



UNIVERSIDADE DO ALGARVE
Instituto Superior de Engenharia
Departamento de Engenharia Alimentar

Controlo Estatístico da Qualidade

Eduardo Esteves

Departamento de Engenharia Alimentar

Prefácio

Estes *Apontamentos* constituem o texto de apoio às aulas teórico-práticas da disciplina de Gestão da Qualidade da Licenciatura em Engenharia Alimentar (Departamento de Engenharia Alimentar do Instituto Superior de Engenharia da Universidade do Algarve).

Apesar dos esforços em corrigir os erros que possivelmente esta versão ainda inclui (ainda que tenha corrigido aqueles que os alunos de anos anteriores apontaram), os comentários e correcções “de muitos leitores serão, com certeza, mais e melhores do que apenas os meus” por isso...

Proponho a citação deste trabalho como: Esteves, E. (2009) *Controlo Estatístico da Qualidade*. Departamento de Engenharia Alimentar, Instituto Superior de Engenharia da Universidade do Algarve, Faro, 54 p. [disponível *online* em <http://w3.ualg.pt/~eesteves>, consultado em *data*].

Índice

QUALIDADE E CONTROLO ESTATÍSTICO DA QUALIDADE (CEQ).....	5
“MOMENTOS” E METODOLOGIAS DE CONTROLO, CARACTERÍSTICAS DA QUALIDADE	5
GRÁFICOS (OU CARTAS) DE CONTROLO.....	5
GRÁFICOS DE CONTROLO POR VARIÁVEIS.....	6
INTRODUÇÃO	6
DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADES NORMAL (REVISÃO).....	7
ELABORAÇÃO DE GRÁFICOS DE CONTROLO POR VARIÁVEIS.....	8
DECISÕES PREPARATÓRIAS PARA A ELABORAÇÃO DE GRÁFICOS DE CONTROLO POR VARIÁVEIS ...	8
CÁLCULO DA LINHA CENTRAL.....	8
CÁLCULO DOS LIMITES DE CONTROLO.....	8
GESTÃO DE PROCESSOS ATRAVÉS DE GRÁFICOS DE CONTROLO POR VARIÁVEIS	10
REGRAS DE DECISÃO PARA (INTERPRETAÇÃO DE) GRÁFICOS DE CONTROLO.....	10
INTERPRETAÇÃO (COMPLEMENTAR) DOS GRÁFICOS DE CONTROLO	11
ERROS NA INFERÊNCIA A PARTIR DE GRÁFICOS DE CONTROLO POR VARIÁVEIS	12
ALGUMAS PRECAUÇÕES NA ANÁLISE DE GRÁFICOS DE CONTROLO POR VARIÁVEIS	13
GRÁFICOS DE CONTROLO POR ATRIBUTOS.....	13
INTRODUÇÃO	13
DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE BINOMIAL E DE POISSON.....	14
ELABORAÇÃO DOS GRÁFICOS DE CONTROLO POR ATRIBUTOS.....	14
PREPARAÇÃO DOS GRÁFICOS DE CONTROLO POR ATRIBUTOS	14
CÁLCULO DA LINHA CENTRAL E DOS LIMITES DE CONTROLO.....	15
GESTÃO DE PROCESSOS ATRAVÉS DE GRÁFICOS DE CONTROLO POR ATRIBUTOS	15
INTERPRETAÇÃO DE GRÁFICOS DE CONTROLO POR ATRIBUTOS	15
ALGUMAS PRECAUÇÕES NA ANÁLISE DE GRÁFICOS DE CONTROLO POR ATRIBUTOS	16
VANTAGENS E DESVANTAGENS DOS GRÁFICOS DE CONTROLO POR ATRIBUTOS RELATIVAMENTE AOS GRÁFICOS DE CONTROLO POR VARIÁVEIS	16
CURVAS CARACTERÍSTICAS DE OPERAÇÃO.....	16
INTRODUÇÃO	16
CURVAS CO, GRÁFICOS DE CONTROLO POR VARIÁVEIS E O ERRO DE TIPO II... ..	17
ELABORAÇÃO DA CURVA CO PARA GRÁFICOS DE CONTROLO DA MÉDIA	17
INTERPRETAÇÃO DAS CURVAS CO PARA GRÁFICOS DE CONTROLO DAS MÉDIAS.....	18
EFEITO DE N SOBRE INFERÊNCIA	18

ELABORAÇÃO DE CURVAS CO PARA GRÁFICOS DE CONTROLO DE P.....	19
GRÁFICOS DE CONTROLO (SUMÁRIO).....	21
PLANOS DE AMOSTRAGEM PARA ACEITAÇÃO (PAA).....	21
INTRODUÇÃO	21
OS PAA, A FORMAÇÃO DOS LOTES E A SELECÇÃO DA AMOSTRA	21
VANTAGENS E DESVANTAGENS DOS PAA	22
PAA POR ATRIBUTOS.....	22
PAA POR ATRIBUTOS E A CURVA CO “IDEAL”	24
“RISCOS DO PRODUTOR E DO CONSUMIDOR”	24
ELABORAÇÃO DE CURVAS CO PARA PAA POR ATRIBUTOS.....	25
EFEITO DE N E C SOBRE PAA POR ATRIBUTOS	25
PAA POR ATRIBUTOS NORMALIZADOS	26
ANSI/ASQC Z1.4 E O AQL	26
IMPLEMENTAÇÃO DE ANSI/ASQC Z1.4.....	27
REGRAS DE ALTERAÇÃO ENTRE TIPOS DE INSPECÇÃO (ANSI/ASQC Z1.4).....	28
PAA POR VARIÁVEIS.....	32
VANTAGENS/DESVANTAGENS DOS PAA POR VARIÁVEIS	32
PAA POR VARIÁVEIS DE TIPO II	32
ELABORAÇÃO E IMPLEMENTAÇÃO DE PAA PARA ESPECIFICAÇÃO ÚNICA	32
ELABORAÇÃO E IMPLEMENTAÇÃO DE PAA PARA DUPLA ESPECIFICAÇÃO.....	33
PAA POR VARIÁVEIS DE TIPO I.....	35
MÉTODO-K.....	36
MÉTODO-M	37
PAA POR VARIÁVEIS NORMALIZADOS	39
IMPLEMENTAÇÃO DE ANSI/ASQC Z1.9.....	40
PLANOS DE AMOSTRAGEM PARA ACEITAÇÃO (SUMÁRIO).....	42
BIBLIOGRAFIA.....	42
EXERCÍCIOS.....	43
SOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS.....	53

Qualidade e Controlo Estatístico da Qualidade (CEQ)

“A qualidade de um produto ou serviço é a adequação desse produto ou serviço para a utilização pretendida pelo consumidor (ou cliente, ou utente, ou utilizador)” (Mitra, 1993). A definição normalizada (ISO 9000: 2000) é: “**grau de satisfação de requisitos dado por um conjunto de características intrínsecas**”. Juran & Gryna (1991) distinguem três componentes da qualidade: 1) Qualidade da concepção (*design*); 2) Qualidade da conformidade; e 3) Qualidade do desempenho (*performance*). É no contexto do segundo componente que se desenvolve o controlo estatístico da qualidade.

Simplisticamente, poderá pensar-se em CEQ como a combinação dum “sistema usado para manter determinado (desejado) nível de qualidade” (*Controlo da Qualidade*) com um “conjunto de métodos para elaborar conclusões válidas a partir de dados amostrais” (*Estatística*). O CEQ é a “totalidade dos meios e actividades através das quais uma empresa agro-alimentar pretende eliminar, em todas as fases do processo produtivo, as causas que originam defeitos” (Riveras Vilas, 1995).

Mas o **CEQ** é mais do que: 1) a actividade inspectora; ou 2) verificar se processo está conforme com um dado requisito ou especificação! Produzir com qualidade ou controlar a qualidade de produção? “*O CEQ é um meio de prescindir de CEQ!*”. Quando controlar? *Sempre que é possível melhorar a qualidade (ou poupar tempo/dinheiro)*; O que controlar? *As causas da variabilidade do processo ou dos defeitos*; Quem controla? *Os trabalhadores e os responsáveis*; Onde e como? *Na recepção da matéria-prima; durante o processo de produção ou fabricação; e/ou no controlo do produto final*. A norma ISO 11462-1: 2001 auxilia a implementação dum sistema de controlo estatístico da qualidade.

“Momentos” e Metodologias de Controlo, Características da qualidade

Existem dois «momentos» de controlo: 1) Controlo de fabricação (durante o processo produtivo); e 2) Controlo final do produto, entre operações de fabricação ou de recepção de matérias-primas. No primeiro caso, utilizam-se os **gráficos de controlo**, enquanto no segundo caso recorre-se aos **planos de amostragem para aceitação** (PAA).

Entende-se que características da qualidade são as propriedades dum produto (alimentar) que lhe conferem uma certa qualidade. No *Dicionário da Língua Portuguesa* (6ª Edição, Porto Editora) pode ler-se:

qualidade, s.f. propriedade ou condição natural de uma pessoa ou coisa que a distingue das outras; (...) valor; característica essencial; aptidão; atributo; (...) particularidade; (...).

Existem várias classificações possíveis das características da qualidade, em CEQ utilizaremos uma classificação em dois tipos: **Variáveis** (características mensuráveis e que podem ser expressas numericamente); e **Atributos** (características que se podem classificar como conformes ou não-conformes com determinada(s) especificações, *i.e.* não-defeituoso ou defeituoso).

Gráficos (ou cartas) de controlo

Os gráficos (ou cartas) de controlo, devidos aos trabalhos de Walter A. Shewart na década de 1920, permitem controlar um processo produtivo através da recolha sucessiva de amostras do produto e da confrontação da informação obtida a partir dessas amostras com as especificações pretendidas (resumidas no gráfico de controlo, Fig. 1), ou seja, *grosso modo* os gráficos de controlo permitem a **monitorização** da qualidade do processo produtivo.

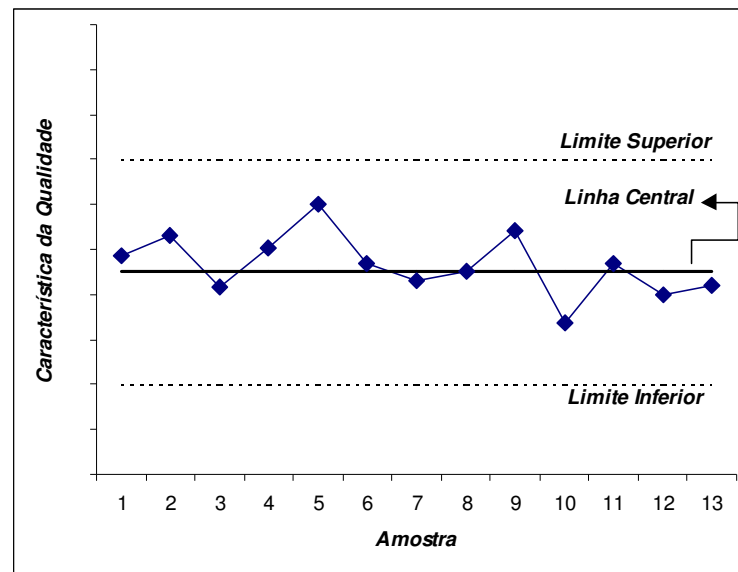


Fig. 1 – Gráfico de controlo-tipo. Representam-se as sucessivas amostras do processo produtivo (pontos e linhas) conjuntamente com o nível desejado/especificado de qualidade (linha contínua) e os limites superior e inferior de controlo (linha tracejada). Enquanto a informação extraída das amostras se encontrar entre os limites, pode-se considerar que o processo está controlado, i.e. está a produzir-se com a qualidade média pretendida.

Admitindo que existe alguma variabilidade nas características (da qualidade) dum produto, essa variação pode ter duas origens. Pode ser, por um lado, devida a "causas naturais", i.e. ao Acaso inerente a todos os processos. Por outro lado, poderá estar relacionada com causas identificáveis (máquinas desreguladas, falta-de-atenção dos operadores, deficiências da matéria-prima, etc.). A magnitude da variação originada por estas causas é superior àquela devida ao Acaso (que é possível descrever estatisticamente). Portanto, a variação será observável num gráfico apropriado (gráfico de controlo) e responsável pela classificação dum processo como fora-de-controlo! Representando, em conjunto, a informação relativa às sucessivas amostras, a qualidade média desejada/especificada e os limites de controlo, e interpretando os gráficos recorrendo a regras de análise/decisão é possível controlar, monitorizando, a qualidade do processo (de fabricação) em análise!

As normas internacionais ISO 7870-1: 2007, ISO 7873: 1993, ISO 8258-Corr. 1: 1993 e ISO 11462-1: 2001 abordam vários aspectos gerais e técnicos relativos aos gráficos de controlo (nestes apontamentos usaremos a designação **gráficos de controlo** em vez de **cartas de controlo** pois julgo ser uma tradução mais adequada do original em inglês *control charts*).

Em virtude dos tipos de variáveis considerados em CEQ, é possível elaborar gráficos de controlo apropriados para situações (processos produtivos) em que se pretende controlar a qualidade de variáveis ou atributos: gráficos de controlo por variáveis e por atributos, respectivamente.

Gráficos de controlo por variáveis

Introdução

Se a característica da qualidade for uma variável e se representarem as médias das amostras, \bar{x} , então teremos um **gráfico de controlo das médias** (*gráficos de \bar{x}*) que permitem controlar o nível médio da característica de qualidade no processo. Por outro lado, se se representarem as

amplitudes das amostras, R , então teremos **gráficos de controlo das amplitudes** (*gráficos de R*) que permitem controlar a variabilidade da característica de qualidade no processo¹.

Distribuição de probabilidades normal (revisão)

Consideraremos que é aplicável na maioria das situações relativas ao controlo da qualidade por variáveis a distribuição de probabilidades normal. A elaboração de gráficos de controlo por variáveis, que se apresentam mais à frente, assenta sobre e utiliza conceitos relacionados com a distribuição normal. A função densidade de probabilidade da curva normal é dada por $f(x) = 1/(\sigma\sqrt{2\pi})\exp[-(x-\mu)^2/2\sigma^2]$, em que μ e σ são, respectivamente a média e o desvio-padrão. Esta função é definida por μ e σ para valores $-\infty < x < +\infty$. Cerca de **99,7 % da área total** sob esta curva encontra-se entre os **limites $\mu \pm 3\sigma$** . Essa área é a representação gráfica da probabilidade duma variável X tomar valores entre $\mu - 3\sigma$ e $\mu + 3\sigma$ (Fig. 2).

