Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería 2005
Granada, 4 a 7 de julio, 2005

SOBRE UM EFEITO TÉRMICO SEM MUDANÇA DE FASE

S. N. Antontsev[1], H. B. de Oliveira[2*]

1: Departamento de Matemática
Universidade da Beira Interior
Convento de Santo António, 6201-001 Covilhã, PORTUGAL
e-mail: anton@ubi.pt

2: Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade do Algarve
Campus de Gambelas, 8005-139 Faro, PORTUGAL
e-mail: holivei@ualg.pt, web: http://w3.ualg.pt/~holivei/

Palavras chave: Navier-Stokes, Boussinesq, Força com Memória Sublinear, Efeitos de Localização.

Resumo. *O modelo que aqui estudamos envolve um sistema planar constituído pelas equações de Navier-Stokes para a velocidade* $\mathbf{u}$ *e pressão* p*, perturbadas por uma força* $\mathbf{f}$ *com memória sublinear, e por uma equação de advecção-difusão para a temperatura* θ*:*

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = \mathbf{0}\,,$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = \mathbf{f} - \nabla p + \nu \triangle \mathbf{u}\,,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\theta = \triangle \theta\,,$$

Consideramos estas equações num domínio $Q_T = \Omega\times(0,T)$*, onde* $\Omega = (0,\infty)\times(0,L)$ *é uma faixa semi-infinita com* $L = const. > 0$ *e* $0 < T \leq \infty$*, e com as condições iniciais e de fronteira em* $\mathbf{u}$ *e em* θ *apropriadas.*

Neste artigo mostramos como a acção de dois efeitos simultâneos, um acoplamento conveniente entre a velocidade $\mathbf{u} = (u,v)$ *e a temperatura* θ*,*

$$-\mathbf{f}(\mathbf{x},t,\theta,\mathbf{u})\cdot\mathbf{u} \geq |u|^{\sigma(\theta)}\,,\quad 1 < \sigma^- \leq \sigma(\theta) \leq \sigma^+ < 2\,,$$

e uma baixa variação da temperatura,

$$\theta \in [m,M]\,,\quad 0 \leq m \leq M < \infty\,,$$

mas superior à temperatura de mudança de fase, pode ser responsável por parar o escoamento de um fluido viscoso sem qualquer mudança de fase.

Começamos por estudar a versão estacionária deste problema e só depois a versão evolutiva acima descrita.

Este trabalho é um desenvolvimento mais prático do artigo [3] com alguns resultados novos aí não apresentados, em especial no problema de evolução.

1 INTRODUÇÃO

As equações de Navier-Stokes foram propostas em 1822 por Navier tendo por base modelos moleculares apropriados. No entanto, a primeira descrição matemática para o escoamento de um fluido (ideal) foi formulada por Euler em 1755 como uma consequência da Segunda Lei de Newton aplicada a um fluido submetido a uma força interna chama gradiente da pressão. O grande alcance de Navier foi introduzir nas equações de Euler os efeitos de atracção e repulsão entre moléculas vizinhas. Estas equações foram melhoradas por Cauchy em 1828, Poisson em 1829 e, em 1843, St.-Venant derivou as equações numa base mais física e aplicada, não só a escoamentos laminares, mas também a escoamentos turbulentos. Contudo, foi apenas com o trabalho clarificador de Stokes, em 1845, que estas equações encontraram uma justificação completamente satisfatória na base da Mecânica dos Meios Contínuos.

Hoje em dia, as equações de Navier-Stokes são derivadas, habitualmente, a partir de três princípios fundamentais da Física: Conservação da Massa; Conservação do Momento Linear; Conservação da Energia (cf. [12]). Consideramos o escoamento de um fluido que no instante t ocupa o domínio Ω do espaço $\mathbb{R}^3$. As equações de Navier-Stokes na sua forma mais habitual, e que será a aqui considerada, correspondem à representação Euleriana do escoamento, a qual nos descreve o campo de velocidades $\mathbf{u} = (u, v, w)$ correspondente à partícula do fluido que se encontra na posição (x, y, z) no instante t. O Princípio de Conservação da Massa permite-nos escrever a equação de continuidade como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0\,, \tag{1}$$

onde ρ é a densidade. A equação do movimento seguinte expressa o Princípio de Conservação do Momento Linear aplicado a um fluido Newtoniano e traduz-se por

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\right] = \rho\,\mathbf{f} - \nabla p + \nabla(\lambda\,\operatorname{div}\mathbf{u}) + \mathbf{div}\,(2\mu\,\mathbf{D})\,, \tag{2}$$

onde p é a pressão, λ e μ são funções que exprimem a viscosidade de corte e a viscosidade dinâmica, respectivamente, $\mathbf{f}$ é o campo de forças exteriores e

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T\right) \tag{3}$$

é o tensor das velocidades de deformação.

Quando consideramos o escoamento de um fluido governado por forças de impulsão como as causadas pelo aquecimento do fluido, temos de considerar uma equação para a temperatura θ. Esta equação traduz o Princípio de Conservação de Energia e, neste caso, escreve-se

$$\frac{\partial\,\mathcal{C}(\theta)}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla(\mathcal{C}(\theta)) = -p\,\mathrm{div}\mathbf{u} + \lambda(\mathrm{div}\mathbf{u})^2 + 2\mu\,|\mathbf{D}|^2 + \triangle\,\varphi(\theta)\,, \tag{4}$$

onde

$$\mathcal{C}(\theta) := \int_{\theta_0}^{\theta} c(s)\,ds \quad \text{e} \quad \varphi(\theta) := \int_{\theta_0}^{\theta} k(s)\,ds, \tag{5}$$

sendo c a função calor específico e k a função condutividade térmica.

Para muitos problemas de convecção, o sistema de equações formado por (1), (2) e (4) pode ser simplificado de forma considerável, se admitirmos que o fluido é isocórico, isto é:

(i) o fluido é como se fosse incompressível, excepto a densidade não é ignorada no termo de força $\mathbf{f}$ em (2);

(ii) as alterações de densidade são induzidas por mudanças na temperatura e concentração, mas não na pressão;

(iii) o gradiente de velocidade é suficientemente pequeno de tal modo que o efeito na temperatura de conversão de trabalho em calor pode ser ignorado.

