

LOCALIZAÇÃO DE SOLUÇÕES FRACAS PARA ESCOAMENTOS DE FLUIDOS NÃO-NEWTONIANOS

S.N. Antontsev* e H.B. de Oliveira**

* Departamento de Matemática, Universidade da Beira Interior
Rua Marquês d'Ávila e Bolama, 6201-001 Covilhã, PORTUGAL
e-mail: anton@ubi.pt

** Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade do Algarve
Campus de Gambelas, 8005-139 Faro, PORTUGAL
e-mail: holivei@ualg.pt, web: <http://w3.ualg.pt/~holivei/>

Palavras-chave: Efeitos de localização, método de energia, fluidos não-Newtonianos, fluidos pseudo-plásticos, fluidos dilatantes, forças não-lineares dissipativas e com memória, glaciares.

Resumo. *Aplicamos um método de energia específico [13] para provar vários efeitos de localização das soluções (fracas) de sistemas de equações às derivadas parciais com valores iniciais e de fronteira apropriados e que modelam escoamentos de fluidos não-Newtonianos incompressíveis [18, 22]. São considerados escoamentos de fluidos pseudo-plásticos e dilatantes [13]. Para estes fluidos, são provadas propriedades de localização das soluções no tempo e no espaço, respectivamente. Introduzimos forças exteriores não-lineares dissipativas e com memória em modelos de escoamentos de fluidos não-Newtonianos não-homogéneos isotérmicos [13] e de fluidos Newtonianos homogéneos exotérmicos [11], ambos incompressíveis. Para os campos de velocidades, soluções dos problemas resultantes, estabelecemos propriedades de localização no espaço. Consideramos, também, um escoamento isotérmico de placas de gelo num glaciar de montanha [17] e provamos dois efeitos distintos de localização no tempo para a superfície livre do glaciar. Por fim, chamamos à atenção para o interesse em estudar todos estes modelos matemáticos do ponto de vista da Análise Numérica e, em particular, dos Métodos Computacionais.*

1. INTRODUÇÃO

Muitos dos modelos matemáticos actuais da Mecânica dos Meios Contínuos levam-nos a investigar sistemas de equações às derivadas parciais não-lineares de tipo misto. Em tais sistemas, as componentes do vector solução, tais como a velocidade, densidade, pressão, saturação, temperatura, *etc.*, podem satisfazer a equações de diferentes tipos: parabólico, hiperbólico e elíptico. As próprias soluções podem ter as propriedades de localização num tempo finito, velocidade finita de propagação a partir dos distúrbios dos dados iniciais, *etc.* Os métodos de comparação existentes para o estudo das propriedades de localização das soluções das equações não-lineares degeneradas não parecem ser aplicáveis a estes sistemas.

Convém distinguir os dois tipos fundamentais de propriedades de localização: no tempo e no espaço. Dizemos que a solução, digamos u , de um determinado problema tem a propriedade de localização no tempo, se existir um instante, digamos t^* , a partir do qual u estabiliza (num estado estacionário) num subconjunto do domínio considerado. A solução u tem a propriedade de localização no espaço, se existir um subconjunto onde u estabiliza até um dado instante.

Um método de energia para estudar as propriedades de localização das soluções dos sistemas anteriormente referidos, foi proposto em [1] e depois sistematizado e generalizado em [13]. A ideia deste método de energia, consiste em obter uma desigualdade diferencial ordinária para um determinado tipo de funções que designamos de energia. Em regra, estas funções saem de uma relação de energia que é obtida a partir dos princípios de conservação da Mecânica dos Meios Contínuos.

O método de energia aqui utilizado consiste essencialmente em três passos. No primeiro, multiplicamos a equação às derivadas parciais por uma solução (fraca) e integra-mo-la por partes sobre um subdomínio variável (em deslocamento). Isto leva-nos a obter integrais de energia mais alguns termos integrais sobre a fronteira do subdomínio. Por vezes, é útil multiplicar a equação também por um termo que irá cancelar alguns termos sobre a fronteira. Na maioria dos casos, o subdomínio a considerar é uma bola ou um semi-plano variável. A escolha deste subdomínio, está relacionada com a natureza do problema em consideração. Quando consideramos bolas, as condições de fronteira não têm de ser nulas, mas torna-se praticamente impraticável quando consideramos equações de ordem superior (maior do que dois), por causa dos termos sobre a fronteira que resultam da integração por partes. A escolha de semi-planos é mais fácil para o tratamento de equações de ordem superior, mas em contra-partida requer condições de fronteira de Dirichlet nulas. O segundo passo, consiste em utilizar desigualdades de interpolação relacionadas com as desigualdades de imersão de Sobolev. Estes dois passos dão-nos uma desigualdade diferencial ordinária satisfeita pelas energias naturais associadas ao problema. A variável independente desta desigualdade diferencial é exactamente a variável que faz o subdomínio deslocar-se. O terceiro passo consiste em deduzir, a partir desta desigualdade diferencial, algumas propriedades de localização das soluções dos problemas originais. Nos artigos [2, 3, 5, 6, 7, 8, 11, 12, 13] este método de energia foi aplicado ao estudo das propriedades das soluções de vários modelos matemáticos da Mecânica dos Meios Contínuos, incluindo alguns mais recentes tratados nos artigos [4, 16].

Neste trabalho, estudamos as propriedades de localização das soluções dos seguintes modelos matemáticos da Mecânica dos Meios Contínuos:

- escoamentos de fluidos pseudo-plásticos;
- escoamentos de fluidos dilatantes;
- escoamentos de fluidos com forças exteriores não-lineares dissipativas e com memória;
- escoamentos de glaciares.

É nossa intenção, não só apresentar os resultados de uma forma acessível aos leitores não familiarizados com o tratamento matemático dos modelos da Mecânica dos Fluidos, sem nunca descuidar o rigor científico, mas também mostrar algumas aplicações físicas destes resultados. Na maioria dos casos, as demonstrações dos teoremas enunciados serão remetidas para as referências bibliográficas. Mas nalgumas situações, os resultados são apresentados pela primeira vez e apenas é dada a ideia da demonstração que os autores pensam escrever em revistas da especialidade a breve trecho.