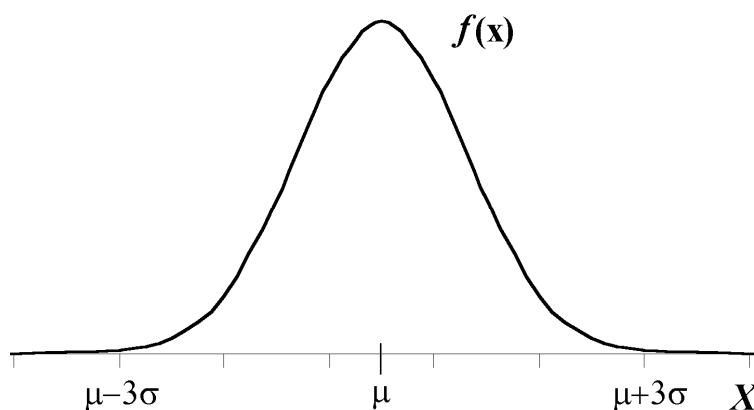


Fig. 2 – Representação da função densidade de probabilidades da distribuição normal (também denominada “Curva normal” ou “Curva de Gauss”). A função está centrada na média μ e a forma da curva é determinada pelo desvio-padrão σ .

Considerando que $\bar{X} \cap N(\mu, \sigma^2/n)$ e recorrendo a Z – distribuição normal reduzida², $Z \cap N(0,1)$ – podemos calcular os limites de controlo para k amostras de tamanho n , de modo similar aos limites de confiança ou recorrendo a valores tabelados (d_2 , A , A_2 , D_3 e D_4 no Quadro 1).

¹ É possível representar outros parâmetros do processo, *e.g.* desvio-padrão, sendo que a designação desses gráficos de controlo é análoga.

² A distribuição normal reduzida Z é extremamente útil para estudar situações em que a variável em causa se distribui de acordo com a “curva normal” pois, através da transformação $Z = (X - \mu)/\sigma$, é possível “reduzir” qualquer variável $X \cap N(\mu, \sigma^2)$ a uma “nova” variável $Z \cap N(0,1)$, cujas probabilidades estão tabeladas. No caso da média amostral $\bar{X} \cap N(\mu, \sigma^2/n)$ a transformação é $Z = (\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$. A importância desta distribuição de probabilidades estende-se por vários tópicos do CEQ relativos a características da qualidade mensuráveis (variáveis), nomeadamente os gráficos de controlo (a seguir) e os planos de amostragem para aceitação (mais à frente nestes apontamentos). No entanto, a utilização de Z pressupõe o conhecimento do desvio-padrão das observações, σ .

Elaboração de gráficos de controlo por variáveis

Decisões preparatórias para a elaboração de gráficos de controlo por variáveis

A elaboração de gráficos de controlo por variáveis deve considerar o seguinte: 1º definir claramente o objectivo do controlo da qualidade e a variável a controlar; 2º definir o tamanho das amostras, ou seja, o nº de itens/produtos a amostrar (geralmente $n=5$), e a frequência de amostragem (que depende do ritmo de produção) – devem seleccionar-se aleatoriamente³, “ao acaso”, da produção os elementos da amostra (cada amostra deve ser homogénea, embora se deva permitir variabilidade entre amostras); 3º elaborar formulários para aquisição dos dados; 4º determinar método de medição; e 5º elaborar o gráfico de controlo.

No que se segue, consideraremos duas situações em que se utilizam os gráficos de controlo por variáveis: as especificações do produto (agro-alimentar) são conhecidas; ou não.

Cálculo da linha central

Quando se **conhece a qualidade média do processo, μ , e/ou a sua variabilidade, σ** (i.e. existem especificações), a linha central (LC) nos gráficos de \bar{x} e de R obtém-se através de:

$$LC = \mu \quad (\text{no gráfico de } \bar{x}) \quad (1)$$

$$LC = d_2 \cdot \sigma \quad (\text{no gráfico de } R) \quad (2)$$

No caso em que **μ e/ou σ são desconhecidos**, é possível obter a linha central (LC) nos gráficos de controlo das médias e das amplitudes a partir de \bar{x}_i e R_i de cada uma das k amostras, ou seja, para a amostra i , a média é \bar{x}_i

$$\bar{x}_i = \frac{\sum x_i}{n} \quad (3)$$

e, por conseguinte, a linha central será a “médias das médias”

$$LC = \bar{\bar{x}} = \frac{\sum \bar{x}_i}{k} \quad (\text{no gráfico de } \bar{x}) \quad (4).$$

Analogamente, para a amostra i obtém-se a respectiva amplitude R_i

$$R_i = x_{i_{\max}} - x_{i_{\min}} \quad (5)$$

e, então, a linha central será

$$LC = \bar{R} = \frac{\sum R_i}{k} \quad (\text{no gráfico de } R) \quad (6).$$

Cálculo dos limites de controlo

Os limites superiores (*LSC*) e inferiores (*LIC*) para gráficos de \bar{x} , **com μ e σ conhecidos**, obtêm-

³ Para garantir a aleatoriedade, todos os itens/produtos devem ter igual probabilidade de serem escolhidas para integrar uma dada amostra.

se através de:

$$LSC = \mu + z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (7)$$

$$LIC = \mu - z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (8)$$

em que o valor de z (na prática, $z=1, 2$ ou 3) reflecte o grau de confiança na qualidade média dos produtos (para $z = 1$ é de cerca de 68%, para $z = 2$ é de aproximadamente 95% enquanto que para $z = 3$ ronda os 99,9%). Quando interessam apenas os limites para $z=3$, é possível usar as seguintes equações:

$$LSC = \mu + A\sigma \quad (9)$$

$$LIC = \mu - A\sigma \quad (10)$$

em $A = 3/\sqrt{n}$ se pode obter do Quadro 1 para o tamanho da amostra n pretendido. No caso dos gráficos de R , e conhecendo o desvio-padrão σ , os limites superior e inferior de controlo podem calcular-se através de:

$$LSC = d_2\sigma + z \cdot d_3\sigma \quad (11)$$

$$LIC = d_2\sigma - z \cdot d_3\sigma \quad (12)$$

em que d_2 e d_3 , se obtêm do Quadro 1. Para $z=3$, os limites de controlo determinam-se através de

$$LSC = D_2 \cdot \sigma \quad (13)$$

$$LIC = D_1 \cdot \sigma \quad (14)$$

sendo que os valores de $D_1 = d_2 - 3d_3$ e $D_2 = d_2 + 3d_3$ se obtêm-se do Quadro 1.

Se, porventura, **μ e/ou σ são desconhecidos** e sabendo que a melhor estimativa do desvio-padrão é dada por $\hat{\sigma} = \bar{R}/d_2$ então, os limites de controlo para os gráficos de \bar{x} , podem calcular-se pelas equações:

$$LSC = \bar{\bar{x}} + z \frac{\bar{R}}{d_2\sqrt{n}} \quad (15)$$

$$LIC = \bar{\bar{x}} - z \frac{\bar{R}}{d_2\sqrt{n}} \quad (16)$$

em que d_2 se obtêm do Quadro 1. Considerando apenas $z = 3$, as equações anteriores podem tomar a seguinte forma:

$$LSC = \bar{\bar{x}} + A_2 \cdot \bar{R} \quad (17)$$

$$LIC = \bar{\bar{x}} - A_2 \cdot \bar{R} \quad (18)$$

sendo que A_2 se pode obter do Quadro 1. No caso dos gráficos de R , com μ e/ou σ desconhecidos, os limites de controlo obtêm-se recorrendo às equações:

$$LSC = \bar{R} + z \cdot d_3 \left(\frac{\bar{R}}{d_2} \right) \quad (19)$$

$$LIC = \bar{R} - z \cdot d_3 \left(\frac{\bar{R}}{d_2} \right) \tag{20}$$

em que d_2 e d_3 , se obtêm do Quadro 1. Se se considerar $z=3$, então

$$LSC = \bar{R} \cdot D_4 \tag{21}$$

$$LIC = \bar{R} \cdot D_3 \tag{22}$$

uma vez que $D_3 = 1 - 3d_3/d_2$ e $D_4 = 1 + 3d_3/d_2$ se podem obter do Quadro 1.

Por vezes μ está pré-definido mas não se conhece mais nenhum parâmetro do processo, logo será necessário conjugar as equações mais adequadas. Por exemplo, pretende-se uma determinada qualidade média μ mas desconhece-se σ , então poderá recorrer-se às equações (15) a (18), substituindo \bar{x} por μ . Deve elaborar-se um gráfico de \bar{x} (e/ou R) para cada variável em estudo!

Quadro 1 - Valores de constantes úteis para a elaboração de gráficos de controlo por variáveis.

n	Gráficos das médias			Gráficos das amplitudes						
	(limites)			(linha central)		(limites)				
	A	A ₂	A ₃	d ₂	1/d ₂	d ₃	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄
2	2,121	1,881	2,659	1,128	0,8865	0,853	0,000	3,686	0,000	3,267
3	1,732	1,023	1,954	1,693	0,5907	0,888	0,000	4,358	0,000	2,574
4	1,500	0,729	1,628	2,059	0,4857	0,880	0,000	4,698	0,000	2,282
5	1,342	0,577	1,427	2,326	0,4299	0,864	0,000	4,918	0,000	2,114
6	1,225	0,483	1,287	2,534	0,3946	0,848	0,000	5,078	0,000	2,004
7	1,134	0,419	1,182	2,704	0,3698	0,833	0,204	5,204	0,076	1,924
8	1,061	0,373	1,099	2,847	0,3512	0,820	0,388	5,306	0,136	1,864
9	1,000	0,337	1,032	2,970	0,3367	0,808	0,547	5,393	0,184	1,816
10	0,949	0,308	0,975	3,078	0,3249	0,797	0,687	5,469	0,223	1,777
11	0,905	0,285	0,927	3,173	0,3152	0,787	0,811	5,535	0,256	1,744
12	0,866	0,266	0,886	3,258	0,3069	0,778	0,922	5,594	0,283	1,717
13	0,832	0,249	0,850	3,336	0,2998	0,770	1,025	5,647	0,307	1,693
14	0,802	0,235	0,817	3,407	0,2935	0,763	1,118	5,696	0,328	1,672
15	0,775	0,223	0,789	3,472	0,2880	0,756	1,203	5,741	0,347	1,653
16	0,750	0,212	0,763	3,532	0,2831	0,750	1,282	5,782	0,363	1,637
17	0,728	0,203	0,739	3,588	0,2787	0,744	1,356	5,820	0,378	1,622
18	0,707	0,194	0,718	3,640	0,2747	0,739	1,424	5,856	0,391	1,608
19	0,688	0,187	0,698	3,689	0,2711	0,734	1,487	5,891	0,403	1,597
20	0,671	0,180	0,680	3,735	0,2677	0,729	1,549	5,921	0,415	1,585
21	0,655	0,173	0,663	3,778	0,2647	0,724	1,605	5,951	0,425	1,575
22	0,640	0,167	0,647	3,819	0,2618	0,720	1,659	5,979	0,434	1,566
23	0,626	0,162	0,633	3,858	0,2592	0,716	1,710	6,006	0,443	1,557
24	0,612	0,157	0,619	3,895	0,2567	0,712	1,759	6,031	0,451	1,548
25	0,600	0,153	0,606	3,931	0,2544	0,708	1,806	6,056	0,459	1,541

Gestão de processos através de gráficos de controlo por variáveis

Regras de decisão para (interpretação de) gráficos de controlo

A interpretação dos resultados que se vão representando num gráfico de controlo é facilitada pela utilização sucessiva das seguintes cinco regras (e posteriormente dos casos especiais descritos na Fig. 4). Assim, considera-se que um processo está fora de controlo quando:

1ª Regra – um simples ponto fica fora dos *limites de controlo* para $z = 3$;

2ª Regra – do mesmo lado da linha central, dois de três pontos consecutivos ficam fora dos *limites de aviso* ($z = 2$);

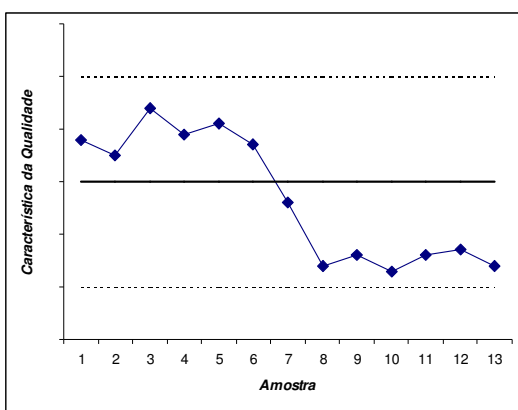
3ª Regra – do mesmo lado da linha central, quatro de cinco pontos consecutivos ficam fora dos limites para $z = 1$;

4ª Regra – oito ou mais pontos consecutivos ficam do mesmo lado da linha central;

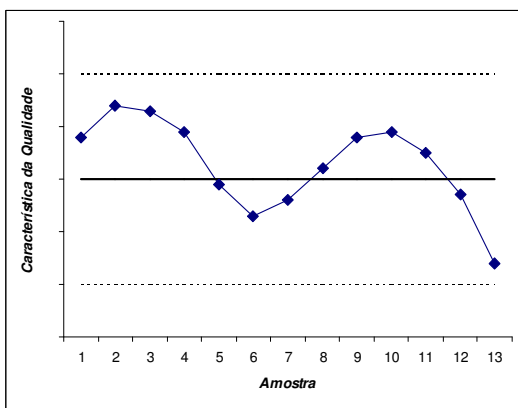
5ª Regra – os pontos representados no gráfico mostram tendências (ascendentes ou descendentes).

Interpretação (complementar) dos gráficos de controlo

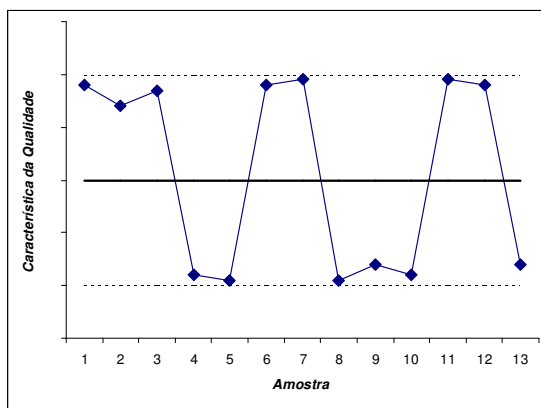
Para além destas regras (**de aplicação sucessiva**), existem algumas situações particulares que reflectem que o processo está fora-de-controlo (ainda que não se apliquem as regras anteriores). Alguns efeitos observáveis nos gráficos de controlo e possíveis causas estão ilustrados na Fig. 3.



(a)



(b)



(c)

Fig. 3 – Ilustrações de situações que, por um lado, apesar de eventualmente “cumprirem” as regras mencionadas anteriormente, ainda assim indicam que o processo está provavelmente fora-de-controlo; ou então, permitem perceber as (prováveis) causas que “justificam” a classificação do processo como fora-de-controlo. Legenda: (a) Efeito: “**Salto**”; **Causas:** a) alteração na qualidade da matéria-prima, b) alteração inadvertida ou intencional no processo, c) mudança de operador, d) erro na calibração, falha dum componente ou avaria do equipamento de medição. (b) Efeito: “**Padrão cíclico**”; **Causas:** a) alterações cíclicas das condições ambientais, b) alterações sazonais da matéria-prima, c) rotação ou fadiga-descanso do operador. (c) Efeito: “**Concentração de pontos perto dos limites**”; **Causas:** a) representação de resultados de mais de um operador ou equipamento ou matéria-prima.