Esta simplificação é conhecida na literatura como aproximação de Boussinesq (1903), apesar de anteriormente já ter sido considerada por Oberbeck (1891) (cf. [6]). Em termos práticos, permite-nos evitar o problema difícil associado com as equações compressíveis de Navier-Stokes, simplificando as equações que caracterizam o fluido. Na aproximação de Boussinesq de grande variedade de problemas, os parâmetros termodinâmicos tais como a viscosidade, condutividade térmica e calor específico podem se supor constantes (cf. [10]). Mais, se admitirmos que o fluido é homogéneo, isto é, $\rho = \rho_0 = const. > 0$, a aproximação de Boussinesq leva-nos às equações seguintes que descrevem o escoamento:

$$\mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0\,; \tag{6}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = \mathbf{f} - \nabla p + \nu\,\triangle\,\mathbf{u}\,, \tag{7}$$

onde renomeamos $p = p/\rho_0$ e $\nu = \mu/\rho_0$ é a viscosidade cinemática, constante neste caso;

$$\frac{\partial\,\theta}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\theta = \triangle\,\theta\,. \tag{8}$$

Contudo, existem alguns fluidos, como os lubrificantes ou alguns plasmas, para os quais isto já não é possível. Nestes casos, teremos de considerar o sistema de equações formado por (6), (7) com o termo $\nu\,\triangle\,\mathbf{u}$ substituído por $\mathbf{div}(2\nu\,\mathbf{D})$, e (4) com as simplificações decorrentes da aproximação de Boussinesq (cf. [9]).

As equações que descrevem o escoamento do fluido têm de ser complementadas com condições de fronteira, caracterizando o escoamento na fronteira do domínio ocupado pelo fluido, e por condições iniciais, que determinam o estado inicial do escoamento.

Quando as grandezas $\mathbf{u}$, p e θ não dependem explicitamente do tempo, o problema diz-se estacionário e as equações (7) e (8) podem ser simplificadas, fazendo desaparecer os termos com derivadas parciais em ordem ao tempo. O problema em que as grandezas dependem do tempo diz-se de evolução.

No caso de estarmos perante um escoamento com apenas duas componentes do campo de velocidades, digamos $u(x,y)$ e $v(x,y)$, o problema diz-se planar. Isto acontece sempre que é possível introduzir um sistema de coordenadas Cartesianas (x,y,z) tal que as quantidades que descrevem o escoamento são quase independentes da variável z e a componente de velocidade w na direcção z é desprezível. Obtém-se, assim, o modelo de escoamento planar onde o domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ocupado pelo fluido tem a forma de um cilindro $\omega \times (0,c)$, $\omega \subset \mathbb{R}^2$ e $c > 0$, com os eixos ortogonais ao plano (x,y). O escoamento tem o mesmo carácter em todos os planos ortogonais ao eixo z e a componente de velocidade w desaparece.

2 PROBLEMA ESTACIONÁRIO

2.1 Apresentação do problema

Consideremos o problema de Boussinesq estacionário para a velocidade $\mathbf{u} = (u,v)$, pressão p e temperatura θ,

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \mathbf{0}\,, \tag{9}$$

$$-\nu \triangle \mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = \mathbf{f} - \nabla p\,, \tag{10}$$

$$\mathbf{u}\cdot\nabla\,\theta = \triangle\,\theta\,, \tag{11}$$

numa faixa semi-infinita $\Omega = (0,\infty)\times(0,L)$, $L > 0$. Suponhamos que o campo de forças exteriores é uma função com memória sublinear tal que

$$-\mathbf{f}(\mathbf{x},\theta,\mathbf{u})\cdot\mathbf{u} \geq |u|^{\sigma(\theta)} \tag{12}$$

com

$$1 < \sigma^- \leq \sigma(\theta) \leq \sigma^+ < 2 \tag{13}$$

e que estamos a considerar baixos valores da temperatura, isto é,

$$\theta \in [m,M]\,, \quad 0 \leq m \leq M < \infty\,. \tag{14}$$

Observe-se que, no segundo membro de (12), temos apenas a primeira componente do campo de velocidades. Portanto, vamos considerar um escoamento planar estacionário de um fluido térmico, que ocupa o domínio Ω, é governado pelo sistema (9)-(11) com o campo de forças $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x},\theta,\mathbf{u})$ a satisfazer (12)-(13) e a temperatura a satisfazer (14). Estas equações são complementadas com as condições de fronteira para $\mathbf{u}$ e com a velocidade no infinito

$$\mathbf{u}(0,y) = \mathbf{u}_*(y) \quad \text{para } y \in (0,L), \tag{15}$$

$$\mathbf{u}(x,0) = \mathbf{u}(x,L) = \mathbf{0} \quad \text{para } x \in (0,\infty), \tag{16}$$

$$|\mathbf{u}(x,y)| \to 0 \quad \text{quando } x \to \infty \text{ e } \ y \in (0,L). \tag{17}$$

Consideramos, também, as condições de fronteira para θ e a temperatura no infinito

$$\theta = \theta_* \quad \text{em} \ \ x = 0,\ y = 0,\ L, \tag{18}$$

$$\theta(x,y) \to 0 \quad \text{quando } x \to \infty \text{ e } \ y \in (0,L). \tag{19}$$

Aqui, θ_* é uma função dada tal que

$$0 \leq m \leq \theta_*(x,y) \leq M < \infty. \tag{20}$$

Supomos que a velocidade $\mathbf{u}_* = (u_*, v_*)$ é dada e satisfaz as condições de compatibilidade

$$\int_0^L u_*(s)ds = 0\,, \tag{21}$$

$$\mathbf{u}_*(0) = \mathbf{u}_*(L) = \mathbf{0}\,, \tag{22}$$

assim como a temperatura θ_*

$$\theta_*(x,y) \to 0, \quad \text{quando } x \to \infty \text{ e } y = 0,\ L. \tag{23}$$

2.2 Formulação fraca

As notações que aqui utilizamos são as habituais em Teoria Matemática da Mecânica dos Fluidos (ver, por exemplo, [5]). Observamos, apenas, que as notações a negrito indicam vectores ou espaços de vectores para os distinguir dos escalares.