A notação aqui utilizada é habitual em literatura de Mecânica dos Fluidos e, em especial, naquela que faz o seu tratamento matemático. No entanto e sempre que for possível, iremos ter o cuidado de não sobrecarregar o texto com muita notação de Análise Funcional, que é o suporte matemático para fazer o estudo dos modelos aqui considerados. Para uma melhor compreensão da notação que irá ser usada do ponto de vista da Mecânica dos Fluidos, remetemos o leitor para [13, 15, 18, 22]. Já para a notação matemática específica, remetemos para [13, 15, 19, 20].

2. ESCOAMENTOS DE FLUIDOS NÃO-NEWTONIANOS NÃO-HOMOGÊNEOS

Seguindo [21, Secção 1.4], consideremos o escoamento de um fluido que, no instante t , ocupa um domínio Ω_t do espaço \mathbb{R}^3 . Por simplicidade de escrita e compreensão, admitamos que $\Omega_t = \Omega$ é independente do tempo. Na sua forma mais habitual, as equações que governam o escoamento dos fluidos correspondem à representação Euleriana e que consiste em descrever os campos de velocidades $\mathbf{u} = (u, v, w)$ de cada partícula do fluido a partir da sua posição, digamos $\mathbf{x} = (x, y, z)$, que ocupa no instante t . Ao contrário, a representação Lagrangiana consiste em descrever a trajectória de cada partícula do fluido no instante t a partir da sua posição inicial, digamos $\mathbf{a} = (a, b, c)$. As equações que governam o escoamento dos fluidos são derivadas tendo por base três princípios físicos fundamentais: conservação da massa, conservação do momento linear e conservação da energia. A equação de continuidade que expressa o Princípio de Conservação de Massa, lê-se

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (2.1)$$

onde $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ é a densidade do fluido e $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ é o campo de velocidades. A equação do movimento (de Navier-Stokes) que expressa o Princípio de Conservação do Momento Linear, lê-se

$$\rho \gamma \equiv \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} \equiv \rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = \rho \mathbf{f} + \operatorname{div} \mathbf{S}, \quad (2.2)$$

onde $\gamma = \gamma(\mathbf{x}, t)$ é a aceleração, $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ representa as forças de volume externas aplicadas ao fluido e \mathbf{S} é o tensor das tensões (de Cauchy). A equação de energia que expressa o Princípio de Conservação de Energia, lê-se

$$\frac{d(\rho e)}{dt} + \rho e \operatorname{div} \mathbf{u} \equiv \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho e \mathbf{u}) = \mathbf{S} : \mathbf{D} + \operatorname{div}(k \nabla \theta), \quad (2.3)$$

onde e é a energia interna específica (por unidade de massa), θ é a temperatura (absoluta), $k \geq 0$ é uma função escalar chamada condutividade térmica, que na maioria dos casos é tomada simplesmente com uma constante, e \mathbf{D} é o tensor das velocidades de deformação

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T). \quad (2.4)$$

Se o volume de qualquer parte do fluido permanece constante durante o escoamento, diz-se que o fluido é incompressível, o que é expresso por

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (2.5)$$

Neste caso, as equações (2.1)-(2.3) poderão ser simplificadas eliminando os termos contendo $\operatorname{div} \mathbf{u}$ e a equação de energia (2.3) é resolvida separadamente depois de se terem encontrado a velocidade e a pressão. Para os denominados fluidos Newtonianos incompressíveis, o tensor das tensões obedece à Lei de Stokes

$$\mathbf{S} = -p \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D}, \quad (2.6)$$

onde $p(\mathbf{x}, t)$ é a pressão (mecânica) do fluido, μ é uma função escalar da temperatura θ satisfazendo a $\mu \geq 0$. No caso dos fluidos não-Newtonianos incompressíveis, o tensor das tensões é dado por

$$\mathbf{S} = -p \mathbf{I} + \mathbf{F}(\mathbf{D}, \rho, \theta), \quad (2.7)$$

onde \mathbf{F} é função não linear de \mathbf{D} . Muitas relações constitutivas têm sido sugeridas de modo a captar as características dos fluidos não-Newtonianos, incompressíveis ou não (veja-se [18, 22]). Mas aqui, consideramos o caso em que o tensor simétrico \mathbf{F} satisfaz a

$$\delta |\mathbf{D}|^p \leq \mathbf{F}(\mathbf{D}) : \mathbf{D}, \quad 1 \leq p < \infty, \quad p \neq 2, \quad 0 < \delta = \delta(\rho, \theta) < \infty. \quad (2.8)$$

Os fluidos que satisfazem (2.8) são chamados dilatantes se $p > 2$ e pseudo-plásticos se $p < 2$.

Apesar do interesse das aplicações físicas destas equações se restringir apenas aos casos das dimensões $N = 2$ e $N = 3$, em termos puramente matemáticos poderemos considerar uma dimensão arbitrária $N \geq 2$. Neste sentido, sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ contínua no sentido de Lipschitz e $Q_T = \Omega \times [0, T]$ um cilindro de altura $T \in \mathbb{R}^+$. Depois de simplificarmos (2.1), (2.2), (2.5), (2.7), obtemos o seguinte sistema de equações em Q_T

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (2.9)$$

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \operatorname{div} \mathbf{F}. \quad (2.10)$$

Dotamos o sistema (2.9)-(2.10) com as seguintes condições iniciais e de fronteira

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \rho(\mathbf{x}, 0) = \rho_0(\mathbf{x}), \quad \text{para } \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.11)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} \quad \text{para } (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_T = \partial\Omega \times (0, T). \quad (2.12)$$

São conhecidos resultados de existência de soluções (fracas), em todo o tempo, para os problemas de escoamento de fluidos não-homogêneos governados por (2.9)-(2.12) e com diferentes relações (2.8) (veja-se [13, p. 229] e os artigos lá referidos). No estudo que aqui iremos desenvolver, vamos admitir a existência de, pelo menos, uma solução (fraca) para cada problema em questão e analisar as suas propriedades de localização via o método de energia referido na Secção 1.