Erros na inferência a partir de gráficos de controlo por variáveis

As conclusões que se obtêm dos gráficos de controlo não estão isentas de erro (em virtude dos pressupostos e técnicas usadas, nomeadamente a utilização de amostras e respectivas estatísticas). Distinguem-se dois tipos de erro na inferência estatística, erros de tipo I e de tipo II (Fig. 4).

A **utilização simultânea** das 5 regras de decisão para interpretação de gráficos de controlo, aumenta a probabilidade de se cometerem erros de tipo I. De facto, essa probabilidade é dada por:

$$\alpha_I = 1 - \prod_{i=1}^k (1 - \alpha_i) \tag{23}$$

em que α_I é a probabilidade total de cometer um erro de tipo I, k é o número de regras independentes usadas, \prod indica o produto de parcelas (como \sum indica o somatório) e α_i é a probabilidade de cometer erro de tipo I quando se usa cada das regras i .

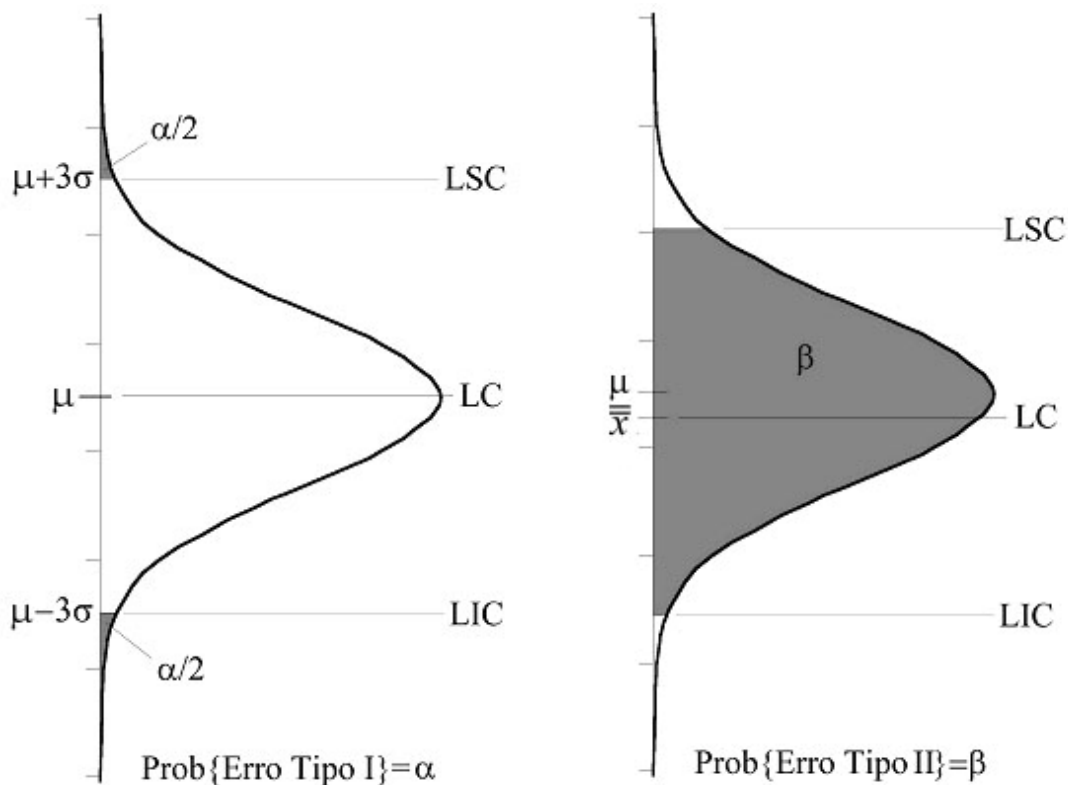


Fig. 4 – Ilustração das probabilidades associadas aos erros de tipo I e II (respectivamente no painel da esquerda e da direita). Erros de Tipo I são aqueles que resultam na conclusão errada de que o processo está-fora de controlo (rejeita-se uma H_0 verdadeira). Os Erros de Tipo II acontecem quando se conclui erradamente que um processo está sob controlo (ou seja, não se rejeita H_0 que é falsa). As probabilidades de se cometerem estes erros são, respectivamente, α e β .

Assim, as regras de decisão devem ser **usadas sucessivamente**: se não se aplicar a 1ª regra à situação em estudo, tenta-se a 2ª regra, e assim em diante até à 5ª regra (e situações

complementares). Se nenhuma se aplicar, e se não forem evidentes outros efeitos nos gráficos de controlo, então pode-se afirmar que o processo está sob controlo!

Algumas precauções na análise de gráficos de controlo por variáveis

- 1) Quando se utilizam simultaneamente gráficos de \bar{x} e de R , é melhor começar por analisar os gráficos de R (e só depois os gráficos de \bar{x}), porque os limites de controlo dos gráficos de \bar{x} dependem da variabilidade do processo. Só no caso da variabilidade do processo estar sob controlo é que aqueles limites têm algum significado.
- 2) Determinar a forma da distribuição das observações individuais antes de comparar a variabilidade do processo com as especificações. A “normalidade” não deve ser assumida, apesar de, em muitas situações, a distribuição de probabilidades normal ser adequada para descrever o processo em análise.
- 3) No caso de máquinas automáticas, o gráfico de R é bastante uniforme (em virtude da precisão da máquina) e o que varia é a “qualidade média” (que é observável no gráfico de \bar{x}). Portanto, não “faz grande sentido” analisar o gráfico de R !

Gráficos de controlo por atributos

Introdução

Os gráficos de controlo permitem *monitorizar* (*grosso modo* “acompanhar, medindo,”) um processo produtivo. Contudo, nem sempre “interessam” as características da qualidade que se podem medir (ou seja, as variáveis). É habitual utilizarem-se atributos para o controlo da qualidade. Um **Atributo** é uma característica da qualidade para a qual não se especifica um valor numérico e que se classifica como conforme ou não-conforme com determinada especificação.

Uma **característica da qualidade** que não cumpra (ou atinja) certa especificação (ou padrão) designa-se **não-conformidade**, ou **defeito**. Um **produto** ou **serviço** com uma, ou mais, não-conformidade(s) designa-se, por isso, **não-conforme** ou **defeituoso**.

Consideram-se os seguintes tipos de gráficos de controlo por atributos: Gráficos de p (para a proporção de defeituosos) e de np (para o número de defeituosos), que se baseiam na distribuição de probabilidades Binomial; e Gráficos de c (para o número de defeitos, quando n é constante) e de u (para o número de defeitos por unidade e para n variável) que recorrem à distribuição de probabilidades de Poisson. Nestes apontamentos, serão pormenorizados os casos dos gráficos de p e de np .

Como no controlo da qualidade por variáveis, os gráficos de controlo por atributos permitem controlar um processo produtivo através da recolha sucessiva de amostras do produto e da confrontação da informação obtida a partir dessas amostras com as especificações pretendidas (*cf.* Fig. 1). A diferença reside na informação que é representada e analisada.

Nestes gráficos de controlo (por atributos), as características da qualidade são representadas, por exemplo, pela proporção de itens não-conformes (ou defeituosos), nos **gráficos de p** , ou pelo seu número (nos **gráficos de np**). É, assim, possível controlar a qualidade dum processo produtivo confrontando a informação extraída das amostras com a linha central (que representa a “qualidade pretendida”) e com os limites de controlo. A interpretação e análise destes gráficos por atributos são em tudo similares àquelas referidas a propósito do controlo por variáveis (incluindo as regras de decisão e casos particulares, *cf.* Fig. 3).

Os **objectivos** dos **gráficos de p** para o controlo da qualidade poderão ser: 1) Controlar a qualidade de uma ou mais características de um produto, ou mesmo de uma máquina, operador ou departamento; 2) Providenciar uma “imagem”, uma indicação do estado geral da qualidade de um processo; ou 3) Providenciar informação que permite melhorar a qualidade de um produto ou serviço. No caso dos **gráficos de np** , a sua utilização permite estudar casos em que temos informação relativa ao número de elementos não-conformes observados directamente das amostras.

Distribuições de probabilidade Binomial e de Poisson

A **distribuição de probabilidades binomial** está relacionada com provas aleatórias de Bernoulli. Considerem-se n provas aleatórias independentes em que os resultados possíveis (em cada prova) são "sucesso" ou "falha" com probabilidade p e $(1 - p)$ de ocorrerem, respectivamente. Em CEQ, consideraremos que “sucesso” \approx “defeituoso”. A função densidade de probabilidade de x sucessos (ou defeituosos) em n tentativas (ou produtos) é dada por:

$$P(x) = C_x^n \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x} \quad (24)$$

Uma variável frequentemente usada em CEQ é a **proporção de itens defeituosos** (ou **fracção de não-conformes**) \hat{p} numa amostra de tamanho n , ou seja:

$$\hat{p} = \frac{x}{n} \quad (25)$$

Como $\hat{p} \cap \text{Binomial}(n, p)$ prova-se que o valor médio e a variância são, respectivamente:

$$E(\hat{p}) = p \quad (26)$$

$$V(\hat{p}) = p \cdot (1-p)/n \quad (27)$$

A **distribuição teórica de probabilidades de Poisson** deriva da binomial e é usada para modelar eventos, aleatórios e independentes, que são raros (isto é, a probabilidade de ocorrer um evento favorável, ou "sucesso" ou “defeituoso”, p , é reduzida $\approx np \leq 5$). A função densidade de probabilidades desta distribuição é:

$$P(x) = \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda} \quad (28)$$

em que $\lambda = n \cdot p$. Sendo que λ se pode considerar como o n° (médio) de defeituosos que ocorrem num determinado intervalo de tempo, espaço ou volume. O valor médio e a variância desta distribuição são iguais, isto é, $E(\hat{p}) = \text{Var}(\hat{p}) = \lambda = n \cdot p$.

Elaboração dos gráficos de controlo por atributos

Preparação dos gráficos de controlo por atributos

No caso dos gráficos de controlo de p e de np , as etapas para a sua elaboração são: 1) Seleccionar objectivos; 2) Determinar o tamanho da amostra n (geralmente $n > 50$ nos gráficos de p e $n \geq 4$ nos gráficos de np) e o intervalo de amostragem (n deve ser suficientemente grande para permitir

recolher elementos com e sem defeito; o intervalo entre amostras é função do ritmo de produção e custo da amostragem, entre outros factores); 3) Obter e registar os dados num formulário adequado (é necessário esclarecer o modo de classificação – manual, automática ou electrónica – e registar outros dados relevantes); 4) Calcular a linha central e limites de controlo (ver adiante); e 5) Implementar o gráfico de controlo por atributos.

Cálculo da linha central e dos limites de controlo

A linha central (*LC*) nos gráficos de *p* e *np*, **sem padrão definido** e para *k* amostras, obtém-se respectivamente, através de:

$$LC = \bar{p} = \frac{\sum \hat{p}_i}{k} = \frac{\sum x_i}{k \cdot n} \quad (29)$$

$$LC = n\bar{p} = \frac{\sum x_i}{k} \quad (30)$$

Os respectivos limites de controlo para $z = 1, 2$ (limites de aviso) ou 3 (limites de controlo) calculam-se a partir das equações

$$LSC = \bar{p} + z\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} \quad (31)$$

$$LIC = \bar{p} - z\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} \quad (32)$$

para os gráficos de *p*, e recorrendo às equações

$$LSC = n\bar{p} + z\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})} \quad (33)$$

$$LIC = n\bar{p} - z\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})} \quad (34)$$

no caso dos gráficos de *np*. Nestas equações, podem utilizar-se **valores conhecidos/especificados da LC** em vez de \bar{p} ou $n\bar{p}$, *i.e.* respectivamente \bar{p}_0 e $n\bar{p}_0$, consoante o tipo de gráfico em elaboração.

Nos **gráficos de *p***, calcula-se a proporção de não-conformes para cada amostra

$$\hat{p}_i = \frac{x_i}{n} \quad (35)$$

em que x_i é o nº de defeituosos numa dada amostra de *n* elementos, e representa-se essa informação *contra* a qualidade pretendida (*LC*) e os limites de controlo, obtidos pelas equações (29), (31) e (32).

Gestão de processos através de gráficos de controlo por atributos

Interpretação de gráficos de controlo por atributos

Para se decidir se um processo se encontra sob controlo, ou não, aplicam-se as **cinco regras para análise de gráficos de controlo** estudadas para os gráficos de controlo por variáveis (ver

páginas anteriores) e consideram, ainda, os “casos especiais”: “Padrão cíclico”; e “Tendência”. As causas mais comuns para estes dois “casos especiais” são, respectivamente, as mudanças regulares nos fornecimentos, e necessidade de maior controlo ou ajustamentos no processo (tendência crescente) ou diminuição do controlo (tendência decrescente).

Algumas precauções na análise de gráficos de controlo por atributos

- 1) Cuidado com as amostras de tamanho pequeno (nos gráficos de p), uma vez que o intervalo entre limites tende a ser maior quando n é mais pequeno e, assim, o processo fica sempre sob controlo;
- 2) Interpretar com cuidado sempre que cada ponto no gráfico de p se refere a várias características da qualidade (combinadas). Em caso de dúvida, elaborar gráficos de p separados para cada característica.

Vantagens e desvantagens dos gráficos de controlo por atributos relativamente aos gráficos de controlo por variáveis

As vantagens dos gráficos de controlo por atributos relativamente aos gráficos de controlo por variáveis são: 1) Algumas qualidades (ou características da qualidade) só podem ser observadas como atributos (por exemplo, o sabor de um alimento); 2) Noutros casos, é mais fácil, barato e rápido considerar atributos em vez de variáveis; 3) Podem integrar-se várias características da qualidade no mesmo gráfico de controlo por atributos; e 4) São mais úteis em níveis superiores de gestão.

Quanto às desvantagens, salientam-se as seguintes: 1) Os atributos fornecem informação sobre a conformidade, mas não do “grau” do desvio; e 2) Geralmente, os gráficos por variáveis fornecem mais informação acerca do processo e são mais úteis para optimização do processo.

Curvas características de operação

Introdução

As **curvas características de operação** (Curvas CO) são diagramas que permitem analisar o desempenho das técnicas estatísticas usadas em controlo da qualidade.

Por um lado, podem medir a “habilidade” dos gráficos de controlo para detectar alterações nos parâmetros do processo (*e.g.* média, \bar{x} , ou fracção de defeituosos, p). Especificamente, é um diagrama de dispersão da probabilidade do erro de tipo II (β) contra a variação dos valores do parâmetro do processo relativamente ao valor-alvo ou nominal (LC) quando o processo estava sob controlo (ver Fig. 6). Por outro lado, permitem avaliar a “performance”, ou o “poder discriminatório”, dos planos de amostragem para a aceitação em face de lotes com diferentes “graus” de itens defeituosos.