Vamos procurar soluções $(\theta, \mathbf{u})$ tais que, adicionalmente às hipóteses (17) e (19), satisfazem

$$\int_\Omega |\nabla\theta|^2 d\mathbf{x} < \infty \qquad \text{e} \qquad \int_\Omega |\nabla\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} < \infty.$$

Mais ainda, devido ao facto da Desigualdade de Poincaré

$$\int_\Omega |u|^p\, d\mathbf{x} \leq C \int_\Omega |\nabla u|^p\, d\mathbf{x}, \quad C = C(p,L), \tag{24}$$

ser válida para todo $u \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$, a nossa solução $(\theta, \mathbf{u})$ será um elemento do espaço produto de Sobolev $\mathrm{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega)$.

De modo a definirmos o que entendemos por solução fraca do problema estacionário, consideramos os espaços solenoidais seguintes:

$$\widetilde{\mathbf{H}}(\Omega)=\Big\{\mathbf{u}\in\mathbf{H}(\Omega):\mathbf{u}(0,.)=\mathbf{u}_*(.),\ \mathbf{u}(.,0)=\mathbf{u}(.,L)=\mathbf{0},\ \lim_{x\to\infty}|\mathbf{u}|=0\Big\}\ ;$$

$$\widetilde{\mathbf{H}}_0(\Omega)=\Big\{\mathbf{u}\in\mathbf{H}(\Omega):\mathbf{u}(0,.)=\mathbf{u}(.,0)=\mathbf{u}(.,L)=\mathbf{0},\ \lim_{x\to\infty}|\mathbf{u}|=0\Big\}\ ;$$

onde

$$\mathbf{H}(\Omega)=\big\{\mathbf{u}\in\mathbf{H}^1(\Omega):\mathrm{div}\mathbf{u}=0\big\}\,.$$

Denotemos, ainda, por $\mathbf{u}_*$ e θ_* as extensões dos dados na fronteira a todo o domínio Ω de modo que

$$\mathbf{u}_*\in\widetilde{\mathbf{H}}(\Omega)\quad\text{e}\quad\theta_*\in\mathrm{H}^1(\Omega)\cap\mathrm{C}^\alpha(\overline{\Omega})\quad\text{para algum } \alpha>0.$$

Definição 2.2.1 *O par $(\theta,\mathbf{u})$ diz-se uma solução fraca do problema (9)-(23), se:*
(i) $\theta-\theta_*\in\mathrm{H}^1(\Omega)\cap\mathrm{C}^\alpha(\overline{\Omega})$ para algum $\alpha>0$, $m\le\theta\le M$ e para toda a função de teste $\zeta\in\mathrm{H}^1_0(\Omega)$

$$\int_\Omega(\nabla\theta-\theta\,\mathbf{u})\cdot\nabla\zeta\,d\mathbf{x}=0.$$

(ii) $\mathbf{u}\in\widetilde{\mathbf{H}}(\Omega)$, $\mathbf{u}-\mathbf{u}_*\in\widetilde{\mathbf{H}}_0(\Omega)$, $\mathbf{f}(\mathbf{x},\theta,\mathbf{u})\in\mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ e para todo $\varphi\in\widetilde{\mathbf{H}}_0(\Omega)\cap\mathbf{L}^\infty(\Omega)$ com suporte compacto,

$$\nu\int_\Omega\nabla\mathbf{u}:\nabla\varphi\,d\mathbf{x}+\int_\Omega\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\cdot\varphi\,d\mathbf{x}=\int_\Omega\mathbf{f}\cdot\varphi\,d\mathbf{x}.$$

Nesta subsecção, supomos que $\mathbf{f}:\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ é dada por

$$\mathbf{f}(\mathbf{x},\theta,\mathbf{u})=-(|u|^{\sigma(\theta)}u,0)-\mathbf{h}(\mathbf{x},\theta,\mathbf{u}),\tag{25}$$

para todo $\mathbf{u}\in\mathbb{R}$, $\theta\in[m,M]$, quase todo $\mathbf{x}\in\Omega$, e σ satisfaz a (13). Aqui, $\mathbf{h}(\mathbf{x},\theta,\mathbf{u})$ é uma função (de Charathéodory) tal que

$$\mathbf{h}(\mathbf{x},\theta,\mathbf{u})\cdot\mathbf{u}\ge 0\,,\tag{26}$$

para todos $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^2$, $\theta\in[m,M]$ e quase todo $\mathbf{x}\in\Omega$. Mais ainda, supomos que

$$H_K\in\mathrm{L}^1(\Omega)\text{ para todo } K>0,\quad H_K(\mathbf{x})=\sup_{|\mathbf{u}|\le K,\ \theta\in[m,M]}|\mathbf{h}(\mathbf{x},\theta,\mathbf{u})|\tag{27}$$

e que uma das condições seguintes é satisfeita:

(i) existem constante positivas M, C, uma função $G\in\mathrm{L}^p(\Omega\times\mathbb{R})$, $p>1$, e $s\in(0,1)$, tal que

$$|\mathbf{h}(\mathbf{x},\theta,\mathbf{u})|\le C\,|\mathbf{u}|^s+G(\mathbf{x},\theta),\tag{28}$$

para todo $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$, $\theta \in [m, M]$ e quase todo $\mathbf{x} \in \Omega$; ou

(ii) existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$|\angle(\mathbf{h}(\mathbf{x}, \theta, \mathbf{u}), \mathbf{u})| \notin \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon, \frac{\pi}{2} + \varepsilon\right) \tag{29}$$

para todo $|\mathbf{u}| > K$, $\theta \in [m, M]$ e quase todo $\mathbf{x} \in \Omega$. Também admitimos que a hipótese de unicidade de solução fraca para o problema de Navier-Stokes estacionário é válida.

