seguinte

$$S = \int \int_D \sqrt{J_{yz}^2 + J_{xz}^2 + J_{xy}^2} dudv.$$

Por outro lado, se considerarmos a superfície escrita numa das formas cartesianas descritas em (7.3.6)-(7.3.8), as fórmulas para a área vêm, em cada caso,

$$\begin{aligned} z = \varphi(x, y) &\Rightarrow S = \int \int_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2} dx dy; \\ y = \varphi(x, z) &\Rightarrow S = \int \int_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2} dx dz; \\ x = \varphi(y, z) &\Rightarrow S = \int \int_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2} dy dz. \end{aligned} \quad (8.6.12)$$

Exemplo 8.6.4. Calcule a área lateral do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ entre $z = 0$ e $z = 4$.

Na proposição seguinte relacionamos o cálculo do volume de uma bola, assim como a área de uma esfera, com o cálculo da função Gama.

Proposição 8.6.2. Consideremos uma bola D de centro (a, b, c) e raio $R > 0$, e denotemos por \mathcal{S} a esfera que limita D . Então o volume da bola D e a área da esfera \mathcal{S} podem ser calculados à custa da função Gama da forma seguinte:

$$\text{Volume}(D) = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + 1\right)} R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3, \quad \text{Área}(\mathcal{S}) = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + 1\right)} 3R^2 = 4\pi R^2.$$

Demonstração. De acordo com o exposto acima, designando por D a bola $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$, temos

$$\text{Volume}(D) = \int \int \int_D dx dy dz = 2 \int \int_D \sqrt{R^2 - [(x - a)^2 + (y - b)^2]} dx dy,$$

onde $\mathcal{D} : (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq R^2$. Fazendo a transformação para coordenadas polares,

$$\begin{cases} x = a + \rho R \cos(\theta) \\ y = b + \rho R \sin(\theta) \end{cases} \Rightarrow J = \rho R^2, \quad 0 \leq \rho \leq 1, \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

vem, usando o conhecimento das funções Gama e Beta,

$$\begin{aligned} \text{Volume}(D) &= 2R \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 - \rho^2} \rho R^2 dr d\theta = 4\pi R^3 \int_0^1 \sqrt{1 - \rho^2} \rho d\rho \\ &= 2\pi R^3 \int_0^1 (1 - s)^{\frac{1}{2}} ds = 2\pi R^3 B\left(1, \frac{3}{2}\right) = 2\pi R^3 \frac{\Gamma(1) \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(1 + \frac{3}{2})} \\ &= 2\pi R^3 \frac{\frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2} + 1)} = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2} + 1)} R^3 = \frac{3}{4} \pi R^3. \end{aligned}$$

Para a fórmula da área, começamos por observar que, por transformação para coordenadas esféricas, se tem:

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\phi) \cos(\theta) \\ y = \rho \cos(\phi) \sin(\theta) \\ z = \rho \sin(\phi) \end{cases} \Rightarrow \text{Volume}(D) = \int \int \int_D dx dy dz = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \cos(\phi) d\phi d\theta d\rho.$$

Usando a fórmula do volume estabelecida na primeira parte desta prova, obtemos

$$\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2} + 1)} R^3 = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \cos(\phi) d\phi d\theta d\rho$$

Derivando, agora, esta expressão em ordem a R , fica

$$\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2} + 1)} 3R^2 = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cos(\phi) d\phi d\theta.$$

Por outro lado, parametrizando a esfera \mathcal{S} por

$$\mathbf{r}(u, v) \equiv \begin{cases} x(u, v) = R \cos(v) \cos(u), & u \in [0, 2\pi] \\ y(u, v) = R \cos(v) \sin(u), & v \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ z(u, v) = R \sin(v) \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = R^2 \cos(\phi),$$

temos

$$\text{Área}(\mathcal{S}) = \int \int_{\mathcal{S}} dS = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cos(\phi) d\phi d\theta.$$