Abordaremos, a seguir, a aplicação das curvas características de operação (Curvas CO) aos gráficos de controlo (por atributos e variáveis). Mais à frente nestes apontamentos, a utilidade das Curvas CO para avaliar o desempenho de planos de amostragem para aceitação será estudada com maior pormenor.

Curvas CO, Gráficos de controlo por variáveis e o Erro de tipo II...

Sabendo que β é a probabilidade de erro de tipo II, então uma alteração da qualidade média do processo, LC , relativamente “à verdadeira” qualidade média, μ , corresponderia à probabilidade β (graficamente essa probabilidade corresponde a uma área, como se ilustra na Fig. 5). A probabilidade de se concluir (erradamente!) que o processo está sob controlo, apesar da média se ter alterado de 120 para 125, é equivalente a obter a área sombreada. Essa área corresponde à probabilidade de cometer um erro de tipo II, ou seja, $\beta = 1 - (p_1 + p_2)$.

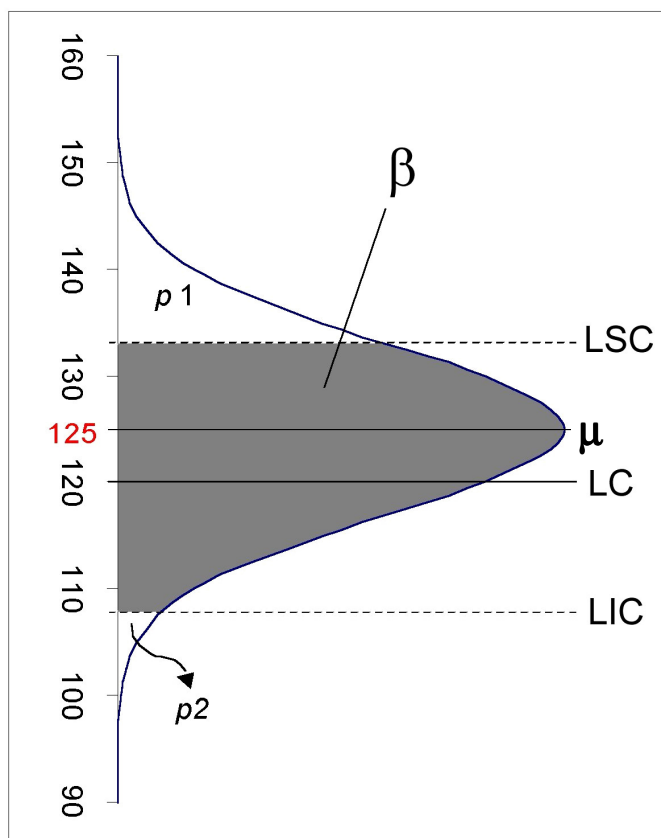


Fig. 5 – Representação esquemática da probabilidade de se cometerem erros de tipo II (β), ou seja, de se “aceitar” uma hipótese nula falsa. A área a cinzento ilustra essa probabilidade. Neste caso, a LC e os limites de controlo não se “ajustam” à realidade (descrita pela curva normal com média μ). No contexto dos gráficos de controlo, isso significa aceitar como controlado um processo que não o está!

Elaboração da Curva CO para gráficos de controlo da média

A elaboração das Curvas CO, para analisar gráficos de controlo de \bar{x} por exemplo, baseia-se no cálculo da probabilidade β para alterações dos valores do parâmetro do processo (e.g. a média) relativamente à situação actual. Pode resumir-se aos seguintes passos:

- 1) Determinar a linha central (LC) e os limites de controlo LSC e LIC (para $z = 3$);
- 2) Calcular as probabilidades p_1 e p_2 (Fig. 5) para cada um dos valores \bar{x}_i escolhidos arbitrariamente⁴, sabendo que⁵ para o LSC ($z=3$) se tem:

⁴ A elaboração dos gráficos de controlo por variáveis (e.g. gráficos das médias) baseia-se em conceitos relacionados com a distribuição de probabilidades normal.

$$z_1 = \frac{LSC_3 - \bar{x}_i}{\sigma/\sqrt{n}} \quad (36)$$

e que se pode determinar a probabilidade p_1 (ou seja, a área acima de LSC na Fig. 5) a partir da tabela de probabilidades acumuladas da distribuição normal reduzida ou, no Excel® para Windows, através da função =1-dist.normp(arg) em que arg é o valor de z_1 .

Para o LIC ($z=3$) tem-se então que:

$$z_2 = \frac{LIC_3 - \bar{x}_i}{\sigma/\sqrt{n}} \quad (37)$$

e obtém-se p_2 (ou seja, a área abaixo de LIC na Fig. 5) no Excel® através de =dist.normp(arg) em que arg é o valor de z_2 .

3) Logo, para cada \bar{x}_i a probabilidade de se concluir (erradamente!) que o processo está sob controlo, β , é:

$$\beta = 1 - (p_1 + p_2) \quad (38)$$

4) Com base nos diversos valores da probabilidade β calculados para cada \bar{x}_i pode elaborar-se a curva CO, *i.e.* o diagrama de dispersão entre \bar{x}_i e β (Fig. 6).

Interpretação das Curvas CO para gráficos de controlo das médias

A Curva CO permite conhecer a probabilidade de não se detectarem as alterações ao processo (*e.g.* média) com o gráfico de controlo (da média) utilizado. Recorrendo a um exemplo simples (ilustrado na Fig. 6), em que $LC=120$, $\sigma=8$ e $n=5$, poderiam estudar-se dois cenários:

- Se a média do processo se alterar para $\bar{x}_i=121$, então a probabilidade de, através do gráfico de \bar{x} , não se detectar essa modificação é 99,62%.
- Se, pelo contrário, a média se alterar para $\bar{x}_i=141$, a probabilidade do gráfico de \bar{x} não detectar aquela alteração é de apenas 0,21%.

Ao invés, poderia elaborar-se a curva CO para o segmento de valores de $\bar{x}_i < \bar{\bar{x}}$ ou μ ou LC .

Efeito de n sobre inferência

Se os restantes parâmetros do processo se mantiverem constantes, pode diminuir-se a probabilidade β , aumentando o tamanho da amostra n , pois desse modo se diminui a amplitude entre limites de controlo (como se observa na Fig. 7).

⁵ Quando se desconhece σ , pode-se usar o desvio-padrão da amostra s ou então \bar{R}/d_2 .

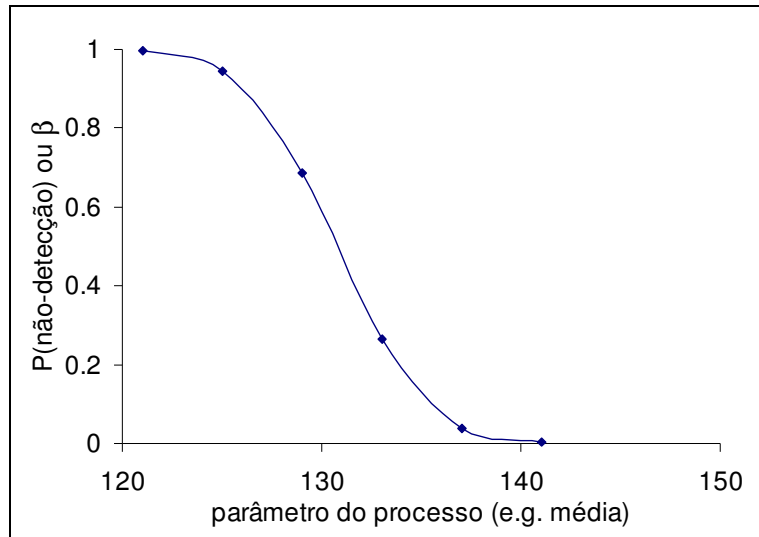


Fig. 6 – Curva característica de operação (Curva CO) para gráficos de controlo por variáveis. β é a probabilidade de se cometer um erro de tipo II, ou seja, a probabilidade relacionada com a não-rejeição de uma H_0 falsa, e os parâmetros (do processo) podem ser a média, a amplitude, etc.

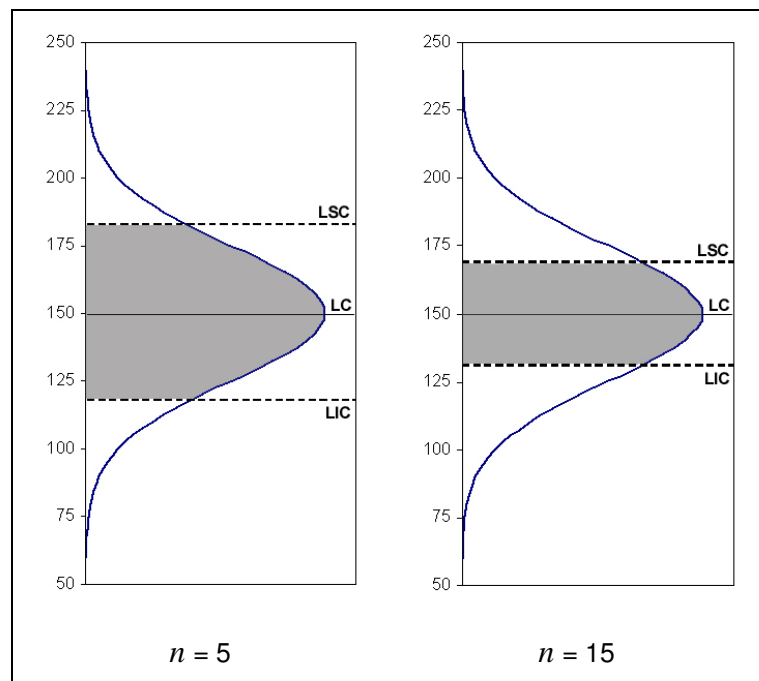


Fig. 7 – Ilustração da relação entre o tamanho da amostra n e a probabilidade de se cometerem erros de tipo II (representada pelas áreas a cinzento) em gráficos de controlo das médias (com $\mu=150$ e $\sigma=25$).

Elaboração de Curvas CO para gráficos de controlo de p

Considere-se um gráfico de p , em que LSC, LIC (ambos para $z=3$) e LC estão estabelecidos. Se a proporção média de defeituosos se alterasse para \bar{p}_i a $Prob\{\text{Erro de tipo II}\}$ ou β é dada por:

$$\beta = \Pr(\hat{p}_i < LSC \mid \bar{p}_i) - \Pr(\hat{p}_i \leq LIC \mid \bar{p}_i) \tag{39}$$

ou então por,

$$\beta = \Pr(x_i < n \cdot LSC \mid \bar{p}_i) - \Pr(x_i \leq n \cdot LIC \mid \bar{p}_i) \tag{40}$$

em que \hat{p}_i é a proporção de defeituosos, x_i é o número de defeituosos⁶ e n é o tamanho da amostra. Mas, como x_i é sempre inteiro, “ajustam-se” os cálculos através de:

$$r_1 = \lfloor n \cdot LSC \rfloor \text{ e de } r_2 = \lceil n \cdot LIC \rceil$$

em que $\lfloor n \cdot LSC \rfloor$ designa o maior inteiro $\leq n \cdot LSC$ (e.g. $\lfloor 4,9 \rfloor = 4$) e $\lceil n \cdot LIC \rceil$ corresponde ao menor inteiro $\geq n \cdot LIC$ (por exemplo, $\lceil 3,2 \rceil = 4$). Assim, pode calcular-se a probabilidade de não se detectar uma alteração no processo, β , de acordo com:

$$\beta = p_1 - p_2 = \Pr(x_i \leq r_1) - \Pr(x_i \leq r_2) \tag{41}$$

para cada valor de \bar{p}_i escolhido arbitrariamente. Na Fig. 9, apresenta-se a Curva CO resultante.

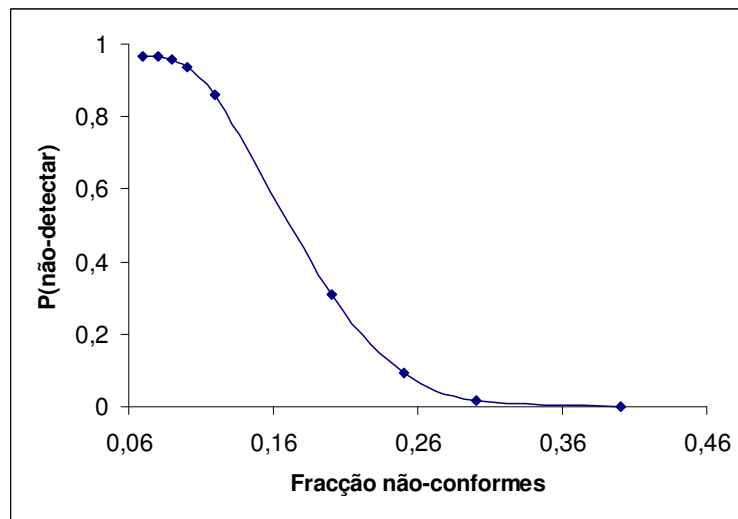


Fig. 8 – Curva característica de operação (Curva CO) para gráficos de controlo por atributos (neste caso gráficos de p).

Na realidade, as probabilidades de x defeituosos numa amostra cuja proporção média de defeituosas é \bar{p} , p_1 e p_2 , são dadas por:

$$p_1 = \sum_{x=0}^{r_1} C_x^{r_1} \cdot \bar{p}^x \cdot (1 - \bar{p})^{r_1-x} \tag{42}$$

$$p_2 = \sum_{x=0}^{r_2} C_x^{r_2} \cdot \bar{p}^x \cdot (1 - \bar{p})^{r_2-x} \tag{43}$$

Os valores de p_1 e p_2 podem obter-se no Excel® para Windows através da função =distrbinom(*arg1*; *arg2*; *arg3*; verdadeiro) em que *arg1* é r_1 ou r_2 (consoante se esteja

⁶ Em que x_i é resultado duma v.a. discreta $X \sim \text{Binomial}(n,p)$ (vd. Secção Distribuições de probabilidades Binomial e de Poisson).

a calcular p_1 ou p_2), $arg2$ é o tamanho da amostra n e $arg3$ é \bar{p}_i (a proporção média de defeituosos “escolhida arbitrariamente”).

Gráficos de controlo (Sumário)

Os gráficos de controlo por variáveis (*e.g.* média) ou por atributos (*e.g.* proporção de defeituosos), destinam-se a monitorizar processos produtivos ou prestações de serviços. Permitem avaliar “estatisticamente” se esse processo está, ou não, sob controlo, ou seja, se se está a produzir ou prestar um serviço com “certa e determinada” qualidade e dentro de determinados limites de qualidade (ou especificações).