Teorema 2.2.1 ([3]) *Suponhamos que* $\mathbf{u}_* \in \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(0, L)$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \theta, \mathbf{u})$ *satisfaz (25)-(27) e admitamos que uma das condições (28) ou (29) é satisfeita. Então o problema (9)-(23), com* $\mathbf{f}$ *satisfazendo a (25)-(27), tem, pelo menos, uma solução fraca* $(\theta, \mathbf{u})$.

No caso particular de

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \theta, \mathbf{u}) = -(|u|^{\sigma(\theta)} u, 0),$$

prova-se que a solução acima é única (cf. [3, Theorem 4.1]). Novamente, por causa da não-linearidade das equações de Navier-Stokes, temos de supor que os dados estão relacionados de modo a garantir a unicidade da solução fraca. No caso mais geral de (25), também podemos provar a unicidade de solução se supusermos que

$$(\mathbf{f}(\mathbf{x}, \theta, \mathbf{u}_1) - \mathbf{f}(\mathbf{x}, \theta, \mathbf{u}_2)) \cdot (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \leq 0$$

para todos $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2 \in \mathbb{R}^2$, $\theta \in [m, M]$ e quase todo $\mathbf{x} \in \Omega$. A demonstração deste resultado conjuga as demonstrações dos resultados de unicidade de [1, 2, 3].

2.3 Efeitos de localização

Nesta subsecção estudamos o denominado efeito de localização para a velocidade $\mathbf{u}$ associada ao problema (9)-(23). Verifica-se que as propriedades qualitativas de $\mathbf{u}$ são independentes da temperatura θ. Deste modo, se não estivermos interessados em saber a dimensão do suporte de $\mathbf{u}$, mas apenas em saber que o suporte de $\mathbf{u}$ é um subconjunto compacto de Ω, podemos supor que θ é dada. Assim, o nosso problema simplifica-se e, por conseguinte, não temos de considerar a equação da temperatura (11). Então, dada θ tal que

$$\theta \in \mathrm{L}^\infty(\Omega), \quad \theta(\mathbf{x}) \in [m, M] \text{ para quase todo } \mathbf{x} \in \Omega, \tag{30}$$

consideramos o problema auxiliar seguinte

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{em } \Omega, \tag{31}$$

$$-\nu \triangle \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \theta, \mathbf{u}) - \nabla p \quad \text{em } \Omega, \tag{32}$$

$$\mathbf{u}(0, y) = \mathbf{u}_*(y) \quad \text{para } y \in (0, L), \tag{33}$$

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}(x, L) = \mathbf{0} \quad \text{para } x \in (0, \infty), \tag{34}$$

$$|\mathbf{u}(x,y)| \to 0 \quad \text{quando } x \to \infty \text{ e } \; y \in (0,L)\,, \tag{35}$$

onde o campo de forças satisfaz a (12)-(13). Na demonstração do Teorema 2.2.1 (ver [3, Theorem 3.1]) estabelece-se a existência de uma solução fraca $\mathbf{u}$ com energia global finita

$$E := \int_\Omega \left(|\nabla \mathbf{u}|^2 + |u|^{\sigma(\theta)}\right)\, d\mathbf{x}\,. \tag{36}$$

Teorema 2.3.1 ([3]) *Suponhamos que* $\mathbf{f}$ *satisfaz a (12)-(13) e* $\mathbf{u}$ *é uma solução fraca qualquer do problema (31)-(35), com energia global (36) finita, e onde* θ *é dada por (30). Então,* $\mathbf{u}(x,y) = \mathbf{0}$ *para* $x > a'$*, onde* $a' = a'(E, L, \nu, \sigma^{\pm})$ *é uma constante positiva.*

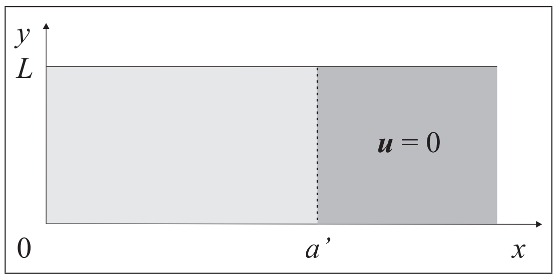

Figura 1: Efeito de localização.

Para demonstrar este teorema (cf. [3, Theorem 4.1]), introduzimos a função de corrente ψ definida por:

$$u = \psi_y \quad \text{e} \quad v = -\psi_x \quad \text{em } \Omega\,;$$

e reduzimos (31)-(35) a um problema não-linear de quarta ordem para a função de corrente, onde a pressão p já não aparece

$$\nu \triangle^2 \psi + \tfrac{\partial f_1}{\partial y} - \tfrac{\partial f_2}{\partial x} = \psi_y \triangle \psi_x - \psi_x \triangle \psi_y \quad \text{em } \Omega, \tag{37}$$

$$\psi(x,0) = \psi(x,L) = \tfrac{\partial \psi}{\partial n}(x,0) = \tfrac{\partial \psi}{\partial n}(x,L) = 0 \quad \text{para } x \in (0,\infty), \tag{38}$$

$$\psi(0,y) = \textstyle\int_0^y u_*(s)ds, \;\; \tfrac{\partial \psi}{\partial n}(0,y) = v_*(y) \quad \text{para } y \in (0,L), \tag{39}$$

$$\psi(x,y),\; |\nabla \psi(x,y)| \to 0, \text{ quando } x \to \infty \quad \text{e para } y \in (0,L). \tag{40}$$

Aqui $\mathbf{f} = (f_1, f_2) = (f_1(\mathbf{x}, \theta, \psi_y, -\psi_x), f_2(\mathbf{x}, \theta, \psi_y, -\psi_x))$ e recordamos que θ se supõe dada. O feito de localização obtém-se aplicando os denominados métodos de energia ao problema (37)-(40) (cf. [4]) em semi-planos variáveis na direcção do eixo dos xx.

