Produto interno, externo e misto de vectores

A noção de produto interno (ou escalar) de vectores foi introduzida no ensino secundário, para vectores com duas ou três coordenadass. Neste capítulo generaliza-se esta noção.

Os espaços $\mathbb{R}^n$

No ensino secundário foram estudados vectores no plano, da forma (x, y), e no espaço, da forma (x, y, z). Denomina-se por espaço $\mathbb{R}^2$ o conjunto dos vectores no plano e por espaço $\mathbb{R}^3$ o conjunto dos vectores no espaço. Embora se perca a interpretação geométrica, é fácil generalizar estas definições a dimensões maiores e definir o espaço $\mathbb{R}^n$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}\}$$

Os elementos de $\mathbb{R}^n$ designam-se genericamente por vectores e as definições de soma de vectores e de produto de um número real por um vector decorrem naturalmente das definições análogas no plano e no espaço.

Exemplos:

1. Espaço $\mathbb{R}^4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$
2. $(-1, 0, 3, 1, 6)$ é um vector do espaço $\mathbb{R}^5$.
3. Soma de vectores: $(1, 2, 3, 4, 5, 6) + (6, 5, 4, 3, 2, 1) = (7, 7, 7, 7, 7, 7)$
4. Produto de um numero real por um vector: Para $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha(-1, 0, 3, 1, 6) = (-\alpha, 0, 3\alpha, \alpha, 6\alpha)$

Produto interno euclidiano

O produto interno ou escalar de dois vectores u e v em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ foi definido pela expressão:

$$u \cdot v = \|u\| \, \|v\| \cos \measuredangle (u.v) .$$

Esta expressão pressupõe que se pode medir o comprimento dos vectores e a amplitude do ângulo por eles formado. Quando a dimensão aumenta e se perde a interpretação geométrica dos vectores, essas medições não são possíveis. Para generalizar a definição de produto interno aos outros espaços $\mathbb{R}^n$ utiliza-se a expressão, também já conhecida, do produto escalar usando as coordenadas dos vectores. No caso do espaço $\mathbb{R}^2$, por exemplo, sendo $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$ dois vectores o produto interno é:

$$(u_1, u_2) \cdot (v_1, v_2) = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

Assim, se $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ e $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ são vectores de $\mathbb{R}^n$, o **produto interno euclidiano (ou usual)** $u \cdot v$[1] é definido por

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

[1] Para o produto interno de dois vectores u e v também se usam a notações $u|v$ e $\langle u, v \rangle$.

Exemplo: Em $\mathbb{R}^5$,

$$(1,2,3,4,5)\cdot(5,4,3,2,1) = 1\times 5 + 2\times 4 + 3\times 3 + 4\times 2 + 5\times 1 = 35.$$

A partir da definição obtêm-se sem dificuldade as seguintes propriedades:

Propriedades: Se u, v, w são vectores de $\mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então:

1. $u \cdot v = v \cdot u.$
2. $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w.$
3. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $(\alpha u)\cdot v = \alpha\,(u \cdot v) = u \cdot (\alpha v)\,.$
4. $u \cdot u \geq 0$ e $u \cdot u = 0$ se e só se $u = (0, 0, \ldots, 0)$.

Nota: Pode-se definir produto interno de uma forma ainda mais geral, como sendo qualquer aplicação que a um par de vectores faça corresponder um número real e satisfaça as quatro propriedades enunciadas. Um exemplo é o **produto interno euclidiano com pesos** que se define, para vectores de $\mathbb{R}^n$, $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ e $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, e sendo $k_1, k_2, \ldots, k_n$ números reais positivos, pela fórmula:

$$u \cdot v = k_1 u_1 v_1 + k_2 u_2 v_2 + \cdots + k_n u_n v_n.$$

Norma euclidiana

Usando a definição de produto interno em $\mathbb{R}^n$ podem também ser generalizadas as noções de norma de vectores e de distância entre dois vectores.

Sejam $u = (u_1, u_2 \ldots, u_n)$ e $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ vectores de $\mathbb{R}^n$. Define-se:

1. **Norma euclidiana de** u, $\|u\| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$.
2. **Distância entre os vectores** u e v, $d\,(u, v) = \|u - v\| = \|(u_1 - v_1, u_2 - v_2, \ldots, u_n - v_n)\|$.