Por outro lado, é possível medir a “sensibilidade” desses gráficos de controlo a eventuais alterações, inadvertidas ou intencionais, dos parâmetros do processo (*e.g.* média, fracção de defeituosos, etc.). Para esse fim, utilizam-se curvas características de operação (Curva CO), isto é, diagramas de dispersão de β *versus* parâmetro do processo. Os cálculos subjacentes às Curvas CO permitem determinar a probabilidade de não-deteção, pelos gráficos de controlo “actuais”, de modificações dos parâmetros dos processos.

Planos de amostragem para aceitação (PAA)

Introdução

A recepção de matérias-primas, o controlo entre operações de fabricação ou o controlo final do produto são “momentos” do controlo da qualidade. Quando o propósito da inspecção é aceitar, ou rejeitar, um (lote de) produto com base na sua conformidade com um padrão ou especificação é usual designar-se o procedimento como amostragem para aceitação. A decisão de aceitar, ou rejeitar, um lote pode ser baseada em três “tipos de inspecção”: *Inspecção a 0%* (quando a “história” do fornecedor é favorável ou não existe justificação económica para inspeccionar o lote); *Inspecção a 100%* (quando está envolvido um componente extremamente “crítico” ou o único fornecedor entrega matéria-prima de qualidade variável); ou *Planos de Amostragem para Aceitação* (que permitem ultrapassar dificuldades dos “tipos” anteriores).

Assim, os Planos de Amostragem para Aceitação (PAA) são um grupo de metodologias úteis para: 1) Aceitação de matéria-prima; 2) Inspeção do produto em certas fases da produção; ou 3) Inspeção final do produto acabado. Os PAA são utilizados para tomar uma decisão acerca da aceitação, ou rejeição, de um lote e não para estimar a sua qualidade, e não pretendem controlar, directamente, a qualidade do produto! Consideraremos dois tipos de PAA: por variáveis; e por atributos.

Os PAA, a formação dos lotes e a selecção da amostra

O modo como o lote é constituído influencia o PAA. Assim, é necessário considerar três condições importantes, *i.e.* os lotes devem ser homogéneos, constituídos por elevado número de elementos e devem estar “arrumados” de modo a facilitar a selecção das unidades da amostra.

Os critérios de selecção da amostra são extremamente importantes para assegurar a validade do trabalho de inspecção, por isso, os elementos da amostra têm de ser seleccionados aleatoriamente, por exemplo, através de amostragem com critério aleatório simples ou

estratificado⁷). Os “vícios” mais comuns na selecção de amostras são: 1) amostrar sempre a mesma posição em todas as unidades; 2) conhecer o produto e seleccionar apenas os defeituosos; 3) ignorar partes do lote que são inconvenientes de amostrar; e 4) decidir por um critério aleatório estratificado quando não se sabe se o lote é, ou não, homogéneo.

Vantagens e desvantagens dos PAA

Quando comparados com a inspecção a 100%, os PAA têm as seguintes **vantagens**: o custo é inferior (em produto, pessoal, etc.); é menor a manipulação do produto; são aplicáveis quando a análise é destrutiva; o “erro de inspecção” é menor; e a rejeição de lotes inteiros em virtude do número de defeituosos é motivação para o fornecedor melhorar a qualidade da matéria-prima.

Importantes **desvantagens** dos PAA são necessitar de maior planificação e documentação do que a inspecção a 100% e existir o risco de aceitar lotes “maus” (Erro de tipo II) e de rejeitar lotes “bons” (Erro de tipo I):

Conclusões a partir da amostra	Alternativas verdadeiras	
	H ₀ (lote "bom")	H ₁ (lote "mau")
H ₀ (decisão: aceitar o lote)	Conclusão correcta!	Erro de tipo II (probabilidade β de ocorrer ou “risco do consumidor”)
H ₁ (decisão: rejeitar o lote)	Erro de tipo I (probabilidade α de ocorrer ou “risco do produtor”)	Conclusão correcta!

PAA por atributos

No caso dos planos de amostragem por atributos, pretende-se aceitar (ou rejeitar) um lote com base na análise da proporção (ou número) de elementos defeituosos relativamente a um valor-padrão. Nestes apontamentos, vamos abordar com maior pormenor os casos em que se usam planos de amostragem para aceitação (PAA) simples (Fig. 10). Contudo, a extensão deste tópico para casos de PAA duplos é relativamente fácil (Fig. 11).

A implementação dum *Plano de Amostragem para Aceitação* (PAA) por atributos corresponde a: 1º Dum lote com N unidades, seleccionar aleatoriamente uma amostra de n elementos; e 2º Se o número de itens defeituosos na amostra $x_i \leq c$ (número de aceitação) pré-estabelecido aceita-se o lote. Se, pelo contrário, $x_i > c$ rejeita-se o lote⁸ (Fig. 10).

O número de aceitação c está associado ao conceito de nível de qualidade aceitável (“Acceptable Quality Level ou AQL, no original em inglês). **AQL** é a proporção máxima de defeituosos

⁷ O critério aleatório estratificado utiliza-se no caso de lotes não-homogéneos (quando as unidades do lote resultam de máquinas ou operadores diferentes, por exemplo).

⁸ No caso de PAA duplo/múltiplo, considera-se também o número de rejeição r para além de c (ver esquema na página seguinte).

aceitável. Por outro lado, é possível definir o nível de qualidade limitante (ou “Limiting Quality Level”, LQL, em inglês) como a proporção de defeituosos na amostra que não é aceitável⁹ e que, por isso, determina a rejeição do lote pelo PAA. A aceitação, ou rejeição dos lotes está relacionada com a fracção de defeituosos no lote p e com a probabilidade de aceitação P_a .

PAA por atributos (simples)

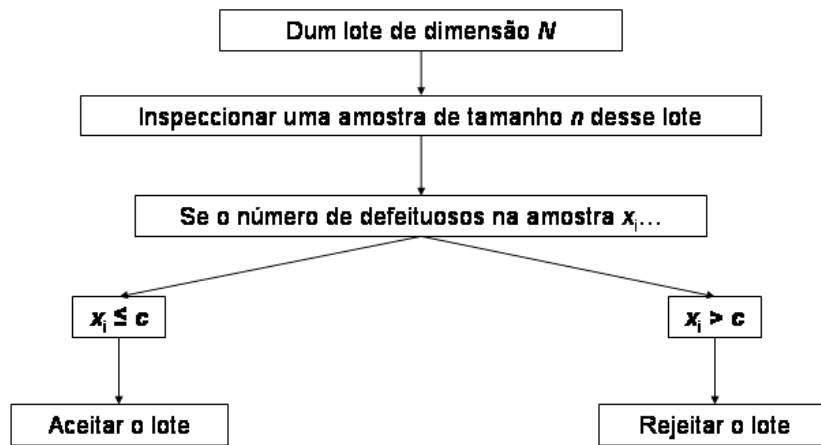


Fig. 9 – Esquema dos planos de amostragem por atributos simples.

PAA por atributos (duplos)

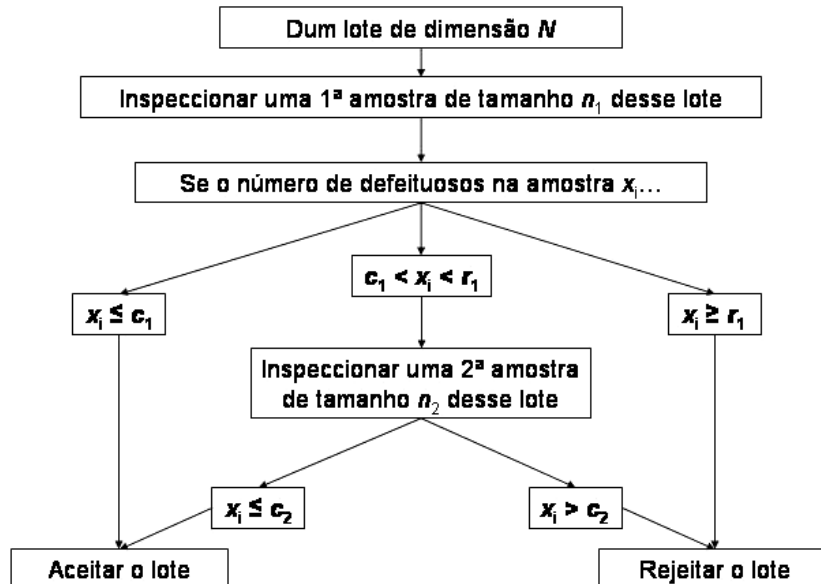


Fig. 10 – Esquema dos planos de amostragem por atributos duplos.

⁹ Quando expressa em % é usualmente referida por *Lot Tolerance Percent Defective (LTPD)* nos manuais em inglês.

PAA por atributos e a Curva CO “ideal”

Como vimos anteriormente, as curvas características de operação (Curvas CO) também podem medir o poder discriminatório dos PAA relativamente aos lotes que são submetidos a inspeção (*vide* página 16 e seguintes). A Curva CO “ideal” numa situação de amostragem para aceitação seria do género daquela ilustrada na Fig. 11. Uma determinada fracção de defeituosos p_0 era suficiente para distinguir **sempre** os lotes “bons” dos lotes “maus”! Infelizmente, na prática isso não acontece! De facto, em virtude de se analisarem amostras (e não os lotes por inteiro) o “sucesso” dos PAA depende das probabilidades α e β , respectivamente!

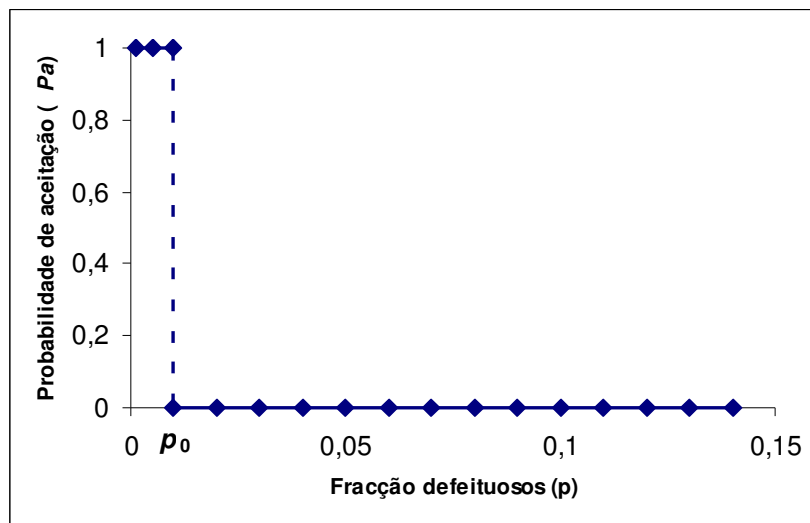


Fig. 11 – Curva característica de operação (Curva CO) “ideal”. Todos os lotes com uma fracção de defeituosos inferior a uma dada proporção p_0 seriam aceites, enquanto os lotes com maior proporção de defeituosos seriam rejeitados.

“Riscos do Produtor e do Consumidor”

A probabilidade α dum PAA rejeitar um lote “bom” – o “**Risco do Produtor**” – está associada a determinado AQL pré-estabelecido. Por outro lado, a probabilidade β de se aceitar um lote “mau” – o “**Risco do Consumidor**”¹⁰ – está relacionada com LQL.

Podemos calcular aquelas probabilidades através de:

$$\alpha = 1 - P_{AQAQL} \tag{42}$$

$$\beta = P_{ALQL} \tag{43}$$

em que P_A é a probabilidade de aceitação (associada a AQL ou LQL) e se calcula recorrendo às probabilidades acumuladas da distribuição binomial (ou de Poisson).

Com o PAA ilustrado na Fig. 12, a probabilidade de se rejeitar um lote com 1% de unidades defeituosas, um lote “bom”, é de 1,4%, isto é, $\alpha = 1 - P_{AQAQL}$. Por outro lado, o risco de aceitar

¹⁰ Alguns autores referem-se a α e β como “risco do fornecedor” e “risco do comprador” respectivamente.

um lote com 10% de itens não-conformes, um lote "mau", é de 11,2%, ou seja $\beta = P_{ALQL}$.

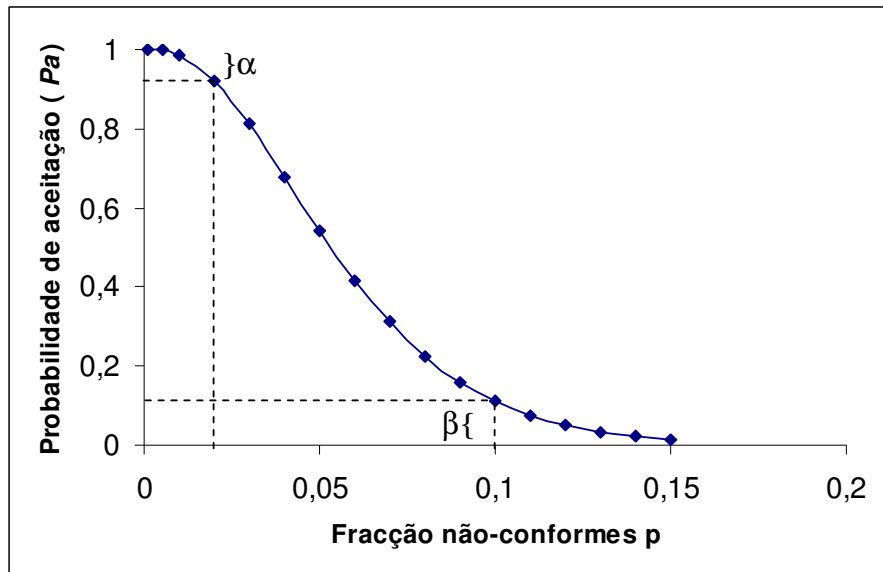


Fig. 12 – Curva característica de operação (Curva CO) para um plano de amostragem para aceitação por atributos em que $N=2000$, $n=50$, $c=2$, $AQL=0,02$ e $LQL=0,10$.

Elaboração de Curvas CO para PAA por atributos

A elaboração de Curvas CO do tipo B (que consideram processos contínuos e nos quais $N > 10n$) é similar à construção de curvas CO para gráficos por atributos¹¹. A probabilidade de aceitação P_A dum lote com x_i defeituosos pode calcular-se recorrendo à distribuição de probabilidades binomial para valores, escolhidos arbitrariamente, da proporção de defeituosos p . De facto,

$$P_A = \Pr(x_i \leq c) = \sum_{x=0}^c C_c^x \cdot p^x \cdot (1-p)^{c-x} \tag{44}$$

i.e., P_A é a probabilidade de ocorrerem até c defeituosos numa amostra de n elementos considerando uma fracção média de defeituosos no lote p . No Excel® corresponde a usar a função =distribinom(*arg1*; *arg2*; *arg3*; verdadeiro) em que *arg1* é c , *arg2* é n e *arg3* é p .¹²

Efeito de n e c sobre PAA por atributos

Ilustra-se na Fig. 13 a influência do tamanho da amostra n ou do número de aceitação c sobre as Curvas CO e por conseguinte sobre os PAA por atributos quando a dimensão dos lotes N (constante) é muito superior ao tamanho n das amostras.