Observação 2.3.1 *O efeito de localização anterior para a velocidade* $\mathbf{u} = (u, v)$ *também pode ser demonstrado, se substituirmos (12) pela condição mais geral*

$$-\mathbf{f}(\mathbf{x}, \theta, \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} \geq \delta\, |u|^{\sigma} - g(\mathbf{x})\,, \tag{41}$$

para alguma constante $\delta > 0$, com σ satisfazendo a (13), e alguma função

$$g \in \mathrm{L}^1\left(\Omega^{x_g}\right), \quad g \geq 0, \quad g(\mathbf{x}) = 0 \ \text{ por quase toda a parte de } \ \Omega_{x_g}, \tag{42}$$

onde $\Omega^{x_g} = (0, x_g) \times (0, L)$ e $\Omega_{x_g} = (x_g, \infty) \times (0, L)$, com $0 \leq x_g < \infty$. Do ponto de vista da Física, isto corresponde a dizer que $\mathbf{f}$ tem um comportamento com memória sublinear na direcção do eixo dos xx e dissipativo na direcção do eixo dos yy (ver [8]). Este resultado pode ser generalizado para um campo de forças localizado, isto é, um campo de forças que actua apenas até uma distância finita, suposta suficientemente pequena, da entrada da semi-faixa:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \theta, \mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad \text{para} \quad x \geq x_{\mathbf{f}} \quad \text{e} \quad y \in (0, L),$$

para algum $x_{\mathbf{f}}$ tal que $0 \leq x_g \leq x_{\mathbf{f}}$ (x_g dado em (42)). Neste caso, (41) é substituída por

$$-\mathbf{f}(\mathbf{x}, \theta, \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} \geq \delta \, \chi_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \, |u|^{\sigma} - g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{u} = (u, v),$$

σ satisfaz a (13) e $\chi_{\mathbf{f}}$ é a função característica do intervalo $(0, x_{\mathbf{f}})$ (ver [3, 8]).

Observação 2.3.2 *Podemos, ainda, admitir que, em vez de (12), se tem (41) com $g \equiv 0$ e supor que*

$$|f_2(\mathbf{x}, \theta, \mathbf{u})| \leq \gamma (x_s - x)_+^{\zeta}$$

para algum $x_s > 0$, onde γ e ζ são constantes positivas cuja existência se demonstra. Devido a esta última condição, dizemos que a segunda componente do campo de forças $\mathbf{f}$ tem uma linha de estagnação em $x = x_s$. Neste caso, prova-se que $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ para todo $x \geq x_s$ e qualquer $y \in (0, L)$ (ver [2, 3, 8]). Do ponto de vista da Física, a propriedade de localização expressa na afirmação anterior, significa que o escoamento pára exactamente na mesma linha de estagnação que a segunda componente do campo de forças.

Observação 2.3.3 *Todos os resultados de localização aqui enunciados podem ser demonstrados para faixas não constante, isto é, $\Omega = (0, \infty) \times (L_1(x), L_2(x))$, com L_1, $L_2 \in \mathrm{C}^2(0, \infty)$, $k_1 \leq |L_2(x) - L_1(x)| \leq k_2$, $|L_1'(x)|$, $|L_2'(x)| \leq k_3$, e $|L_1''(x)|$, $|L_2''(x)| \leq k_4$ para todo $x \geq 0$, onde k_i, $i = 1, \ldots, 4$, são constantes positivas (ver [1]).*

Observação 2.3.4 *Os efeitos de localização acima são, ainda, válidos no caso limite $\sigma(\theta) \equiv 1$. Mas, no caso $\sigma(\theta) \equiv 2$, conseguimos apenas derivar, para a velocidade e quando $x \to \infty$, um decrescimento de tipo exponencial. Esta propriedade está relacionada com o Princípio de St. Venant em Teoria da Elasticidade Planar (ver [7, 11]).*

Um problema mais difícil, mas, no entanto, muito interessante do ponto de vista das aplicações é aquele em que a viscosidade ν é uma função da temperatura θ. Nesta situação, a equação do movimento (32) é substituída por

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \mathrm{div}\ (2\nu(\theta)\mathbf{D}) - \nabla p + \mathbf{f}(\mathbf{x}, \theta, \mathbf{u}), \tag{43}$$

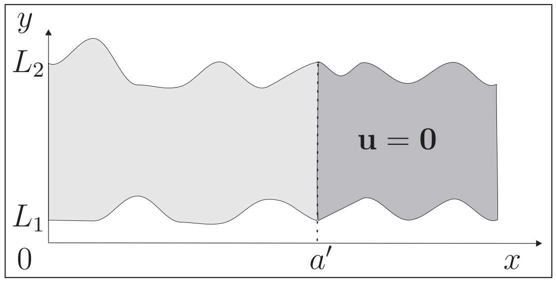

Figura 2: Faixa semi-infinita não constante.

onde $\mathbf{D}$ é o tensor das velocidades de deformação (3). Aqui, necessitamos de uma hipótese extra sobre a viscosidade

$$0 < \nu^- \leq \nu(\theta) \leq \nu^+ < \infty,$$

para algumas constantes ν^- e ν^+. Preocupe-mo-nos apenas com as propriedades de localização das soluções deste novo problema e não com as questões de existência e unicidade que, apesar de se poderem demonstrar, são mais complicadas. Supomos, por isso, que existe, pelo menos, uma solução fraca deste novo prolema com energia global (36) finita. Prova-se que, para o problema dado por (9), (43) e (11)-(23), os efeitos de localização descritos acima são verificados (ver [3, 8]).

Os resultados desta subsecção permitem-nos mostrar que, quer a viscosidade dependa da temperatura ou não, obtemos $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ para quase todo $x > a'$, onde a' é uma constante bem determinada. Assim, em ambos os casos, o sistema de Boussinesq simplifica-se bastante:

$$\triangle\theta = 0 \quad \text{in } \Omega_{a'} = (a', \infty) \times (0, L),$$
$$\theta = \theta_* \quad \text{em } y = 0,\, L,$$
$$\theta(x, y) \to 0 \quad \text{as } x \to \infty \text{ e } \; y \in (0, L)\,;$$

com uma temperatura θ desconhecida em $x = a'$. Prova-se que, depois do escoamento parar, a temperatura θ do fluido tem um decrescimento de tipo exponencial quando $x \to \infty$ (ver [8]).