3. LOCALIZAÇÃO NO TEMPO PARA FLUIDOS PSEUDO-PLÁSTICOS

Nesta secção, consideramos o escoamento de fluidos pseudo-plásticos governados pelas equações (2.9)-(2.12) com $1 \leq p < 2$ e assumimos que

$$E_0 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho_0 |\mathbf{u}_0|^2 d\mathbf{x} < 2, \quad \frac{1}{M} \leq \rho_0 \leq M. \quad (3.1)$$

Teorema 3.1 *Seja (\mathbf{u}, ρ, p) uma solução (fraca) do problema (2.9)-(2.12) e admitamos que (2.8) é verificada com $\delta = \text{const.}$ e $p \in (2N/(N+2), 2)$.*

1. *Se $\mathbf{f} = \mathbf{0}$, então*

$$2E(t) = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) |\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|^2 d\mathbf{x} = 0 \quad \text{para } t \geq t^* = t^*(E_0, \delta, M, N, \Omega, p).$$

2. *Se $\mathbf{f} \neq \mathbf{0}$ e satisfaz*

$$\|\mathbf{f}(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^{r'}(\Omega)}^{p'} \leq \varepsilon (t_{\mathbf{f}} - t)_+^{\frac{p}{2-p}} \quad (3.2)$$

para uma constante $\varepsilon > 0$, $t^ < t_{\mathbf{f}} < T$ e t^* apropriado, onde ainda $u_+ = \max(0, u)$, $p' = p/(p-1)$ e $r' = r/(r-1)$, $r \leq Np/(N-p)$. Então, existem constantes $\varepsilon^* > 0$ e $C > 0$ tais que, se $\varepsilon \leq \varepsilon^*$,*

$$\frac{1}{2M} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \leq E(t) \leq C (t_{\mathbf{f}} - t)_+^{\frac{p}{2-p}} \quad (3.3)$$

e $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$ em $Q_T \cap \{t \geq t_{\mathbf{f}}\}$.

A demonstração deste teorema pode ser facilmente adaptada daquela que é dada em [13, p. 230] e o sentido mecânico das suas asserções é, respectivamente, o seguinte.

1. Se o escoamento de um fluido pseudo-plástico é gerado pelos dados iniciais, então o fluido imobiliza-se num tempo finito.
2. Se o escoamento é gerado por uma fonte linear não-nula, mas que se anula no instante $t_{\mathbf{f}}$, então o fluido imobiliza-se para todo $t \geq t_{\mathbf{f}}$, desde que a intensidade da fonte seja suficientemente pequena.

Observações

1. Dado um instante arbitrário $t_f \in (0, \infty)$, existem uma energia inicial E_0 e uma constante ε tal que (3.3) é verificada.
2. Se em (3.1) e em (3.2), respectivamente, forem dadas constantes E_0 e ε , esta última suficientemente pequena, então pode-se sempre encontrar $t_f \in (0, \infty)$ tal que (3.3) é verificada.
3. O Teorema 3.1 pode ser aplicado às soluções do problema de Cauchy (2.9)-(2.10), (2.11) (considerado em \mathbb{R}^N), desde que $p = 2N/(N + 2) > 1$.
4. O Teorema 3.1 pode ser aplicado a escoamentos de fluidos exotérmicos incompressíveis, se a temperatura θ resolver o seguinte problema de valor inicial

$$\rho \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla \theta \cdot \mathbf{u} \right) = \operatorname{div} (k(\theta) \nabla \theta) - L(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, \theta) \theta, \quad (3.4)$$

$$\theta(\mathbf{x}, 0) = \theta_0(\mathbf{x}) \quad \text{para } \mathbf{x} \in \Omega, \quad \theta = \theta_*(\mathbf{x}, t) \quad \text{para } (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_T,$$

com $L(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, \theta) \geq 0$. A equação (3.4) é obtida a partir de (2.3), tomando $\mathbf{S} : \mathbf{D} = -L(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, \theta)\theta$, $e = c\theta$, onde c é o denominado coeficiente de calor específico, usando (2.1) e depois re-escrevendo $c\rho$ como ρ .

4. LOCALIZAÇÃO NO ESPAÇO PARA FLUIDOS DILATANTES

Consideremos o sistema de equações (2.9)-(2.10) e examinemos as propriedades locais das suas soluções (fracas), independentemente das condições de fronteira. Analisemos uma classe especial de soluções na forma

$$\mathbf{u} = (0, 0, w(\mathbf{x}, t)), \quad \rho = 1, \quad \mathbf{x} = (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad (4.1)$$

$$\mathbf{f} = (0, 0, f(\mathbf{x}, t)), \quad p(\mathbf{x}, t) = p(z, t), \quad \frac{\partial p}{\partial z} = a(t). \quad (4.2)$$

A consideração das equações (2.9) e (2.10) com as simplificações (4.1) e (4.2), corresponde a um problema de escoamento num tubo. Introduzindo a função

$$W(\mathbf{x}, t) = \left(w(\mathbf{x}, t) + \int_0^t a(\tau) d\tau \right), \quad (4.3)$$

obtemos a equação

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \operatorname{div} \mathbf{F}(\nabla W) + f(\mathbf{x}, t) \quad (4.4)$$

à qual adicionamos a seguinte condição inicial

$$W(\mathbf{x}, 0) = W_0(\mathbf{x}), \quad \text{para } \mathbf{x} \in B_{\rho_1}(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \rho_1\} \subset \Omega, \quad \rho_1 \in \mathbb{R}^+. \quad (4.5)$$