¹¹ As curvas CO do tipo A elaboram-se para lotes individuais com tamanho finito e recorrem a conceitos relacionados com a distribuição de probabilidades hipergeométrica.

¹² Nos casos, em que p é muito reduzida e/ou N é grande, pode-se recorrer à distribuição de probabilidades de Poisson. Assim, sabendo que $\lambda=np$, a probabilidade de aceitar um lote com um número x_i de defeituosos pode-se obter no Excel® através de =poisson(*arg1*; *arg2*; verdadeiro) em que *arg1* é x_i e *arg2* é $n \cdot p$.

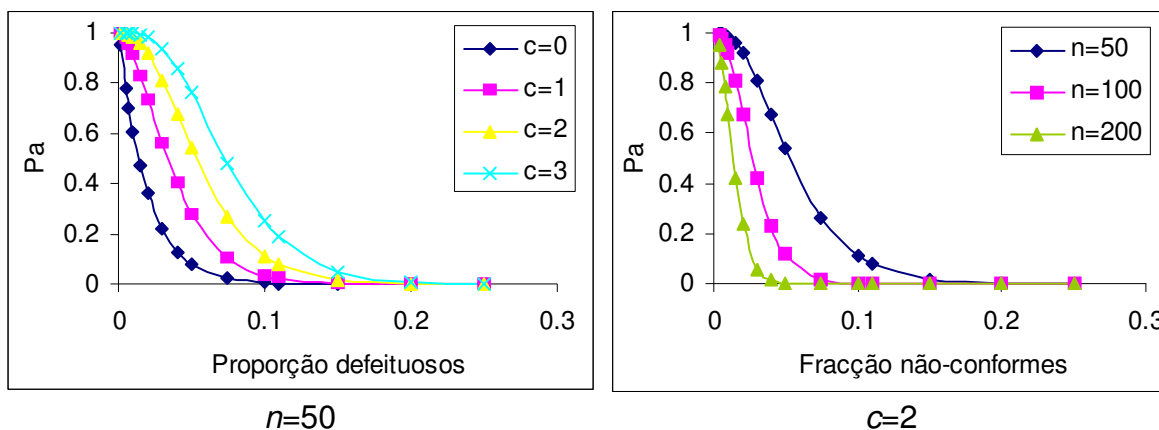


Fig. 13 – Influência do número de aceitação c (à esquerda para $n=50$) e do tamanho da amostra n (à direita para $c=2$) sobre a forma das curvas características de operação (Curvas CO).

PAA por atributos normalizados

Os planos de amostragem normalizados representam uma diminuição considerável do trabalho de preparação e estudo das Curvas CO, sob diferentes condições, para adaptação do PAA aos critérios de qualidade que a empresa pretende seguir.

As características específicas dum plano de amostragem dependem, em parte, do(s) aspecto(s) da qualidade que se pretendem considerar, *e.g.* os planos amostragem para análise microbiológica de alimentos (*vd.* Apontamentos das disciplinas de Microbiologia de Alimentos e/ou Análise Microbiológica de Alimentos).

Em contexto industrial, os planos desenvolvidos pelo *American National Standards Institute* e pela *American Society for Quality Control*, denominados ANSI/ASQC Z1.4: 2003, *American National Standard – Sampling Procedures and Tables for the Inspection by Attributes*, são provavelmente dos mais usados mundialmente (a nível do processo industrial). Estes planos podem aplicar-se numa variedade de situações, como por exemplo, amostragem para aceitação de matérias-primas, componentes ou do produto final, operações de manutenção, procedimentos administrativos, etc.

Os PAA definidos pela norma ANSI/ASQC Z1.4 derivam dos planos de amostragem do Exército Americano, *Military Standard 105E* (Tabelas MIL-STD), desenvolvidos durante a 2ª Guerra Mundial. Das várias alterações àquela versão, a de 1971 foi adoptada pelo ANSI como ANSI/ASQC Z1.4. Esta norma é revista regularmente e, em 2003, tomou a forma actual. Em 1974, a *International Organization for Standardization* (ISO) adoptou a norma ANSI/ASQC Z1.4 com pequenas alterações e editou as normas ISO 2859-1: 1989 e ISO 2859-2:1985 (estas são as versões mais recentes). Enquanto as Tabelas MIL-STD são planos de amostragem, para aceitar ou rejeitar um lote, as normas ANSI/ASQC Z1.4 e ISO 2859 são sistemas de amostragem, que providenciam regras para selecção do plano de amostragem mais apropriado à situação em análise.

ANSI/ASQC Z1.4 e o AQL

A parte mais importante da norma ANSI/ASQC Z1.4: 2003 é o AQL – *Acceptable Quality Level*, *i.e.*, a percentagem máxima de não-conformes que, para o fim de inspecção, pode ser considerada satisfatória como média do processo (*normalmente é definida no contrato pela autoridade responsável!*). É usual considerarem-se diferentes valores de AQL consoante o “grau de (importância) da não-conformidade”, ou seja, usar: $AQL \leq 0,1\%$ para não-conformidades

críticas; AQL = 1% quando as não-conformidades são graves; ou AQL = 2 a 4% se os defeitos são menos graves.

Implementação de ANSI/ASQC Z1.4

A implementação da norma ANSI/ASQC Z1.4 pode resumir-se nos seguintes passos:

- 1) Definir AQL;
- 2) Seleccionar *a priori* o nível geral de inspecção: do menos rigoroso (I) ao mais rigoroso (III) (é comum utilizar inicialmente o Nível II)¹³. A norma ANZI/ASQC Z1.4 recorre a três níveis gerais e quatro níveis especiais de inspecção (Fig. 14);

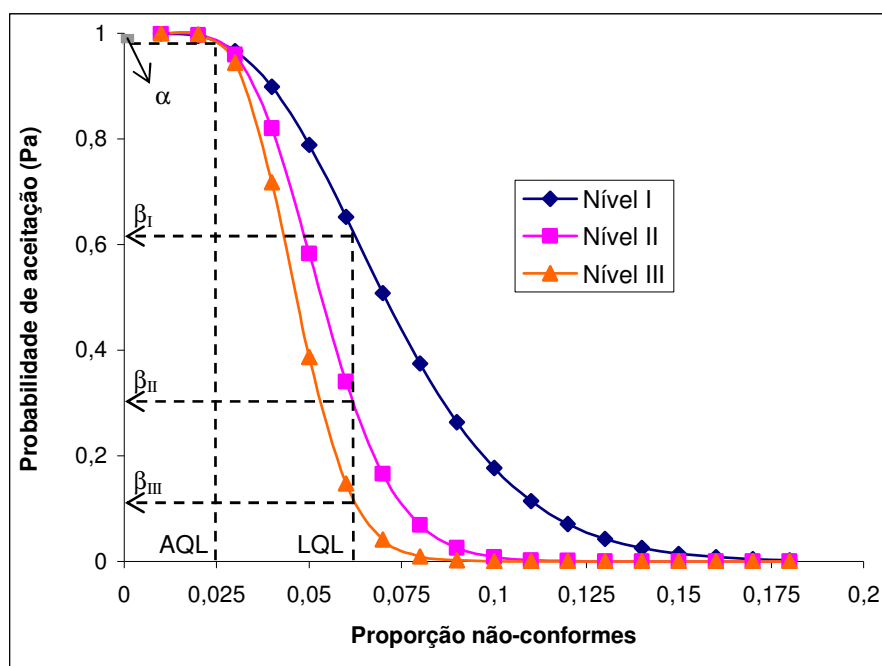


Fig. 14 – Na Norma ANSI/ASQC Z1.4. existem três níveis gerais de inspecção, Níveis I a III e quatro níveis especiais de inspecção, S-1 a S-4 (que se aplicam nos casos em que *n* é reduzido). Aqueles níveis determinam curvas CO diferentes que representam o "rigor" dos planos de amostragem, nomeadamente para diminuir o "risco de consumidor" β para um mesmo "risco do produtor" α .

- 3) A partir da dimensão do lote *N* e do nível geral de inspecção, determinar o código (Quadro 2);
- 4) Escolher o tipo de PAA (simples, duplo, múltiplo)¹⁴;
- 5) Para o tipo de PAA, código e tipo de inspecção (normal, reforçada ou reduzida), identificar o plano de amostragem, designadamente o tamanho da amostra *n* e o número de aceitação *c* (quadros 3 a 5)¹⁵;
- 6) Para um PAA simples: dum lote de *N* unidades, seleccionar uma amostra de *n* elementos; se

¹³ Enquanto o nível geral de inspecção é seleccionado *a priori*, os tipos de inspecção são ditados pelos resultados do processo de inspecção (*ver* Regras de alteração entre tipos de inspecção).

¹⁴ Nestes apontamentos, apenas vamos considerar os casos que envolvem PAA simples.

¹⁵ E, também, o *n*º de rejeição *r* para PAA duplos ou múltiplos.

nessa amostra o nº de defeituosos $x_i \leq c$ aceitar o lote, caso contrário ($x_i > c$) rejeitar o lote¹⁶. O tipo de inspeção varia ao longo do tempo “em resposta” aos resultados da aplicação do PAA (ver mais à frente).

Quadro 2 – Códigos a utilizar nas tabelas MIL-STD 105E (quadros seguintes) em função da dimensão do lote e nível de inspeção. As normas ANSI/ASQC Z1.4 e ISO 2859 também utilizam estes quadros.

Dimensão do lote <i>N</i>			Níveis gerais de inspeção			Níveis especiais de inspeção			
			I	II	III	S-1	S-2	S-3	S-4
2	a	8	A	A	B	A	A	A	A
9	a	15	A	B	C	A	A	A	A
16	a	25	B	C	D	A	A	B	B
26	a	50	C	D	E	A	B	B	C
51	a	90	C	E	F	B	B	C	C
91	a	150	D	F	G	B	B	C	D
151	a	280	E	G	H	B	C	D	E
281	a	500	F	H	J	B	C	D	E
501	a	1200	G	J	K	C	C	E	F
1201	a	3200	H	K	L	C	D	E	G
3201	a	10000	J	L	M	C	D	F	G
10001	a	35000	K	M	N	C	D	F	H
35001	a	150000	L	N	P	D	E	G	J
150001	a	500000	M	P	Q	D	E	G	J
500001	e mais		N	Q	R	D	E	H	K

Regras de alteração entre tipos de inspeção (ANSI/ASQC Z1.4)

No diagrama da Fig. 15, as setas indicam as possíveis alterações no tipo de inspeção a aplicar e que derivam dos resultados do processo de inspeção.

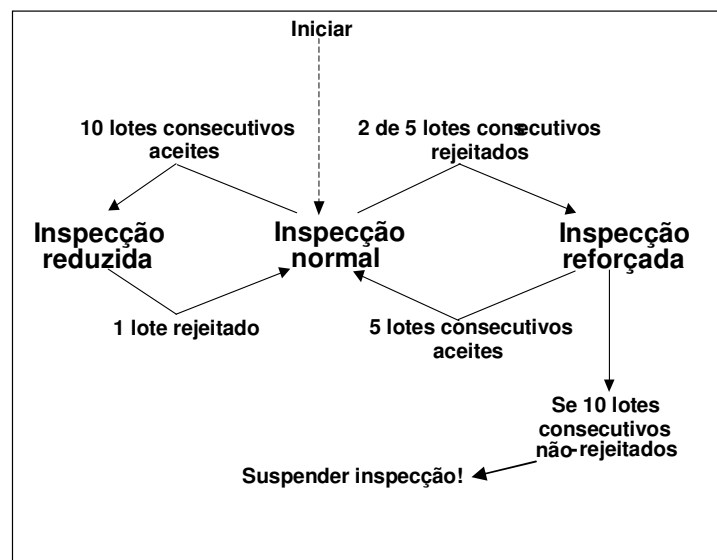


Fig. 15 – Diagrama das principais regras de alteração entre tipos de inspeção quando se utiliza a normal ANSI/ASQC Z1.4 (ou ISO 2859-1/2).

¹⁶ Por outro lado, para PAA duplos, se na 1ª amostra $c < x_i < r$, seleccionar "nova amostra" e se novamente nesta amostra $c < x_i < r$, aceitar o lote mas no próximo lote "aumentar" nível de inspeção!

Quadro 3 - Tabela com valores do número de aceitação (c) e de rejeição (r) para diferentes combinações de AQL e n, e inspeção de tipo normal (adaptado de Mitra, 1993).

Código	n	Nível de Qualidade Aceitável para inspeção normal (AQL, %)																					
		0,01	0,015	0,025	0,04	0,065	0,1	0,15	0,25	0,4	0,65	1	1,5	2,5	4	6,5	10	15	25	40	65		
		c	r	c	r	c	r	c	r	c	r	c	r	c	r	c	r	c	r	c	r	c	r
A	2																						
B	3																						
C	5																						
D	8																						
E	13																						
F	20																						
G	32																						
H	50																						
J	80																						
K	125																						
L	200																						
M	315																						
N	500																						
P	800																						
Q	1250																						
R	2000																						

Quadro 4 - Tabela com valores do número de aceitação (c) e de rejeição (r) para diferentes combinações de AQL e n, e inspeção de tipo reduzida (adaptado de Mitra, 1993).

Código	n	Nível de Qualidade Aceitável para inspeção reduzida (AQL, %)																					
		0,01	0,015	0,025	0,04	0,065	0,1	0,15	0,25	0,4	0,65	1	1,5	2,5	4	6,5	10	15	25	40	65		
A	2																						
B	2																						
C	2																						
D	3																						
E	5																						
F	8																						
G	13																						
H	20																						
J	32																						
K	50																						
L	80																						
M	125																						
N	200																						
P	315																						
Q	500																						
R	800																						

PAA por variáveis

Os PAA por variáveis são usados quando interessa decidir acerca da aceitação (ou rejeição) de um lote com base em característica(s) da qualidade mensurável(is) (isto é, considerando uma variável). Pressupõem que a distribuição de probabilidades da variável é conhecida (por exemplo, distribuição de probabilidades normal).

Existem PAA por variáveis de dois tipos: de **TIPO I**, que relacionando a média da amostra \bar{x} , o desvio-padrão σ e a fracção de não-conformes p permitem decidir sobre a aceitação, ou rejeição, dum lote; e de **TIPO II**, que consideram “directamente” os parâmetros do processo, por exemplo a média \bar{x} , para decidir sobre a aceitação de um lote (úteis para decidir sobre lote com base na “qualidade média”).

Para os PAA por variáveis recordem-se, ainda, os conceitos de “Risco do produtor”, α , de “Acceptable Quality Level” (AQL), de “Risco do consumidor” (β) e de “Limiting Quality Level” (LQL) referidos a propósito dos PAA por atributos e das Curvas CO.

Vantagens/Desvantagens dos PAA por variáveis

Entre as vantagens destes planos relativamente aos PAA por atributos, salientem-se: 1) necessitam de amostras de tamanho menor (para níveis comparáveis de α , AQL, β e LQL); 2) providenciam mais informação (relativamente ao “grau” de não-conformidade); e 3) são mais úteis para a optimização do processo.