3 PROBLEMA DE EVOLUÇÃO

3.1 Apresentação do problema

Consideremos, agora, o problema de Boussinesq evolutivo seguinte

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \mathbf{0}\,, \tag{44}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \mathbf{f} - \nabla p + \nu \triangle \mathbf{u}\,, \tag{45}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\theta = \triangle \theta\,, \tag{46}$$

no domínio $Q_T = \Omega \times (0, T)$, onde $\Omega = (0, \infty) \times (0, L)$, $L = const. > 0$ e $0 < T \leq \infty$, para baixos valores da temperatura

$$\theta \in [m, M]\,, \quad 0 \leq m \leq M < \infty \tag{47}$$

e onde o campo de forças satisfaz

$$-\mathbf{f}(\mathbf{x}, t, \theta, \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} \geq |u|^{\sigma(\theta)}\,, \quad 1 < \sigma^- \leq \sigma(\theta) \leq \sigma^+ < 2\,. \tag{48}$$

O sistema (44)-(48) é complementado com as condições inicial e de fronteira para a velocidade $\mathbf{u}$, respectivamente,

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Omega,\ t = 0\,, \tag{49}$$

$$\mathbf{u}(0, y, t) = \mathbf{0},\ y \in (0, L),\ t \in (0, T), \tag{50}$$

$$\mathbf{u}(x, 0, t) = \mathbf{u}(x, L, t) = \mathbf{0},\ x \in (0, \infty),\ t \in (0, T), \tag{51}$$

e com a velocidade no infinito

$$\mathbf{u}(x, y, t) \to \mathbf{0},\ \text{quando } x \to \infty \text{ e } \ y \in (0, L),\ t \in (0, T). \tag{52}$$

Consideramos, também, as condições de fronteira para θ e a temperatura no infinito

$$\theta = \theta_0 \quad \text{em } \Omega \ \text{ e para } \ t = 0\,, \tag{53}$$

$$\theta = \theta_* \quad \text{em } \ x = 0,\ y = 0,\ L, \quad t \in (0, T) \tag{54}$$

$$\theta(x, y, t) \to 0 \quad \text{quando } x \to \infty \text{ e } \ y \in (0, L),\ t \in (0, T). \tag{55}$$

De igual modo como no caso estacionário, θ_* é uma função dada tal que

$$0 \leq m \leq \theta_*(x, y, t) \leq M < \infty. \tag{56}$$

Supomos que a temperatura θ_* satisfaz as condições de compatibilidade

$$\theta_*(x, y, 0) = \theta_0(x, y) \quad \text{em } \ x = 0,\ y = 0,\ L \quad \text{e quando } x \to \infty\,, \tag{57}$$

$$\theta_*(x, y, t) \to 0, \quad \text{quando } x \to \infty \text{ e } y = 0,\ L,\ t \in [0, T)\,. \tag{58}$$

3.2 Formulação fraca

Quanto à formulação fraca deste problema, vamos procurar soluções tais que, adicionalmente a (52) e a (55), satisfazem para todo $t \in (0, T)$

$$\int_0^t \int_\Omega |\nabla \mathbf{u}|^2\, d\mathbf{x}\, ds < \infty \qquad \text{e} \qquad \int_0^t \int_\Omega |\nabla \theta|^2\, d\mathbf{x}\, ds < \infty\,.$$

Pelo facto da Desigualdade de Poincaré (24) ser válida, a solução $(\theta, \mathbf{u})$ vai ser um elemento do espaço produto de Bochner $\mathrm{L}^2(0, T; \mathrm{H}^1(\Omega)) \times \mathrm{L}^2(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega))$. Para a definição de solução fraca, recuperamos os espaços solenoidais $\mathbf{H}(\Omega)$ e $\widetilde{\mathbf{H}}_0(\Omega)$ introduzidos na Secção anterior.

Definição 3.2.1 *O par $(\theta, \mathbf{u})$ diz-se uma solução fraca do problema (44)-(58), se:*

1. *$\theta - \theta_* \in \mathrm{L}^2(0,T;\mathrm{H}^1(\Omega)\cap \mathrm{C}^\alpha(\overline{\Omega}))$ para algum $\alpha > 0$, $m \le \theta \le M$ e para qualquer função de teste $\zeta \in \mathrm{C}^1(0,T;\mathrm{H}^1_0(\Omega))\cap \mathrm{L}^2(0,T;\mathrm{L}^\infty(\Omega))$*

$$\int_\Omega \theta(\cdot,t)\zeta\, d\mathbf{x} - \int_0^t\int_\Omega \theta\,\zeta_s\, d\mathbf{x}\, ds + \int_0^t\int_\Omega (\nabla\theta - \theta\,\mathbf{u})\cdot\nabla\zeta\, d\mathbf{x}\, ds = \int_\Omega \theta_0\zeta_0\, d\mathbf{x}$$

para todo $t \in [0,T)$;

2. *(i) $\mathbf{u} \in \mathrm{L}^2(0,T;\widetilde{\mathbf{H}}_0(\Omega))\cap \mathrm{L}^\infty(0,T;\widetilde{\mathbf{H}}_0(\Omega))$, $\mathbf{u}_t \in \mathrm{L}^2(0,T;\widetilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega))$ e $\mathbf{f}(\mathbf{x},t,\theta,\mathbf{u}) \in \mathrm{L}^2(0,T;\mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega))$;*
(ii) $\|\mathbf{u}(\mathbf{x},t)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \to 0$, quando $t \to 0$;
(iii) Para qualquer $\varphi \in \mathrm{C}^1(0,T;\widetilde{\mathbf{H}}_0(\Omega))\cap \mathrm{L}^2(0,T;\mathbf{L}^\infty(\Omega))$ com suporte compacto em Q_T

$$\int_\Omega \mathbf{u}(\cdot,t)\cdot\varphi\, d\mathbf{x} - \int_0^t\int_\Omega \mathbf{u}\cdot\varphi_s\, d\mathbf{x}\, ds + \nu\int_0^t\int_\Omega \nabla\mathbf{u} : \nabla\varphi\, d\mathbf{x}\, ds$$
$$+\int_0^t\int_\Omega \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\cdot\varphi\, d\mathbf{x}\, ds = \int_0^t\int_\Omega \mathbf{f}\cdot\varphi\, d\mathbf{x}\, ds + \int_\Omega \mathbf{u}_0\cdot\varphi_0\, d\mathbf{x},$$

para todo $t \in [0,T)$.