Suponhamos que as seguintes condições são satisfeitas

$$\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 \quad \delta |\mathbf{F}|^p \leq \mathbf{f}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} \leq \frac{1}{\delta} |\mathbf{u}|^p \quad \text{para } 2 < p < \infty \quad \text{e } \delta = \text{const.} > 0, \quad (4.6)$$

$$|a(t)| + \|W_0(\mathbf{x})\|_{L^2(B_{\rho_1})}^2 \leq M < \infty \quad \text{com } 0 < \rho_0 < \rho_1, \quad (4.7)$$

$$W_0(\mathbf{x}) = w_0(\mathbf{x}) = 0, \quad f(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{para } (\mathbf{x}, t) \in B_{\rho_0} \times (0, T), \quad (4.8)$$

$$\|W_0\|_{L^2(B_{\rho_0})}^2 + \int_0^T \|f(\cdot, t)\|_{L^2(B_{\rho_0})}^2 dt \leq C (\rho - \rho_0)_+^\alpha, \quad \alpha = \frac{3p-2}{4(p-1)}. \quad (4.9)$$

Teorema 4.1 *Seja $W(\mathbf{x}, t)$ uma solução (fraca) do problema (4.4)-(4.5) e suponhamos que as condições (4.6)-(4.8) são satisfeitas. Então $W(\mathbf{x}, t) = 0$ por quase toda a parte em $B_{\rho(t)}(\mathbf{x}_0)$ com $\rho(t) = \rho(t, \rho_0, E(\rho_1), p) \leq \rho_0$, $\rho(0) = \rho_0$. Se, além de (4.6)-(4.8), também (4.9) é satisfeita, então existe $t^* = t^*(M, \delta, \rho_1, p) \in (0, T)$ tal que $W(\mathbf{x}, t) = 0$ em $B_{\rho_0}(\mathbf{x}_0)$ para todo $t \leq t^*$.*

A segunda afirmação do teorema significa que, se o escoamento de um fluido não-Newtoniano satisfazendo (4.1)-(4.2) e (4.9) está parado em B_{ρ_0} no instante $t = 0$, então, independentemente das condições de fronteira e do comportamento dos termos de força na equação, para lá da bola B_{ρ_0} , o movimento do fluido é definido pela relação

$$w(\mathbf{x}, t) = - \int_0^t a(\tau) d\tau \quad \text{para } 0 \leq t \leq t^*, \quad \mathbf{x} \in B_{\rho_0}.$$

Especificamente, o fluido permanece imobilizado na ausência de queda de pressão ($a(t) = 0$). As demonstrações destes resultados, com ligeiras adaptações, poderão ser consultadas em [13, Capítulo 3 e p. 240].

5. ESCOAMENTOS COM FORÇAS NÃO-LINEARES DISSIPATIVAS

Nesta secção, consideramos a equação (2.10) e admitimos que a força \mathbf{f} possa depender da própria velocidade \mathbf{u} e que são satisfeitas as condições

$$\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^N \quad \delta_1 |\mathbf{u}|^{1+\sigma} \leq -\mathbf{f}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}, \quad \sigma \in (0, 1), \quad (5.1)$$

$$\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^N \quad \delta |\mathbf{D}(\mathbf{u})|^p \leq \mathbf{F}(\mathbf{u}) : \mathbf{D}(\mathbf{u}) = \sum_{i,j=1}^N F_{ij} D_{ij}, \quad p \in \left(\frac{2N}{N+2}, N \right), \quad (5.2)$$

para algumas constantes positivas δ_1 e δ . Seja (\mathbf{u}, ρ, p) uma solução (fraca), num espaço apropriado de funções (ver [13, p. 238]), do problema (2.9)-(2.12).

Teorema 5.1 *Seja (\mathbf{u}, ρ, p) uma solução (fraca) do problema (2.9)-(2.12) e admitamos que as condições (5.1)-(5.2) são satisfeitas. Então para quaisquer $E_0 < \infty$ (E_0 dada em (3.1)), $0 < M < \infty$, $\sigma \in (0, 1)$, $p \in (2N/(N+2), N)$, existe $t^* = t^*(E_0, M, \delta_1, \delta, \sigma, p, N) < \infty$ tal que*

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{para } \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \geq t_f.$$

A demonstração deste teorema, bem como das asserções não referenciadas que se indicam nas observações seguintes, remetemos para [13, Capítulo 7]

Observações

1. Sob a condição (5.1), o efeito de estabilização das soluções em zero num tempo finito também é exibido pelos fluidos dilatantes (com expoente $p \geq 2$ em (2.8)). No caso específico das equações clássicas de Navier-Stokes, para escoamento de fluidos homogêneos incompressíveis, $\rho = \text{const.}$, $p = 2$ e o tensor das tensões \mathbf{S} é dado por (2.6). Neste caso, o resultado anterior ainda permanece válido para domínios planares limitados, pelo menos, numa direcção (veja-se [21, Capítulo 5])
2. O Teorema 5.1 ainda é válido se, em vez de (5.1), admitirmos que \mathbf{f} satisfaz

$$\delta_1 |\mathbf{u}|^{1+\sigma} \leq \mathbf{f}_0(\mathbf{x}, t) - \mathbf{f}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}, \quad \sigma \in (0, 1), \quad \text{e } \mathbf{f}_0 \text{ satisfaz (3.2).}$$

3. Podemos também estender o resultado do Teorema 5.1 ao caso do escoamento de fluidos com densidade inicial quase nula ou ilimitada

$$0 \leq \rho_0(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}, 0) \leq \infty \quad \text{em } \Omega,$$

$$\left\| \frac{1}{\rho_0} \right\|_{L^{p_1}(\Omega)} \leq C_1, \quad \|\rho_0\|_{L^{p_2}(\Omega)} \leq C_2, \quad \text{com } \min(p_1, p_2) > 1.$$

4. Consideremos o caso em que o campo de forças é dissipativo relativamente a uma única componente do campo de velocidades $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_N)$

$$\forall \mathbf{u} \in \mathbf{R}^N \quad \delta_1 |u_k|^{1+\sigma} \leq -\mathbf{f}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}, \quad \sigma \in (0, 1), \quad k \in \{1, \dots, N\}. \quad (5.3)$$

Até ao momento, o efeito de localização num tempo finito para o problema de um domínio N -dimensional Ω , com $N \geq 3$, satisfazendo (5.3) permanece em aberto.