As desvantagens relativamente aos PAA por atributos são: 1) cada característica requer um PAA distinto; 2) os custos administrativos e de inspecção são geralmente superiores; e 3) é necessário conhecer (ou estimar) a distribuição da variável no processo.

PAA por variáveis de TIPO II

Elaboração e Implementação de PAA para especificação única

Num dado processo, sabe-se que $\bar{X} \cap N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$ e conhece-se a variabilidade σ da variável (característica da qualidade mensurável). Os parâmetros dum plano de amostragem (simples) deste tipo são o tamanho da amostra n e o limite de aceitação \bar{X}_A (inferior ou superior). Assim, dum lote com N unidades, selecciona-se aleatoriamente uma amostra de n elementos e para esses elementos obtém-se a média da amostra \bar{x} da variável. No caso de se estabelecer um limite de aceitação inferior (\bar{X}_{AI}), se $\bar{x} < \bar{X}_{AI}$ então rejeita-se o lote; pelo contrário, se $\bar{x} \geq \bar{X}_{AI}$, aceita-se o lote (o inverso se decidia para um limite superior \bar{X}_{AS} em vez de \bar{X}_{AI}).

De facto, deseja-se aceitar lotes de “boa qualidade média” \bar{X}_1 com probabilidade $1 - \alpha$ e aceitar lotes de “má qualidade média” \bar{X}_2 com probabilidade β [ou seja, a Curva CO deste plano deverá passar pelos pontos $(\bar{X}_1, 1 - \alpha)$ e (\bar{X}_2, β) , ver Fig. 17]. Recorrendo à distribuição normal reduzida podemos obter os valores de Z correspondentes às probabilidades pretendidas:

$$Z_\alpha = \frac{\bar{X}_A - \bar{X}_1}{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)} \quad (46)$$

$$Z_\beta = \frac{\bar{X}_A - \bar{X}_2}{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)} \quad (47)$$

Resolvendo simultaneamente ambas as equações, obtém-se o tamanho da amostra n **arredondando por excesso** ao inteiro mais próximo o resultado dado por:

$$n = \left[\frac{(Z_\beta - Z_\alpha)\sigma}{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} \right]^2 \quad (48)$$

Substituindo esta expressão numa das anteriores, temos que o limite de aceitação é dado por:

$$\bar{X}_A = \frac{Z_\beta \bar{X}_1 - Z_\alpha \bar{X}_2}{Z_\beta - Z_\alpha} \quad (49)$$

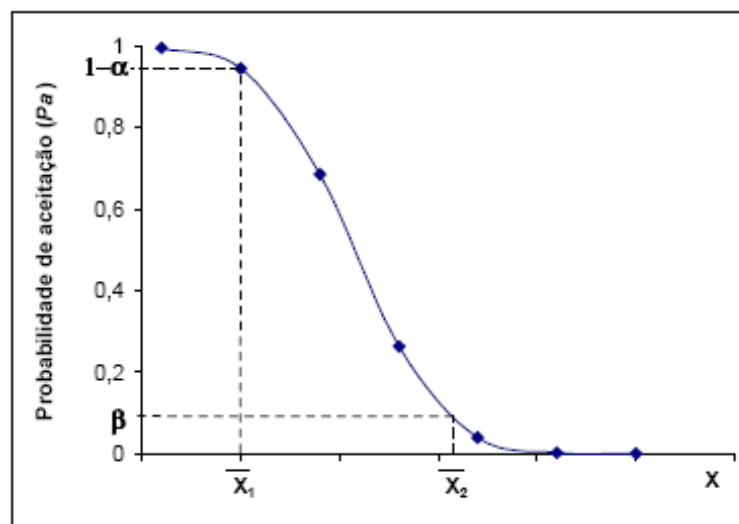


Fig. 16 – Curva característica de operação (Curva CO) para planos de amostragem por variáveis de tipo II com especificação única (neste caso limite superior).

Assim, o PAA a implementar deverá ser: 1) Obter amostra aleatória de n elementos; 2) Calcular a média da amostra \bar{x} ; 3) A consequente decisão sobre o destino do lote depende de \bar{X}_A ser o limite inferior ou superior de especificação. Se $\bar{X}_2 > \bar{X}_1$, então limite é superior e, por isso, utiliza-se Z_α e $-Z_\beta$ e se $\bar{x} > \bar{X}_A$ rejeita-se o lote. Pelo contrário, se $\bar{X}_2 < \bar{X}_1$, então limite é inferior e, por isso, considera-se $-Z_\alpha$ e Z_β e a regra de decisão será: se $\bar{x} < \bar{X}_A$ rejeita-se o lote (Fig. 17). Os valores absolutos de Z_α e de Z_β podem obter-se no Excel® usando =ABS (INV . NORMP (arg)), em que arg são α ou β , respectivamente.

Elaboração e Implementação de PAA para dupla especificação

Sabe-se que $\bar{X} \cap N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$, conhece-se σ do processo e os parâmetros de um plano deste tipo (simples) serão o tamanho da amostra n e os limites de aceitação inferior \bar{X}_{AI} e superior \bar{X}_{AS} . De um lote com N unidades, selecciona-se aleatoriamente uma amostra de n elementos. Se $\bar{X}_{AI} \leq \bar{x} \leq \bar{X}_{AS}$ então aceita-se o lote; caso contrário, rejeita-se o lote.

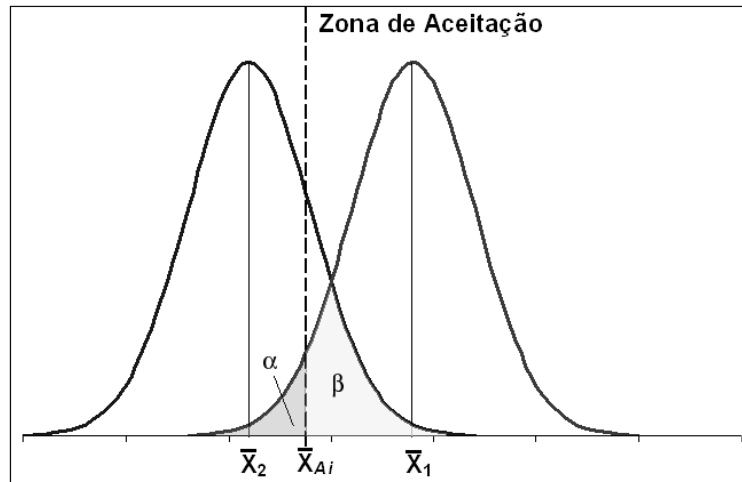


Fig. 17 – Ilustração dos conceitos usados num plano de amostragem para aceitação (PAA) por variáveis de tipo II e com uma única especificação (neste caso, ilustra-se uma situação que envolve um limite inferior). A linha tracejada vertical limita uma zona de aceitação (à direita da linha, *i.e.* para $\bar{X} > \bar{X}_{Ai}$) e duas áreas que correspondem às probabilidades α e β ("condições iniciais" relativamente aos riscos do produtor e do consumidor, respectivamente).

Neste contexto, pretende-se aceitar lotes de “boa qualidade média” \bar{X}_1 com probabilidade $1 - \alpha$ e aceitar lotes em que a “má qualidade média” é inferior a \bar{X}_{2I} ou superior a \bar{X}_{2S} com probabilidade β [a Curva CO deste plano deverá passar pelos pontos $(\bar{X}_1, 1 - \alpha)$, (\bar{X}_{2I}, β) e (\bar{X}_{2S}, β)]. Admitindo-se que \bar{x} se distribui normalmente e que \bar{X}_1 é o ponto intermédio entre \bar{X}_{2I} e \bar{X}_{2S} , podem obter-se as seguintes equações:

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{\bar{X}_{AS} - \bar{X}_1}{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)} \tag{50}$$

$$-Z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{\bar{X}_{AI} - \bar{X}_1}{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)} \tag{51}$$

$$Z_{\beta} = \frac{\bar{X}_{AI} - \bar{X}_{2I}}{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)} \tag{52}$$

$$-Z_{\beta} = \frac{\bar{X}_{AS} - \bar{X}_{2S}}{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)} \tag{53}$$

que resolvidas (simultaneamente) permitem obter os parâmetros deste PAA (n e \bar{X}_{AI} e \bar{X}_{AS}). Os valores absolutos de $Z_{\alpha/2}$ e Z_{β} podem obter-se usando =ABS (INV .NORMP (arg)) no Excel®, em que *arg* é $\alpha/2$ ou β , respectivamente. A Fig. 18 ilustra os cálculos apresentados acima.

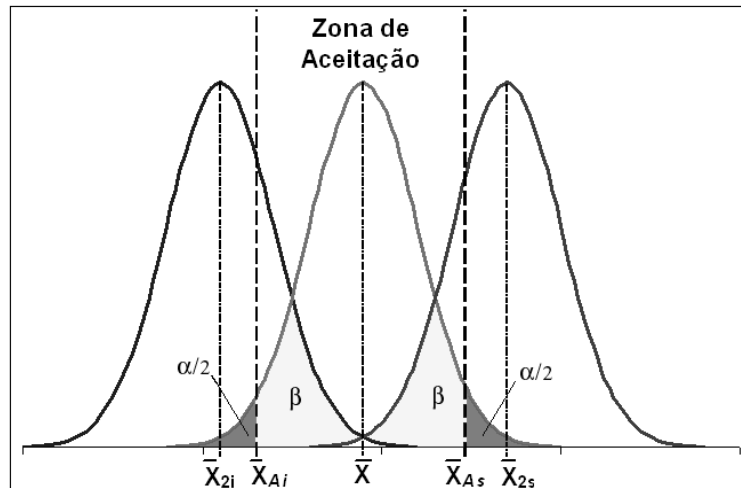


Fig. 18 – Ilustração dos conceitos envolvidos num PAA por variáveis de tipo II e dupla especificação (ver legenda da figura anterior).

PAA por variáveis de TIPO I

Estes PAA pressupõem que a variável se distribui normalmente, ou seja, se $X \cap N(\mu, \sigma)$, e resultam da “interligação” entre a qualidade média “desejada” no lote μ , a informação que se obtém a partir da média duma amostra \bar{x} desse lote e a fracção aceitável de defeituosos p no lote. Estes PAA estão na base da Norma ANSI/ASQC Z1.9. Por exemplo, no caso de um limite inferior a relação entre p , μ e σ está ilustrada na Fig. 19.

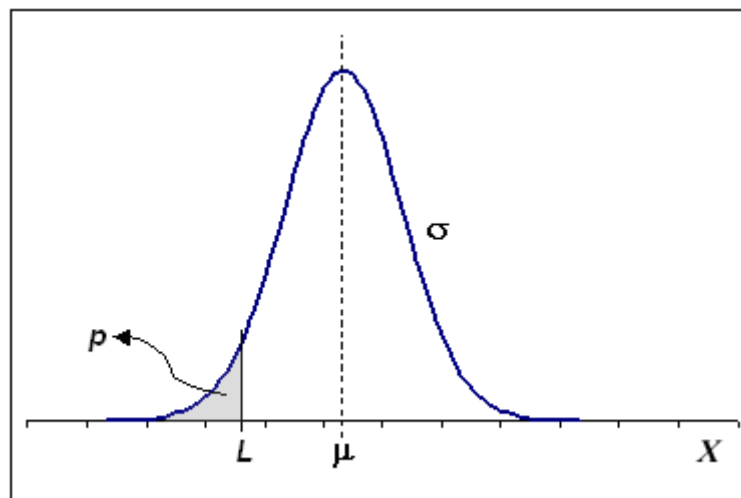


Fig. 19 – Ilustração da relação entre a qualidade média (μ), a variabilidade (σ) da variável X (relacionada com a “forma” da curva) e a proporção de defeituosos no lote (p), a área à esquerda de L .

Por outras palavras, o limite inferior L define uma área (probabilidade) p que corresponde à fracção de não-conformes aceitável. Comparando a média da amostra \bar{x} com aquele limite é possível decidir aceitar, ou rejeitar, um determinado lote.

Estes PAA por variáveis podem obter-se através de duas formas ou procedimentos: Método- k ; ou Método- M .

Método-k

Utilizam-se nos casos em que se estabelece **apenas um limite**, ou superior U ou inferior L . Seja v.a. $X \cap N(\mu, \sigma)$. Deseja-se aceitar lotes de “boa qualidade” (*i.e.* com proporção de defeituosos p_1) com probabilidade $1 - \alpha$ e aceitar lotes de “má qualidade” (*i.e.* com p_2) com probabilidade β . A Curva CO deste plano deverá passar pelos pontos $(p_1, 1 - \alpha)$ e (p_2, β) .

Recorrendo ao nomograma (Fig. 20) pode obter-se, com facilidade mas de forma aproximada (veja-se a “versão matemática” mais à frente), o tamanho da amostra n e o “valor crítico” k da proporção de defeituosos p . Para tal, desenhar no nomograma as linhas que unem os pontos p_1 e p_2 no eixo à esquerda com os pontos $1 - \alpha$ e β no eixo à direita, respectivamente. A intersecção permite obter k e n (que se lê no eixo em baixo ou em cima, consoante se conheça, ou não, o desvio-padrão σ)¹⁷.

Então, para uma amostra de tamanho n do lote em apreciação com média \bar{x} , calcular Z_L ou Z_U :

$$Z_L = \frac{\bar{x} - L}{\sigma} \tag{54}$$

$$Z_U = \frac{U - \bar{x}}{\sigma} \tag{55}$$

consoante o limite de especificação pretendido seja inferior (Z_L) ou superior (Z_U) (a distribuição normal reduzida Z deriva da distribuição normal e quanto maior Z , menor p).

Do lote em apreciação seleccionar uma amostra aleatória de n elementos. Nessa amostra, calcular Z_L ou Z_U a partir da média \bar{x} de valores da variável (característica da qualidade). Se $Z \geq k$, aceitar o lote (*i.e.* a média é suficientemente “distante” do limite de especificação para assegurar que a proporção de defeituosos p do lote é satisfatória); caso contrário rejeitar o lote.

Matematicamente, para AQL (p_1), LQL (p_2), “risco do produtor” (α) e “risco do consumidor” (β) determinados, os parâmetros k e n dum PAA (de tipo I) obtêm-se, considerando os valores absolutos de z_i (que se podem obter no Excel® com =ABS(INV.NORMP(arg) *vd.* pág. anterior) e σ conhecido, através de:

$$k = \frac{Z_{p_2} \cdot Z_\alpha + Z_{p_1} \cdot Z_\beta}{Z_\alpha + Z_\beta} \tag{56}$$

$$n = \left(\frac{Z_\alpha + Z_\beta}{Z_{p_1} - Z_{p_2}} \right)^2 \tag{57}$$

No caso de não se conhecer o desvio-padrão σ , então o tamanho da amostra n calcula-se usando:

$$n = \left(\frac{Z_\alpha + Z_\beta}{Z_{p_1} - Z_{p_2}} \right)^2 \left(1 + \frac{k^2}{2} \right) \tag{58}$$

Os resultados para n devem ser arredondados, por excesso, ao número inteiro mais próximo. Na Fig. 21 ilustra-se a relação entre a probabilidade de aceitação P_A , Z_L e k .