Para provar a existência de uma solução fraca, supõe-se que o campo de forças é dado por $\mathbf{f} : Q_T \times \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{f}(\mathbf{x},t,\theta,\mathbf{u}) = (f_1(\mathbf{x},t,\theta,\mathbf{u}), f_2(\mathbf{x},t,\theta,\mathbf{u}))$, com

$$\mathbf{f}(\mathbf{x},t,\theta,\mathbf{u}) = -(|u|^{\sigma(\theta)}u, 0) - \mathbf{h}(\mathbf{x},t,\theta,\mathbf{u}), \quad 1 < \sigma^- \le \sigma(\theta) \le \sigma^+ < 2\,.$$

para alguma função (de Carathéodory) $\mathbf{h}(\mathbf{x},t,\theta,\mathbf{u})$ tal que

$$\mathbf{h}(\mathbf{x},t,\theta,\mathbf{u})\cdot\mathbf{u} \ge 0$$

para todo $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$, $\theta \in [m,M]$ e quase todo $(\mathbf{x},t) \in Q_T$. A demonstração do resultado de existência de solução fraca pode ser obtida usando uma semi-discretização no tempo, convertendo o problema evolutivo num estacionário para o qual podemos usar os resultados da Secção anterior. Este procedimento permite-nos construir uma sucessão de soluções aproximadas da qual podemos extrair uma subsucessão que converge fracamente para uma solução fraca do problema original. Mais ainda, se admitirmos que a condição seguinte

$$(\mathbf{f}(\mathbf{x},t,\theta,\mathbf{u}_1) - \mathbf{f}(\mathbf{x},t,\theta,\mathbf{u}_2))\cdot(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \le 0$$

é verificada para todos $\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2 \in \mathbb{R}^2$, $\theta \in [m,M]$ e quase todo $(\mathbf{x},t) \in Q_T$, pode-se provar que a solução é única.

3.3 Efeitos de Localização

Relativamente à questão de estender os efeitos de localização do problema estacionário ao problema evolutivo, ainda está em aberto. No entanto, já é possível provar um outro efeito de localização. Este efeito só ocorre em problemas de evolução e denominá-mo-lo efeito de localização no tempo. O efeito de localização provado no problema estacionário e que em alguns problemas de evolução também se pode mostrar, denominamos por efeito de localização no espaço. Tal como no problema estacionário, as propriedades qualitativas da velocidade $\mathbf{u}$ são independentes da temperatura θ. Daí, admitimos θ dada tal que

$$\theta \in \mathrm{L}^2(0,T;\mathrm{L}^\infty(\Omega)), \quad \theta(\mathbf{x},t) \in [m,M] \text{ para quase todo } (\mathbf{x},t) \in Q_T. \tag{59}$$

Então, podemos considerar o problema auxiliar seguinte

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{em } Q_T, \tag{60}$$

$$\mathbf{u}_t - \nu \triangle \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{x},t,\theta,\mathbf{u}) - \nabla p \quad \text{em } Q_t, \tag{61}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},0) = \mathbf{0} \quad \text{para } \mathbf{x} \in \Omega\,, \tag{62}$$

$$\mathbf{u}(0,y,t) = \mathbf{0} \quad \text{para } y \in (0,L),\ t \in (0,T)\,, \tag{63}$$

$$\mathbf{u}(x,0,t) = \mathbf{u}(x,L,t) = \mathbf{0} \quad \text{para } x \in (0,\infty) \ \text{ e } \ t \in (0,T)\,, \tag{64}$$

$$|\mathbf{u}(x,y,t)| \to 0 \quad \text{quando } x \to \infty\,,\ y \in (0,L) \ \text{ e } \ t \in (0,T) \tag{65}$$

onde o campo de forças satisfaz a (48). Prova-se que, se $\mathbf{u}$ é uma solução fraca qualquer do problema (60)-(65), então a energia seguinte é finita para quase todo $t \in (0,T)$

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x}\,. \tag{66}$$

Teorema 3.3.1 *Suponhamos que* $\mathbf{f}$ *satisfaz (48) e seja* $\mathbf{u}$ *uma solução fraca qualquer do problema (60)-(65), com energia (66) finita. Então, existe* $t^* \in (0,T)$ *tal que*

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \textit{para todo } t \in [t^*,T) \quad \textit{e} \quad \textit{para quase todo } \mathbf{x} \in \Omega. \tag{67}$$

Para demonstrar este efeito de localização, introduzimos a função de corrente $\psi(\mathbf{x},t)$

$$u = \psi_y \qquad \text{e} \qquad v = -\psi_x \quad \text{em} \quad Q_T$$

e reduzimos (60)-(65) a um problema evolutivo não-linear de quarta ordem para a função de corrente, onde a pressão p já não aparece,

$$-\triangle\psi_t + \nu\triangle^2\psi + \tfrac{\partial f_1}{\partial y} - \tfrac{\partial f_2}{\partial x} = \psi_y\triangle\psi_x - \psi_x\triangle\psi_y \quad \text{em } Q_T, \tag{68}$$

$$\psi(\mathbf{x},0) = 0 \quad \text{para } \mathbf{x} \in \Omega, \tag{69}$$

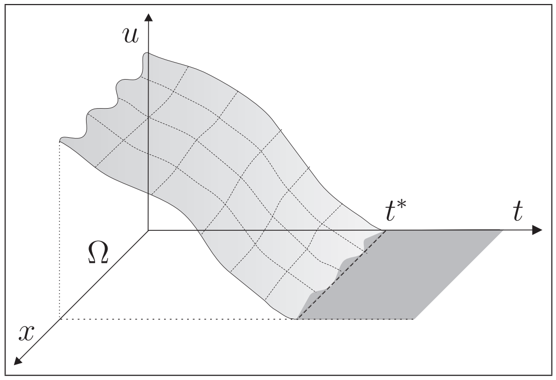

Figura 3: Efeito de localização no tempo.