Igualando as duas expressões obtidas, concluímos que

$$\text{Área}(\mathcal{S}) = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2} + 1)} 3R^2 = 4\pi R^2,$$

o que termina a demonstração. \square

A proposição anterior, permite-nos concluir que, no caso bola de raio $R > 0$, se tem:

$$\frac{d}{dR} \int \int \int_D dx dy dz = \int \int_{\mathcal{S}} dS.$$

8.7 Exercícios

1. Descreva as regiões de integração e calcule os respectivos integrais:

$$(a) \int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 \frac{dx dy dz}{\sqrt{x+y+z+1}};$$

$$(d) \int_0^1 \int_0^x \int_0^{xy} x^3 y^2 z dz dy dx;$$

$$(b) \int_0^1 \int_0^z \int_0^1 \sqrt{1-z^2} dx dy dz;$$

$$(e) \int_{-1}^1 \int_0^{\arccos(y)} \int_0^{\sin(x)} \pi - z dz dx dy;$$

$$(c) \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} xyz dz dy dx;$$

$$(f) \int_0^2 \int_0^{2\sqrt{x}} \int_0^{\frac{\sqrt{4x-y^2}}{2}} x dz dy dx.$$

2. Considere os corpos seguintes e as transformações indicadas:

2.1 Ω é o tetraedro $x + y + z \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $z \geq 0$, e a transformação é: $x = u^2$, $y = v^2$ e $z = w^2$;

2.2 Ω é o prisma triangular $x + y \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $0 \leq z \leq 3$, e a transformação é: $x = u^2$, $y = v^2$, $z = w$;

2.3 Ω é o cilindro $x^2 + y^2 \leq 4$ e $0 \leq z \leq 4$, e a transformação é $x = u$, $y = w$ e $z = v$;

2.4 Ω é o elipsóide $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} \leq 1$ e a transformação é: $x = 2u$, $y = 3v$ e $w = 5z$.

Para cada uma das alíneas anteriores:

- Represente em sistemas de eixos cartesianos os corpos indicados, bem como os novos corpos que se obtêm por aplicação das transformações indicadas, de variáveis (x, y, z) para (u, v, w) ;
- Em cada caso, recorrendo a formulário apropriado, calcule os volumes dos corpos originais e dos corpos transformados;
- Calcule o Jacobiano de cada transformação e, tendo em atenção a alínea b), relacione o seu valor com fenómenos de rotação e contracção/dilatação.

3. Calcule os integrais seguintes usando as mudanças de variáveis indicadas:

$$(a) \int \int \int_{\Omega} e^{\frac{y-x+z}{y+x-z}} dx dy dz, \quad u = y - x + z, \quad v = y + x - z, \quad w = z,$$

onde

$$\Omega = \{(x, y, z) : \mathbb{R}^3 : 0 \leq y - x + z \leq y + x - z, 0 \leq y + x - z \leq 1, 1 \leq z \leq 2\};$$

$$(b) \int \int \int_{\Omega} \frac{\cos(x + 2y + z)}{x + y - z} dx dy dz, \quad u = x + 2y + z, \quad v = x + y - z, \quad w = z,$$

onde $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x + y - z \leq 2, 0 \leq x + 2y + z \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq z \leq 1\};$

$$(c) \int \int \int_{\Omega} \frac{\ln(x + y - 2z)}{2x + y + z} dx dy dz, \quad u = x + y - 2z, \quad v = 2x + y + z, \quad w = z,$$

onde $\Omega = \{(x, y, z) : \mathbb{R}^3 : 1 \leq x + y - 2z \leq 2, 1 \leq 2x + y + z \leq 2, 1 \leq z \leq 2\};$

4. Calcule os integrais seguintes usando a mudança de variáveis para coordenadas cilíndricas:

$$(a) \int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^4 z \sqrt{x^2 + y^2} dz dy dx;$$

$$(b) \int \int \int_{\Omega} xyz dx dy dz, \quad \text{onde} \\ \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq \sqrt{1-y^2}, x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\};$$

$$(c) \int \int \int_{\Omega} e^{x^2+y^2} dx dy dz, \quad \text{onde } \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}.$$

5. Calcule os integrais seguintes usando a mudança de variáveis para coordenadas esféricas:

$$(a) \int \int \int_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz, \\ \text{onde} \\ \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq 3, 0 \leq x \leq \sqrt{9-y^2}, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{16 - (x^2 + y^2)}\};$$

$$(b) \int \int \int_{\Omega} z dx dy dz, \\ \text{onde } \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\};$$

$$(c) \int \int \int_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz, \\ \text{onde } \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq x\}.$$