5. A propriedade de localização no espaço para estes problemas é mais difícil de estabelecer. Existem apenas alguns resultados para escoamentos estacionários de fluidos homogêneos incompressíveis governados pelas equações de Navier-Stokes em domínios planares com a forma de faixas semi-infinitas (veja-se [8, 9, 10, 21]).

6. EFEITOS TÉRMICOS SEM MUDANÇA DE FASE

Na secção anterior já fizemos menção ao caso de escoamentos de fluidos na presença de forças externas não-lineares dissipativas e com memória. Agora, iremos considerar um escoamento planar exotérmico de um fluido governado pelo seguinte sistema de Boussinesq numa faixa semi-infinita $\Omega = (0, \infty) \times (0, L)$, $L > 0$,

$$-\nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \theta, \mathbf{u}) - \nabla p, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0 \quad (6.1)$$

$$\mathbf{u} \cdot \nabla C(\theta) = \Delta \theta, \quad C(\theta) := \int_{\theta_0}^{\theta} c(s) ds, \quad (6.2)$$

onde ν é a viscosidade cinemática e c é o calor específico. Neste caso, o campo de forças $\mathbf{f} : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{f} = (f_1(\mathbf{x}, \theta, \mathbf{u}), f_2(\mathbf{x}, \theta, \mathbf{u}))$, satisfaz para todos $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{u} = (u, v)$,

$\theta \in [m, M]$, com $m < M$ constantes, e quase todo $\mathbf{x} \in \Omega$

$$-\mathbf{f}(\mathbf{x}, \theta, \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} \geq \delta |u|^{1+\sigma(\theta)} - g(\mathbf{x}, \theta), \quad (6.3)$$

para alguns $\delta > 0$, σ uma função contínua segundo Lipschitz tal que

$$0 < \sigma^- \leq \sigma(\theta) \leq \sigma^+ < 1 \quad \text{para todo } \theta \in [m, M] \quad (6.4)$$

e

$$g \in L^1(\Omega^{x_g} \times \mathbb{R}), \quad g \geq 0, \quad g(\mathbf{x}, \theta) = 0 \quad \text{em q.t.p. de } \Omega_{x_g} \quad \text{e para todo } \theta \in [m, M], \quad (6.5)$$

para algum x_g , com $0 \leq x_g < \infty$, e onde $\Omega^{x_g} = (0, x_g) \times (0, L)$, $\Omega_{x_g} = (x_g, \infty) \times (0, L)$.

A equação em (6.2) é derivada de (2.3) assumindo que o escoamento é estacionário e o fluido é isocórico, *i.e.* essencialmente incompressível excepto no termo de força \mathbf{f} , o que corresponde à denominada aproximação de Boussinesq (também chamada de Oberbeck). Mais, admite-se que a energia interna específica é dada pela relação $e = \mathcal{C}(\theta)$. A função de condutividade térmica k não aparece na equação em (6.2), porque se assume $k > 0$ o que implica $\varphi(\theta) := \int_{\theta_0}^{\theta} k(s) ds$ é invertível e se faz uma redefinição de \mathbf{f} , \mathcal{C} e μ em termos de φ e de modo à nova função \mathcal{C} captar a informação de k (veja-se [11, 21]).

A (6.1)-(6.5) adicionamos as condições na fronteira para \mathbf{u} e a velocidade no infinito

$$\mathbf{u}(0, y) = \mathbf{u}_*(y) \quad \text{para } y \in (0, L), \quad \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}(x, L) = \mathbf{0} \quad \text{para } x \in (0, \infty), \quad (6.6)$$

$$|\mathbf{u}(x, y)| \rightarrow 0 \quad \text{quando } x \rightarrow \infty \quad \text{e } y \in (0, L), \quad (6.7)$$

assim como as condições na fronteira para θ e a temperatura no infinito

$$\theta(0, y) = \theta_*(y) \quad \text{para } y \in (0, L), \quad \theta(x, 0) = \theta(x, L) = 0 \quad \text{para } x \in (0, \infty), \quad (6.8)$$

$$\theta(x, y) \rightarrow 0 \quad \text{quando } x \rightarrow \infty \quad \text{e } y \in (0, L). \quad (6.9)$$

Aqui, \mathbf{u}_* e θ_* são funções dadas com regularidade conveniente,

$$0 \leq m \leq \theta_*(\mathbf{x}) \leq M < \infty \quad (6.10)$$

e admitimos que a velocidade \mathbf{u}_* e a temperatura θ_* (possivelmente não-nulas) satisfazem as seguintes condições de compatibilidade

$$\int_0^L u_*(s) ds = 0, \quad \mathbf{u}_*(0) = \mathbf{u}_*(L) = \mathbf{0} \quad (6.11)$$

e

$$\theta_*(x, y) \rightarrow 0, \quad \text{quando } x \rightarrow \infty \quad \text{e } y = 0, L. \quad (6.12)$$

Em [11, 21] prova-se, que sob determinadas condições, existe uma única solução (θ, \mathbf{u}) do problema (6.1)-(6.12) num espaço apropriado de funções.

Relativamente ao efeito de localização (no espaço) para a velocidade \mathbf{u} associada ao problema (6.1)-(6.9), repare-se que este efeito é independente da temperatura θ . Deste modo, se não

estivermos interessados em saber apenas quão grande é o suporte de \mathbf{u} , mas meramente em saber que o suporte de \mathbf{u} é um subconjunto compacto de Ω , podemos assumir que θ é dada. Assim, o nosso problema fica mais simples, uma vez que não existe nenhuma equação às derivadas parciais para θ . Admitimos então que θ é dada tal que

$$\theta \in L^\infty(\Omega), \quad \theta(\mathbf{x}) \in [m, M] \text{ para quase todo } \mathbf{x} \in \Omega, \quad (6.13)$$

e consideramos o seguinte problema auxiliar

$$-\nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \theta, \mathbf{u}) - \nabla p, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{em } \Omega, \quad (6.14)$$

$$\mathbf{u}(0, y) = \mathbf{u}_*(y) \text{ para } y \in (0, L), \quad \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}(x, L) = \mathbf{0} \text{ para } x \in (0, \infty), \quad (6.15)$$

$$|\mathbf{u}(x, y)| \rightarrow 0 \quad \text{quando } x \rightarrow \infty \text{ e } y \in (0, L), \quad (6.16)$$

onde o campo de forças \mathbf{f} satisfaz (6.3)-(6.5).