$$\psi(x,0,t) = \psi(x,L,t) = 0 \quad \text{para } x \in (0,\infty)\,,\ t \in (0,T), \tag{70}$$

$$\tfrac{\partial}{\partial n}\psi(x,0,t) = \tfrac{\partial}{\partial n}\psi(x,L,t) = 0 \quad \text{para } x \in (0,\infty)\,,\ t \in (0,T), \tag{71}$$

$$\psi(0,y,t) = 0 \quad \text{para } y \in (0,L)\,,\ t \in (0,T), \tag{72}$$

$$\tfrac{\partial}{\partial n}\psi(0,y,t) = 0 \quad \text{para } y \in (0,L)\,,\ t \in (0,T), \tag{73}$$

$$\psi(\mathbf{x},t),\ |\nabla\psi(\mathbf{x},t)| \to 0, \quad \text{quando } x \to \infty \text{ e } y \in (0,L)\,,\ t \in (0,T), \tag{74}$$

e $\mathbf{f} = (f_1, f_2) = (f_1(\mathbf{x}, t, \theta, \psi_y, -\psi_x), f_2(\mathbf{x}, t, \theta, \psi_y, -\psi_x))$. Depois aplicamos os métodos de energia (cf. [4]) ao problema (68)-(74) e obtemos a desigualdade diferencial ordinária para a energia (66)

$$\frac{d}{d\,t}E(t) + C\,(E(t))^{\frac{1}{\mu}} \leq 0, \quad C = C(L,\nu,\sigma^{\pm}), \quad \mu = \mu(\sigma^{\pm}) > 1\,,$$

cuja integração explícita entre 0 e $t > 0$ nos permite concluir que $E(t) = 0$ para todo $t \geq t^*$, com t^* bem determinado.

Observação 3.3.1 *O teorema anterior também vale (ver [8]), se considerarmos uma faixa Ω finita, isto é, se $\Omega = (0,R) \times (0,L)$, $0 < L$, $R < \infty$. Neste caso, em vez de (52), consideramos*

$$\mathbf{u}(R,y,t) = \mathbf{0},\ y \in (0,L),\ t \in (0,T),$$

o que origina no problema reduzido (60)-(65) a substituição de (74) por

$$\psi(R,y,t) = \frac{\partial\psi}{\partial n}(R,y,t) = 0,\ y \in (0,L),\ t \in (0,T)\,.$$

Observação 3.3.2 *Este resultado ainda é válido (ver [8]) para qualquer subdomínio de $\mathbb{R}^2$ para o qual a Desigualdade de Poincaré (24) é válida e, em vez de (48), o campo de forças satisfaz, para todo $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$, $\theta \in \mathbb{R}$ e quase todo $(\mathbf{x},t) \in Q_T$*

$$-\mathbf{f}(\mathbf{x},t,\theta,\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} \geq |\mathbf{u}|^{\sigma}\,, \quad 1 < \sigma^- \leq \sigma(\theta) \leq \sigma^+ < 2\,.$$

Observe-se que, no segundo membro da inequação anterior, se têm as duas componentes do campo de velocidades.

REFERÊNCIAS

[1] S.N. Antontsev, J.I. Díaz and H.B. de Oliveira, "Stopping a viscous fluid by a feedback dissipative field: I. The stationary Stokes problem". *J. Math. Fluid Mech.*, **6** (2004), pp. 439-461.

[2] S.N. Antontsev, J.I. Díaz and H.B. de Oliveira, "Stopping a viscous fluid by a feedback dissipative field: I. The stationary Navier-Stokes problem". *Rend. Mat. Acc. Lincei*, s. 9, v. **15** (2004), pp. 257-270.

[3] S.N. Antontsev, J.I. Díaz and H.B. de Oliveira, "Stopping a viscous fluid by a feedback dissipative field: thermal effects without phase changing". *Trends in Partial Differential Equations of Mathematical Physics*, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications **61**, pp. 1-18, Birkhäuser, Basel, 2005.

[4] S.N. Antontsev, J.I. Díaz and S.I. Shamarev, *Energy Methods for Free Boundary Problems*. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications **48**, Birkhäuser, Boston, 2002.

[5] M. Feistauer, *Mathematical Methods in Fluid Mechanics*. Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics **67**, Longman Scientific & Technical, New York, 1993.

[6] D.D. Joseph, *Stability of Fluid Motions*. Springer Tracts in Natural Philosophy **28**, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1976.

[7] J.K. Knowles, "On Saint-Venant's Principle in the Two-Dimensional Linear Theory of Elasticity". *Arch. Ration. Mech. Anal.* **21** (1966), pp. 1-22.

[8] H.B. de Oliveira, *Localization of Solutions for Planar Navier-Stokes Equations*. Ph.D. Thesis, Universidade do Algarve, Faro, 2004.

[9] W.R. Schowalter, *Mechanics of Non-Newtonian Fluids*. Pergamon Press, Oxford, 1978.

[10] B. Straughan, *The Energy Method, Stability and Nonlinear Convection*. Applied Mathematical Sciences **91**, Springer-Verlag, New York, 1992.

[11] R.A. Toupin, "Saint-Venant's Principle". *Arch. Ration. Mech. Anal.* **18** (1965), pp. 83-96.

[12] C. Truesdell and W. Noll, "The Non-Linear Field Theories of Mechanics". *Handbuch der Physik - Encyclopedia of Physics*, Springer-Verlag, 1965.