Exemplo: Em $\mathbb{R}^5$:

$\|(1,2,3,4,5)\| = \sqrt{(1,2,3,4,5)\cdot(1,2,3,4,5)} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{55}$

$d\,((1,2,3,4,5)\,,(5,4,3,2,1)) = \|(1,2,3,4,5) - (5,4,3,2,1)\| = \|(-4,-2,0,2,4)\| = \sqrt{40}$

Propriedades: Sejam u e v vectores de $\mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então:

1. $\|u\| \geq 0$ e $\|u\| = 0$ se e só se $u = (0, 0, \ldots, 0)\,.$
2. $d\,(u, v) \geq 0$ e $d\,(u, v) = 0$ se e só se $u = v$.
3. $\|\alpha u\| = |\alpha|\,\|u\|\,.$
4. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (**desigualdade triangular**).
5. $|u \cdot v| \leq \|u\|\,\|v\|$ (**desigualdade de Cauchy-Schwarz**[2]).

[2] Augustin Louis Cauchy, matemático francês (1789-1857). Hermann Amandus Schwarz, matemático alemão (1843-1921)

Ângulo de dois vectores

A noção de ângulo entre dois vectores pode também ser generalizada a vectores de $\mathbb{R}^n$, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Através desta desigualdade, tem-se, para u e v não nulos,

$$\begin{aligned} |u \cdot v| \leq \|u\| \, \|v\| \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{|u \cdot v|}{\|u\| \, \|v\|} \leq 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -1 \leq \frac{u \cdot v}{\|u\| \, \|v\|} \leq 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Como é sabido, se θ é um ângulo cuja medida varia entre 0 e π, então $\cos\theta$ percorre todos os valores entre -1 e 1. Este facto e as desigualdades (1) permitem a seguinte definição:

Ângulo de dois vectores não nulos u e v, $\measuredangle(u, v)$, é o ângulo θ, $0 \leq \theta \leq \pi$, tal que $\cos\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \, \|v\|}$, isto é, o ângulo tal que

$$\cos \measuredangle(u, v) = \frac{u \cdot v}{\|u\| \, \|v\|} \tag{2}$$

Esta era a definição já conhecida anteriormente para ângulo entre vectores de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$. De (2) obtém-se também a fórmula, já conhecida, para o produto interno de dois vectores:

$$u \cdot v = \|u\| \, \|v\| \cos \measuredangle(u, v) .$$

Exemplo: Em $\mathbb{R}^5$:

$$\begin{aligned} \cos \measuredangle\Big((1,1,1,0,1), \big(-1,-1,-1,\sqrt{6},0\big)\Big) &= \\ &= \frac{(1,1,1,0,1) \cdot \big(-1,-1,-1,\sqrt{6},0\big)}{\|(1,1,1,0,1)\| \, \big\|\big(-1,-1,-1,\sqrt{6},0\big)\big\|} = \\ &= \frac{-3}{\sqrt{4}\sqrt{9}} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

O ângulo θ cujo co-seno é $-\frac{1}{2}$ e tal que $0 \leq \theta \leq \pi$ é $\theta = \frac{2}{3}\pi$. Assim,

$$\measuredangle\Big((1,1,1,0,1), \big(-1,-1,-1,\sqrt{6},0\big)\Big) = \frac{2}{3}\pi.$$

Ortogonalidade

O cálculo do ângulo de dois vectores permite determinar quais os vectores de $\mathbb{R}^n$ que são **ortogonais**, isto é, quais os vectores que formam entre si um ângulo de $\frac{\pi}{2}$. Da igualdade (2) verifica-se que se u e v são dois vectores não nulos então $\cos \measuredangle(u, v) = 0$ se e só se $u \cdot v = 0$. Isto motiva a seguinte definição:

Definição: Dois vectores u e v de $\mathbb{R}^n$ dizem-se **ortogonais** se $u \cdot v = 0$.