O resultado de existência, permite-nos afirmar que existe uma solução (fraca) \mathbf{u} com energia global

$$E := \int_{\Omega} (|\nabla \mathbf{u}|^2 + |u|^{1+\sigma(\theta)}) \, d\mathbf{x} \quad (6.17)$$

finita e, por consequência, a partir de (6.4) e admitindo que $|u| \leq 1$ (de outro modo, o efeito de localização não ocorre),

$$\mathcal{E} := \int_{\Omega} (|\nabla \mathbf{u}|^2 + |u|^{1+\sigma^+}) \, d\mathbf{x} < \infty.$$

Teorema 6.1 *Suponhamos que \mathbf{f} satisfaz (6.3)-(6.5) e \mathbf{u} é uma solução (fraca) do problema (6.14)-(6.16), com energia global (6.17) finita e onde θ é dada por (6.13). Então $\mathbf{u}(x, y) = \mathbf{0}$ para $x > a'$, onde $a' = a'(E, \mathcal{E}, L, \delta, \nu, \sigma^+)$ é uma constante positiva.*

A demonstração deste teorema segue o mesmo raciocínio de outras dentro do mesmo contexto, mas para escoamentos isotérmicos (veja-se [8, 9, 10]), e pode ser consultada em [11, 21].

Observações

1. Podemos provar este efeito de localização ainda para o caso em que substituimos (6.5) por

$$|f_2(\mathbf{x}, \theta, \mathbf{u})| \leq \gamma(x_s - x)_+^\zeta \quad (6.18)$$

para algum $x_s > 0$ e algumas constantes positivas γ e ζ . Denominamos, neste caso, o efeito de localização por efeito de estagnação, uma vez que o escoamento pára na posição $x = x_s$.

2. Um problema muito interessante, é quando a viscosidade ν depende da temperatura, o que é bastante comum em muitas aplicações concretas. Neste caso, a equação do movimento (6.14) é substituída por

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \operatorname{div} (2\nu(\theta) \mathbf{D}) - \nabla p + \mathbf{f}(\mathbf{x}, \theta, \mathbf{u}), \quad (6.19)$$

onde \mathbf{D} é o tensor das velocidades de deformação (2.4). Se admitirmos que

$$0 < \nu^- \leq \nu(\theta) \leq \nu^+ < \infty, \quad (6.20)$$

para algumas constantes ν^- e ν^+ , então o resultado do Teorema 6.1 ainda permanece válido (veja-se [11, 21]).

3. No Teorema 6.1 e na observação anterior afirma-se que, quer a viscosidade dependa da temperatura ou não, obtemos $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ para quase todo $x > a'$, onde a' é dada no Teorema 6.1. Uma questão que se levante é a seguinte. O que é que acontece à temperatura para $x > a'$? Prova-se facilmente que, neste caso, a temperatura vai ter um decrescimento de tipo exponencial (veja-se [21]).
4. Em termos das aplicações, o teorema anterior mostra que um acoplamento apropriado entre a velocidade e a temperatura e um valor baixo da temperatura, mas maior do aquele em que se dá a mudança de fase, pode ser responsável pela paragem do escoamento de um fluido, sem mudança de fase. Esta filosofia pode ser útil na monitorização de muitos escoamentos, especialmente em Metalurgia.

7. LOCALIZAÇÃO NUM TEMPO FINITO DE ESCOAMENTOS DE GLACIARES

Consideramos agora o seguinte modelo matemático, em $Q_T = \Omega \times [0, T]$, com aplicações em Glaciologia

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\frac{|\nabla h|^{n-1} (h-l)^{n+2}}{n+2} \nabla h \right) - f(h-l), \quad (7.1)$$

$$h(\mathbf{x}, 0) = h_0(\mathbf{x}) \geq l(\mathbf{x}) \quad \text{para } \mathbf{x} \in \Omega, \quad (7.2)$$

$$h(\mathbf{x}, t) = l(\mathbf{x}), \quad \text{para } (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_T = \partial\Omega \times [0, T]. \quad (7.3)$$

Este sistema modela um escoamento isotérmico de placas de gelo em glaciares de montanha (veja-se [17]), onde $h = h(\mathbf{x}, t)$ é a superfície do glaciar (fronteira livre), $l = l(\mathbf{x})$ é a superfície (solo) sobre a qual assenta o glaciar (fronteira fixa) e n é uma constante dada pela Lei de Glen¹

$$\mathbf{S} = -p\mathbf{I} + \mathbf{F}, \quad \mathbf{F} = \frac{2}{A(\theta)F^{n-1}}\mathbf{D}. \quad (7.4)$$

Nesta relação, $2/[A(\theta)F^{n-1}]$ é uma função de corte, onde F é o segundo invariante do tensor \mathbf{F} e é dado por $2F = \mathbf{F} : \mathbf{F}$. A é um factor conhecido, que depende da temperatura θ e varia $\pm 3^\circ \text{K}$ (K=Kelvin) sobre a temperatura de 50°K . No caso do modelo acima considerado, o escoamento é isotérmico e tomamos $A = 1$. A constante n também é conhecida. Para $n = 1$, estamos perante um fluido Newtoniano. Mas, habitualmente, a Lei de Glen (7.4) assume $n = 3$ e por consequência, podemos dizer que os glaciares são essencialmente fluidos não-Newtonianos. Na equação (7.1) e de acordo com [17], o termo $f(h-l)$ é entendido como

$$f(h-l) = \nabla(h-l) \cdot \nabla h + a,$$

¹Esta lei também tem aplicações em Metalurgia e aí recebe o nome de Lei de Norton-Hoff.

onde a é a lá denominada taxa de acumulação (sem dimensão) resultante de uma lei de conservação integral e serve para quantificar os depósitos de neve e gelo na superfície livre h do glaciar. O sistema (7.1)-(7.3) resulta da aproximação de Stokes e modela um escoamento bidimensional, donde poderemos considerar $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{x} = (x, y)$. Esta simplificação é habitual em Glaciologia, pois tanto nos grandes glaciares de montanha, como nas flutuações de massas de gelo do Ártico e Antártico, ou ainda nas placas de gelo subterrâneas, o escoamento é muito lento e faz-se essencialmente em duas direcções apenas (vertical e horizontal).