6. Usando integrais triplos, calcule o volume dos domínios Ω seguintes,:

$$(a) \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x, 0 \leq z \leq 1-x-y\};$$

$$(b) \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \leq 2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\};$$

$$(c) \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\};$$

$$(d) \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, xyz \geq 0\};$$

$$(e) \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 25, x^2 + y^2 \geq 9\}.$$

7. Considere o elipsóide

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} + (z-1)^2 = 1 \right\}.$$

(a) Mostre que o módulo do jacobiano da transformação indicada a seguir é $|J| = 6r^2 \sin(\phi)$:

$$\begin{cases} x = 1 + 2r \sin(\phi) \cos(\theta) \\ y = 1 + 3r \sin(\phi) \sin(\theta) \\ z = 1 + r \cos(\phi) \end{cases}.$$

(b) Usando integrais triplos, e tendo em conta a transformação anterior com $\theta \in [0, 2\pi]$ e $\phi \in [0, \pi]$, calcule o volume interior ao elipsóide Ω .

8. Verifique a igualdade do Teorema da Divergência no caso do cone $x^2 + y^2 \leq z^2$ e $0 \leq z \leq 2$.
9. Usando o Teorema da Divergência, calcule o integral de superfície $\int \int_{\mathcal{S}} \mathbf{F}$ nos casos seguintes:
- a) $\mathbf{F}(x, y, z) = (e^x, e^y, e^z)$, $\mathcal{S} : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1$;
 b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)$, $\mathcal{S} : x^2 + y^2 + z^2 = 9$.
10. Usando o Teorema da Divergência, calcule os integrais de superfície seguintes:
- a) $\int \int_{\mathcal{S}_1} x^3 dydz + x^2 y dzdx + x^2 z dx dy$; b) $\int \int_{\mathcal{S}_2} (z - y) dy dz + y^3 dz dx + 2z^3 dx dy$;
- onde \mathcal{S}_1 é a superfície do cubo $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ e $0 \leq z \leq 1$ e \mathcal{S}_2 é a superfície (total) do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ com $-3 \leq z \leq 3$.
11. Verifique a igualdade do Teorema de Stokes no caso do parabolóide $\mathcal{S} : z = 1 - (x^2 + y^2)$ e $z \geq 0$; \mathcal{C} o bordo deste parabolóide, *i.e.*, $x^2 + y^2 = 1$ e $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, z, x)$.
12. Usando o Teorema de Stokes, calcule o integral de superfície $\int \int_{\mathcal{S}} \mathbf{rot} \mathbf{F}$ nos casos seguintes:
- a) $\mathbf{F}(x, y, z) = (z^2, 5x, 0)$, $\mathcal{S} : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, z = 1$;
 b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (e^z, e^z \sin(y), e^z \cos(y))$, $\mathcal{S} : z = y^2, 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2$.

Bibliografia

- [1] T.M. Apostol. *Calculus*. John Wiley & Sons, New York, 1969.
- [2] W.M. Boyce, R.C. DiPrima. *Calculus*. John Wiley & Sons, New York, 1988.
- [3] R. Courant e F. John. *Introduction to Calculus and Analysis*. Volume I. Springer-Verlag, New York, 1989.
- [4] B. Demidovitch (sob a redacção). *Problemas e Exercícios de Análise Matemática*. Editora Mir, Moscovo, 1987.
- [5] F.R. Dias Agudo. *Análise Real*. Escolar Editora, Lisboa, 1989.
- [6] H.L. Guiadoras. *Um Curso de Cálculo*. Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 2002.
- [7] M. Krasnov, A. Kiselev, G. Makarenko e E. Shikin. *Mathematical Analysis for Engineers*. Mir Publishers, Moscow, 1989.
- [8] E. Kreyszig. *Advanced Engineering Mathematics*. Wiley, New York, 2005.
- [9] S. Lang. *Calculus of Several Variables*. Springer-Verlag, New York, 1987.
- [10] J.E. Marsden e M.J. Hoffman. *Elementary Classical Analysis*. Second Edition. W.E. Freeman and Company, New York, 1995.
- [11] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill International Editions, 1976.
- [12] V. Zorich. *Mathematical Analysis I, II*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2004.