Nota: De acordo com a definição o vector nulo é ortogonal a qualquer vector pois

$$u \cdot (0, 0, \ldots, 0) = 0, \forall u \in \mathbb{R}^n.$$

Exemplos: Em $\mathbb{R}^4$ os vectores $u = (2, 1, -3, 4)$ e $v = (2, -12, -4, 1)$ são ortogonais pois

$$(2, 1, -3, -4) \cdot (2, -12, -4, 1) = 0.$$

A noção de ortogonalidade permite generalizar o teorema de Pitágoras ao espaço $\mathbb{R}^n$:

Teorema (Pitágoras): Se u e v são vectores ortogonais de $\mathbb{R}^n$, então

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 .$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \\ &= (u + v) \cdot (u + v) = \\ &= (u \cdot u) + \underbrace{(u \cdot v)}_{=0} + \underbrace{(v \cdot u)}_{=0} + (v \cdot v) = \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 \end{aligned}$$

Conjuntos ortogonais e ortonormados de vectores

Um conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ diz-se **ortogonal** se os vectores do conjunto forem ortogonais dois a dois. Um conjunto ortogonal diz-se **ortonormado** se a norma de cada vector do conjunto é 1.

Se nenhum dos vectores de um conjunto ortogonal é o vector nulo, pode-se obter um conjunto ortonormado efectuando o produto de cada vector pelo inverso da sua norma, dado que, $\forall v \in \mathbb{R}^n \backslash \{(0, 0, \ldots, 0)\}$,

$$\left\| \frac{1}{\|v\|} v \right\| = \left| \frac{1}{\|v\|} \right| \|v\| = \frac{1}{\|v\|} \|v\| = 1,$$

A este processo de multiplicar um vector pelo inverso da norma chama-se **normalização** do vector v.

Exemplos:

1. O conjunto de vectores $\{(0, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 0, -1)\}$ é ortogonal, pois

$$(0, 1, 0) \cdot (1, 0, 1) = 0, \;\; (0, 1, 0) \cdot (1, 0, -1) = 0 \text{ e } (1, 0, 1) \cdot (1, 0, -1) = 0.$$

2. Para obter um conjunto ortonormado a partir do conjunto do exemplo 1, basta normalizar os vectores. Como

$$\|(0,1,0)\| = 1, \ \ \|(1,0,1)\| = \sqrt{2} \text{ e } \ \|(1,0,-1)\| = \sqrt{2}$$

o conjunto $\left\{(0,1,0)\,, \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)\,, \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)\right\}$ é ortonormado.

3. Um referencial ortonormado é um referencial no qual os vectores que o constituem formam um conjunto ortonormado.

Determinantes de ordem 2 e 3.

O determinante de uma matriz quadrada é um número real obtido a partir da soma de determinados produtos de elementos da matriz. Descreve-se aqui apenas como se calculam determinantes de matrizes de ordem 2 e 3.

Ordem 2:

Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, então o seu determinante é

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Exemplo: $\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2$

Ordem 3:

Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, então o seu determinante é

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Nota: Como se pode observar, o determinante de ordem três é uma soma de seis parcelas, três afectadas do sinal positivo e três do sinal negativo. Cada parcela é o produto de três entradas da matriz, situadas em linhas e colunas diferentes. Para calcular estes produtos e o sinal de que são afectados, costuma utilizar-se uma regra prática, conhecida como regra de Sarrus[3]:

1- Repetem-se as duas primeiras colunas da matriz ao lado da terceira:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

[3]Pierre Frederic Sarrus (1798 - 1861) foi professor na universidade francesa de Strasbourg. A regra de Sarrus foi provavelmente escrita no ano de 1833.

2 - Os produtos afectados com o sinal $+$ obtêm-se multiplicando os elementos que se situam ao longo de cada uma das linhas do esquema seguinte:

$$\left[\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right] \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array}$$

$$a_{11}a_{22}a_{33},\ a_{12}a_{23}a_{31} \text{ e } a_{13}a_{21}a_{32}$$

3 - Os produtos afectados com sinal $-$ obtêm-se multiplicando os elementos que se situam ao longo de cada uma das linhas do esquema seguinte:

$$\left[\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right] \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array}$$

$$a_{13}a_{22}a_{31},\ a_{11}a_{23}a_{32} \text{ e } a_{12}a_{21}a_{33}$$

Exemplo: Cálculo do determinante da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

Parcelas com sinal $+$:

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array}\right] \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{array}$$

$$1 \times 5 \times 9,\ 2 \times 6 \times 7 \text{ e } 3 \times 4 \times 8$$

Parcelas com sinal $-$:

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array}\right] \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{array}$$

$$3 \times 5 \times 7,\ 1 \times 6 \times 8 \text{ e } 2 \times 4 \times 9$$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = 1 \times 5 \times 9 + 2 \times 6 \times 7 + 3 \times 4 \times 8 - 3 \times 5 \times 7 - 1 \times 6 \times 8 - 2 \times 4 \times 9 = 0$$

Produto externo e produto misto

O produto externo e o produto misto de vectores apenas se calculam em espaços a três dimensões. Ao longo desta secção todos os vectores considerados são vectores do espaço $\mathbb{R}^3$.