Deste modo, a equação (7.1) é obtida de (2.10) desprezando os termos de inércia (os que estão no primeiro membro), considerando a Lei de Glen (7.4) com as simplificações acima descritas, assumindo a condição de incompressibilidade do meio e $\mathbf{f} = (g \sin \alpha, 0, -g \cos \alpha)$, onde g é a aceleração da gravidade e α é o declive médio do glaciar (de montanha) no sentido descendente. As variáveis e parâmetros da equação resultante são re-escalados em termos da razão entre a profundidade e o comprimento do leito do glaciar. Este último procedimento, juntamente com a hipótese do escoamento ser bidimensional, é denominado, na literatura habitual, por aproximação do gelo raso (do Inglês *shallow ice approximation*).

Agora, iremos estudar o caso mais simples do problema (7.1)-(7.3), supondo que

$$l = \text{const}, \quad a = 0. \quad (7.5)$$

Isto significa que a superfície sobre a qual assenta o glaciar é horizontal e que não existem depósitos na superfície livre do glaciar. Neste caso, tomando $w = h - l$, o problema (7.1)-(7.3) toma a forma

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\frac{w^{n+2}}{n+2} |\nabla w|^{n-1} \nabla w \right) - |\nabla w|^2 \quad (7.6)$$

$$w(\mathbf{x}, 0) = w_0(\mathbf{x}) = h_0(\mathbf{x}) - l \geq 0 \quad \text{para } \mathbf{x} \in \Omega, \quad (7.7)$$

$$w(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \text{para } (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_T = \partial\Omega \times [0, T] \quad (7.8)$$

Consideremos as soluções (fracas) não negativas do problema (7.6)-(7.8) tais que

$$\int_{\Omega} |w(\cdot, t)|^2 d\mathbf{x} + \int_0^T \int_{\Omega} |w|^{n+2} |\nabla w|^{n+1} d\mathbf{x} dt := E(\Omega) < \infty. \quad (7.9)$$

Suponhamos que tais soluções existem num espaço apropriado de funções, cuja demonstração conjecturamos ser possível fazer usando os métodos apresentados em [14, 15, 20]. Estudemos as propriedades locais das soluções (fracas) não-negativas do problema (7.6)-(7.8) que satisfazem (7.9). Para tal, fixemos \mathbf{x}_0 em Ω e suponhamos que

$$w_0(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{para } \mathbf{x} \in B_{\rho_0}(\mathbf{x}_0) \subset \Omega \quad \text{com } \rho_0 \in (0, \operatorname{dist}(\mathbf{x}_0, \partial\Omega)). \quad (7.10)$$

Então, aplicando os resultados de [13], podemos provar o seguinte teorema.

Teorema 7.1 *Seja w uma solução (fraca) não-negativa do problema (7.6)-(7.8) satisfazendo a (7.9).*

1. Se a condição (7.10) é satisfeita, então existe t^* , $0 < t^* < T$, tal que

$$w(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{em } B_{\rho(t)}(\mathbf{x}_0), \quad t \in [0, t^*] \subset [0, T],$$

com a função $\rho(t)$ dada por

$$\rho^\nu(t) = \rho_0^\nu - t^\lambda C(n, E(B_{\rho_0}(\mathbf{x}_0))),$$

para algumas constantes $\nu = \nu(n) > 0$ e $\lambda = \lambda(n) > 0$.

2. Se, adicionalmente a (7.10), também é satisfeita a condição

$$\int_{B_\rho(\mathbf{x}_0)} |w_0|^2 d\mathbf{x} \leq \varepsilon(\rho - \rho_0)^\mu, \quad \rho > \rho_0, \quad \mu = \mu(n) > 0, \quad \varepsilon > 0,$$

então existem t^* , $0 < t^* < T$, e $\varepsilon^* > 0$ tais que

$$w(\mathbf{x}_0, t) = 0 \quad \text{em } B_{\rho_0}(\mathbf{x}_0), \quad t \in [0, t^*], \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon^*.$$

Observações

1. Em termos matemáticos, a primeira asserção do teorema anterior está relacionada com a denominada propriedade de velocidade de propagação finita e a segunda, com a propriedade de tempo de espera.
2. Revertendo ao problema físico, interpretamos estes resultados do seguinte modo. Suponhamos que no instante inicial o glaciar tinha o nível $h = 1$ no domínio B_{ρ_0} . Então, a primeira asserção dá-nos a posição da fronteira livre $h(\mathbf{x}, t) = l$ dentro do domínio B_{ρ_0} . A segunda, diz-nos que a posição da fronteira livre $h(\mathbf{x}, t) = l$ dentro do domínio B_{ρ_0} , só tem lugar depois do instante t^* .
3. Relativamente ao efeito de localização no espaço, apesar de não parecer trivial, os autores conjecturam que será possível estabelecer esta propriedade para o modelo descrito nesta secção.

8. ANÁLISE NUMÉRICA

O tratamento numérico por métodos computacionais dos problemas estudados nas secções anteriores, será certamente importante para uma melhor compreensão das propriedades de localização das soluções destes problemas. Notemos que todo o estudo feito, com excepção da Secção 7, é puramente teórico e que convém uma experimentação destes modelos para aferir com os resultados teóricos obtidos. A análise numérica poderá ajudar-nos a compreender melhor estes resultados em exemplos concretos. Um dos interesses em tratar estes problemas por métodos computacionais, consiste em encontrar melhores estimativas para as propriedades de localização estabelecidas. Outro, reside na possibilidade de se conhecer com maior pormenor a geometria do subdomínio onde é válido o efeito de localização. Existe, também, o interesse em implementar métodos computacionais para se compreender melhor as funções solução em estudo, como a velocidade ou as linhas de corrente. Por exemplo, no caso do problema estudado na Secção 6, a nossa intuição diz-nos que as linhas de corrente do escoamento aí estudado de-

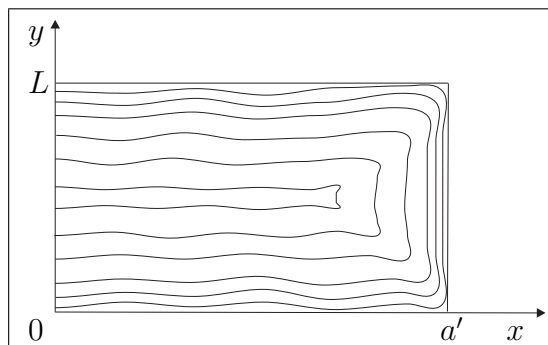


Figura 1. Linhas de corrente horizontais.

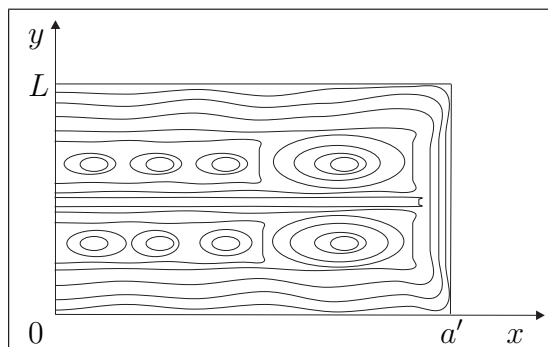


Figura 2. Linhas de corrente circulares.

vem ser descritas como nas Figuras 1 ou 2. Estas figuras não passam de mera intuição. Servem apenas para nos convidarem ao estudo destes problemas por métodos computacionais.

REFERÊNCIAS

- [1] S.N. ANTONTSEV, *On the localization of solutions of nonlinear degenerate elliptic and parabolic equations*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **260** (1981), pp. 1289-1293.
- [2] —, *Localization of solutions for degenerate equations in Continuum Mechanics*. Free Boundary Problems: Theory and Applications (Irsee, 1987), Vol. II, pp. 725-739, Longman Sci. Tech., Harlow, 1990.
- [3] —, *Localization of solutions of a problem of mass transport in a porous medium*, Dokl. Akad. Nauk, **326** (1992), pp. 268-271.
- [4] —, *Nonlinear parabolic equations with a variable exponent of degeneration*, Nonlinear Partial Differential Equations (Alushta, 2003), p. 12, Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NASU (2003).
- [5] S.N. ANTONTSEV, J.I. DÍAZ, *Application of the energy method in the localization of solutions of equations in continuum mechanics*, Soviet Phys. Dokl., **33** n.o 11 (1988), pp. 813-816.
- [6] —, *The energy method and the localization of solutions of equations of continuum me-*

- chanics*, J. Appl. Mech. Tech. Phys., **30** n.o 2 (1989), pp. 182-189.
- [7] —, *Space and time localization in the flow of two immiscible fluids through a porous medium: energy methods applied to systems*, Nonlinear Anal., **16** (1991), pp. 299-313.
- [8] S.N. ANTONTSEV, J.I. DÍAZ, H.B. DE OLIVEIRA, *On the confinement of a viscous fluid by means of a feedback external field*, C.R. Mecanique, **330** (2002), pp. 797-802.
- [9] —, *Stopping a viscous fluid by a feedback dissipative field: The stationary Stokes problem*, A aparecer em J. Math. Fluid Mech.
- [10] —, *Stopping a viscous fluid by a feedback dissipative field: The stationary Navier-Stokes problem*, A aparecer em Rend. Lincei Mat. Appl.
- [11] S.N. ANTONTSEV, J.I. DÍAZ, H.B. DE OLIVEIRA, *Stopping a viscous fluid by a feedback dissipative field: thermal effects without phase changing*. Trends in Partial Differential Equations (Óbidos, 2003). A aparecer.
- [12] S.N. ANTONTSEV, J.I. DÍAZ, S.I. SHMAREV, *On the boundary layer for dilatant fluids*, Energy Methods in Continuum Mechanics (Oviedo, 1994), pp. 13-21, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1996.
- [13] —, *Energy Methods for Free Boundary Problems: Applications to Non-linear PDEs and Fluid Mechanics*, Birkhäuser, Boston, 2002.
- [14] S.N. ANTONTSEV, G.P. EPIKHOV, A.A. KASHEVAROV, *Mathematical system modelling of water exchange processes* (em Russo), Nauka Sibirsk. Otdel., Novosibirsk, 1986.
- [15] S.N. ANTONTSEV, A.V. KAZHIKHOV, V.N. MONAKHOV, *Boundary Value Problems in Mechanics of Nonhomogeneous Fluids*, Translation of North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1990.
- [16] S.N. ANTONTSEV, S. I. SHMAREV, *A model porous medium equation with variable exponent of nonlinearity: existence, uniqueness and localization properties of solutions*, Pré-publicação n.o 2 (2003), Universidade da Beira Interior, Portugal, pp. 1-34.
- [17] A.C. FOWLER, *Glaciers and ice sheets*, The Mathematics of Models for Climatology and Environment (Puerto de La Cruz, 1995), pp. 301-336, Nato ASI Ser. Ser. I Glob. Env. Change, **48**, Springer, Berlin, 1997.
- [18] R.R. HUILGOL, *Continuum Mechanics of Viscoelastic Liquids*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1975.
- [19] O.A. LADYZHENSKAYA, V.A. SOLONNIKOV, N.N. URAL'TSEVA, *Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic Type*, Translation of the American Mathematical Society, Providence, 1967.
- [20] J.-L. LIONS, *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires*, Dunod, Paris, 1969.
- [21] H.B. DE OLIVEIRA, *Localization of Solutions for Planar Navier-Stokes Equations*, Tese de Doutorado, Universidade do Algarve, 2004.
- [22] W.R. SCHOWALTER, *Mechanics of Non-Newtonian Fluids*, Pergamon Press, Oxford, 1978.