Definição de produto externo

Se $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ são vectores de $\mathbb{R}^3$ então o produto externo de u e v é o vector:

$$u \times v = (u_2v_3 - u_3v_2, -u_1v_3 + u_3v_1, u_1v_2 - u_2v_1)$$

ou, em linguagem de determinantes,

$$u \times v = \left(\det \begin{bmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{bmatrix}, -\det \begin{bmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \right)$$

Exemplo:

Se $u = (1, 2, 3)$ e $v = (4, 5, 6)$

$$\begin{aligned} u \times v &= \\ &= \left(\det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, -\det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \right) = \\ &= (-3, 6, -3) \end{aligned}$$

Verifica-se que $(-3, 6, -3) \cdot (1, 2, 3) = 0$ e $(-3, 6, -3) \cdot (4, 5, 6) = 0$, ou seja, o vector $u \times v$ é ortogonal ao vector u e ao vector v. Esta propriedade é geral e é uma das propriedades que se enunciam de seguida.

Propriedades do produto externo

Sejam $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ e $k \in \mathbb{R}$.

1. Se existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $u = \alpha v$ ou $v = \alpha u$, $u \times v = (0, 0, 0)$.
2. Em particular, $u \times u = (0, 0, 0)$ e $u \times (0, 0, 0) = (0, 0, 0) \times u = (0, 0, 0)$.
3. $(u \times v) \cdot u = 0$ ($u \times v$ é ortogonal a u).
4. $(u \times v) \cdot v = 0$ ($u \times v$ é ortogonal a v).
5. $\|u \times v\| = \|u\| \, \|v\| \operatorname{sen} \measuredangle (u, v)$.
6. Se $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $u \times v = (z_1, z_2, z_3)$ então $\det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} > 0$.
7. $u \times v = -(v \times u)$.
8. $u \times (v + w) = (u \times v) + (u \times w)$.
9. $(u + v) \times w = (u \times w) + (v \times w)$.
10. $k (u \times v) = (ku) \times v = u \times (kv)$.

Definição de produto misto

Se $u, v, w \in \mathbb{R}^3$, então o **produto misto** de u, v e w é

$$u \cdot (v \times w).$$

O produto misto de três vectores é um número real que pode ser calculado, sendo $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$, por:

$$u \cdot (v \times w) = \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

Propriedades do produto misto

Sendo $u, v, w \in \mathbb{R}^3$, então

1. $u \cdot (v \times w) = 0$ se e só se um dos vectores u, v ou w é combinação dos outros. (por exemplo, se $u = (1,2,3), v = (1,0,1)$ e $w = (1,4,5)$, então $u \cdot (v \times w) = 0$, pois $(1,4,5) = 2(1,2,3) - (1,0,1) = 2u - v$)

2. $u \cdot (v \times w) = (u \times v) \cdot w$ (no produto misto as operações podem ser trocadas, mantendo a ordem dos vectores)

Aplicações do produto externo e produto misto

1. O produto externo pode ser utilizado sempre que se pretenda encontrar, em $\mathbb{R}^3$, um vector que seja simultaneamente ortogonal a dois vectores dados (que sejam linearmente independentes).

2. É sabido que equação de um plano com a direcção de dois vectores dados u, v e que passe pela origem é da forma
$$ax + by + cz = 0$$
em que (a, b, c) é um vector ortogonal a u e a v. Para encontrar essa equação pode-se considerar para (a, b, c) o vector $u \times v$.

   Exemplo: De acordo com o exemplo da página 32, a equação do plano com a direcção dos vectores $u = (1,2,3)$ e $v = (4,5,6)$ e que passa na origem pode ser
$$-3x + 6y - 3z = 0$$

3. A área do paralelogramo definido por dois vectores u e v é dada por $\|u \times v\|$.

4. O volume do paralelipípedo definido por três vectores u, v e w é dado por $|u \cdot (v \times w)|$.