¹⁷ Quando σ é desconhecido seguir curva de k até topo do gráfico; caso contrário, desenhar linha recta vertical do ponto k até à base. Se σ é desconhecido, pode ser substituído por s (desvio-padrão da amostra, calculado com denominador $n - 1$) nas equações apresentadas para obter Z_L e Z_U sem prejuízo de maior no rigor dos resultados.

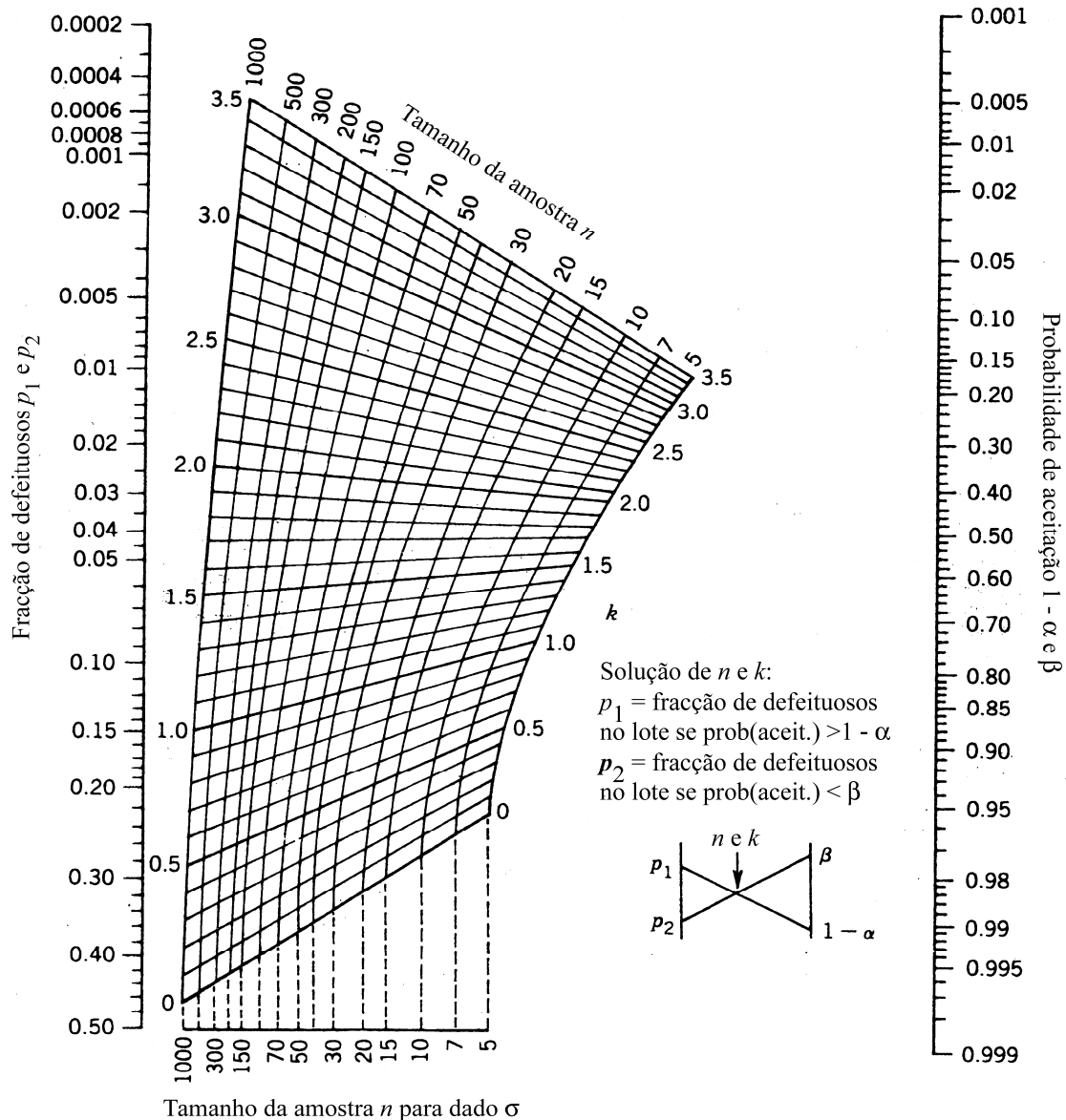


Fig. 20 – Nomograma para obtenção do tamanho da amostra n e do valor crítico k a partir das probabilidades p_1 , p_2 , α e β previamente estabelecidas (adaptado de Montegomery, 2005).

Método-M

Este método pode usar-se nos casos **com especificação única** (apenas um limite) ou **dupla especificação** (quando estão envolvidos dois limites).

Nas condições enunciadas anteriormente, obtém-se um PAA simples de parâmetros n e M da seguinte forma: de modo similar ao descrito para o Método- k , obtém-se n e k a partir do nomograma (Fig. 20) ou através das equações (56) a (58); depois determina-se, da Fig. 22, a “proporção máxima permitida de defeituosos” M , da intersecção da curva para n com a recta vertical de abcissa igual a:

$$k' = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{k\sqrt{n}}{n-1} \right) \tag{59}$$

Também se pode calcular M considerando que $M = \Pr(Z > k\sqrt{n/(n-1)})$, o que através do

Excel® para Windows se obtém através de $=1-DIST.NORMP(arg)$, em que arg é o resultado de $k\sqrt{n/(n-1)}$.

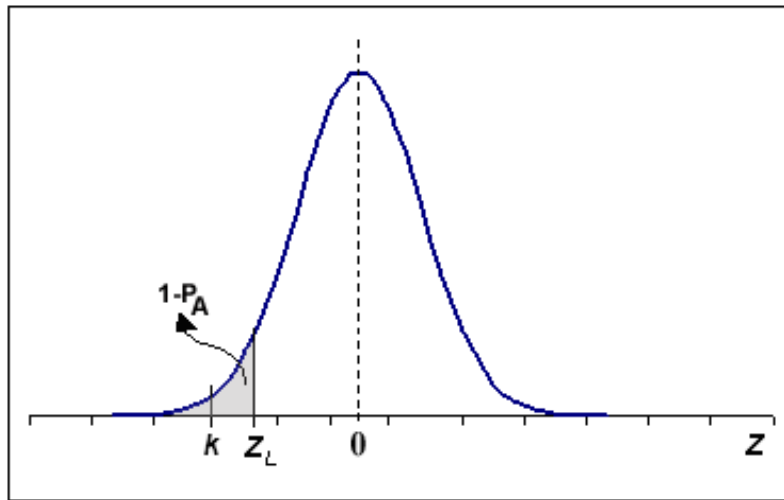


Fig. 21 – Ilustração dos princípios-base do método- k de obtenção de PAA por variáveis. Na prática, o método utiliza uma transformação de variável (redução de X em Z) para a obtenção de n e k . Legenda: P_A – Probabilidade de aceitação dum lote (tendo em consideração as condições pretendidas AQL, LQL, α e β); Z_L – variável que se obtém de \bar{x} ; e k que se calcula com a equação 56 ou se obtém da Fig. 21.

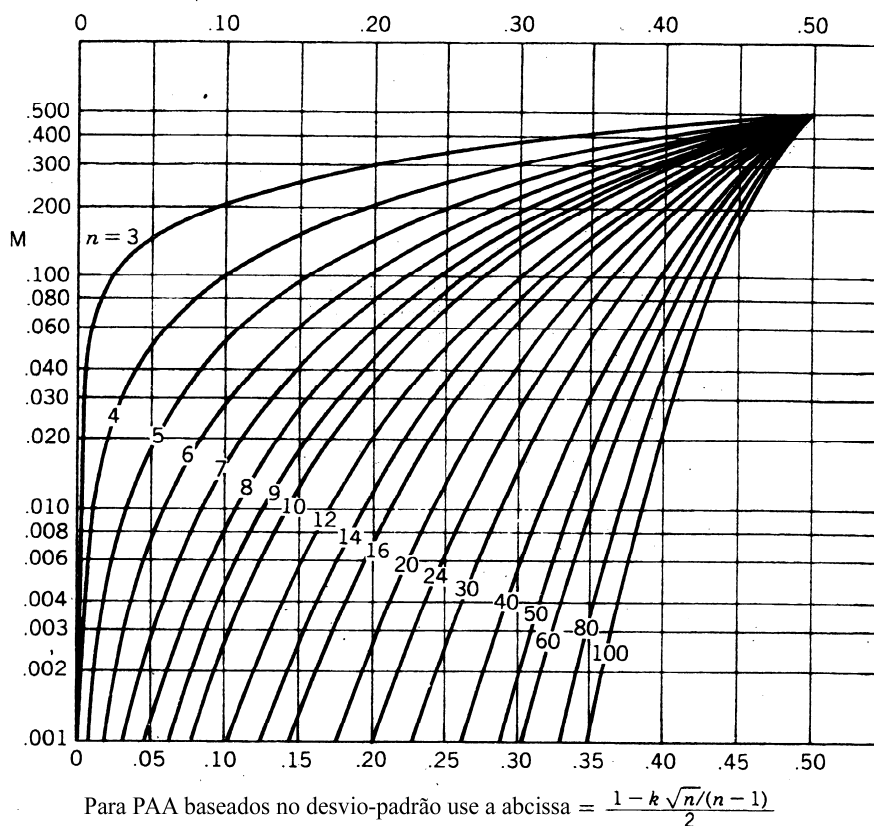


Fig. 22 – Gráfico que permite obter a proporção máxima admitida de defeituosos na amostra, M , a partir do tamanho da amostra n (curvas na figura) e da abcissa k' (ver texto para mais detalhes) (adaptado de Montgomery, 2005).

Então, para uma amostra (do lote em apreciação) de tamanho n e média \bar{x} , calcular Z_L e/ou Z_U de acordo com as equações (54) ou (55) consoante o limite de especificação pretendido seja inferior (Z_L), superior (Z_U), ou ambos. Obter, a partir da Fig. 23, os valores aproximados de \hat{p}_L e/ou \hat{p}_U (a proporção estimada de produtos defeituosos na amostra). Doutra modo, é possível calcular \hat{p}_L e \hat{p}_U através de

$$\hat{p}_L = \Pr(Z > Z_L \sqrt{n/(n-1)}) \tag{60}$$

$$\hat{p}_U = \Pr(Z > Z_U \sqrt{n/(n-1)}) \tag{61}$$

Estas probabilidades (proporções) podem obter-se no Excel® para Windows através de =1-DIST.NORMP(*arg*), em que *arg* é $Z_L \sqrt{n/(n-1)}$ ou $Z_U \sqrt{n/(n-1)}$, respectivamente.

Sendo assim, do lote em apreciação seleccionar uma amostra aleatória de n elementos. Nessa amostra, calcular Z_L e/ou Z_U a partir da média \bar{x} de valores da variável (característica da qualidade) e dos valores de Z_L e/ou Z_U determinar as proporções \hat{p}_L e/ou \hat{p}_U .

Se se considerar **apenas um limite**, então rejeitar o lote sob inspecção se \hat{p}_L ou $\hat{p}_U > M$. Caso contrário, aceitar o lote. No caso de **dupla especificação**, rejeitar o lote se $(\hat{p}_L + \hat{p}_U) > M$. Pelo contrário, se $(\hat{p}_L + \hat{p}_U) \leq M$ então aceitar o lote.

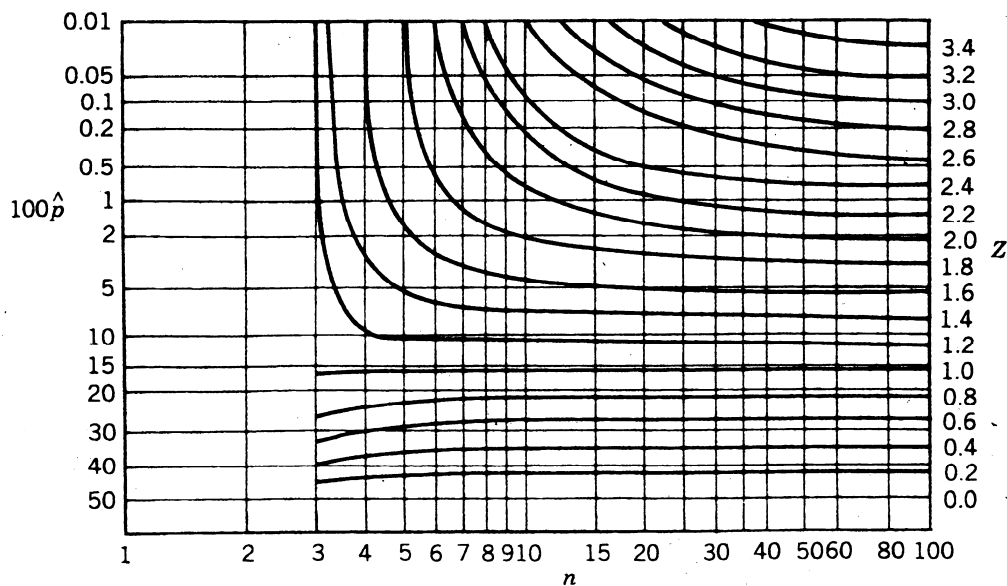


Fig. 23 – Gráfico que permite obter o valor aproximado da proporção estimada de produtos defeituosos na amostra, \hat{p} , para combinações de Z (curvas na figura) e n (abscissas) (adapt.de Montgomery, 2005).

PAA por variáveis normalizados

A norma ANSI/ASQC Z1.9: 2003, constitui a versão civil dos *Military Standards 414* (Tabelas MIL-STD 414) desenvolvidas pelo exército americano em 1957 e que, entretanto, foram adoptadas internacionalmente como ISO 3951: 1999. O sistema de amostragem ANSI/ASQC Z1.9 difere daquelas tabelas militares em alguns aspectos, designadamente nas “categorias dos

lotes”, “níveis de inspeção”¹⁸ e Curvas CO, para se conformar com as características da norma ANSI/ASQC Z1.4 (ou MIL-STD 105E) de utilização comum. Uma parte importante desta norma é também o AQL.

Implementação de ANSI/ASQC Z1.9

A definição do PAA por variáveis a partir da norma ANSI/ASQC Z1.9 é similar à descrita para os planos derivados de ANSI/ASQC Z1.4. Contudo os parâmetros dos PAA por variáveis são o tamanho da amostra n e o “valor crítico” k ou a “fracção de não-conformes máxima aceitável” M . A organização (e implementação) dos planos MIL-STD 414 (que estão na base da norma ANSI/ASQC Z1.9) está representada na Fig. 24.

Os Quadros 6 e 7, de utilização similar à apresentada para a norma ANSI/ASQC Z1.4, permitem obter os PAA para lotes de dimensão N e tomando em consideração o AQL pretendido.

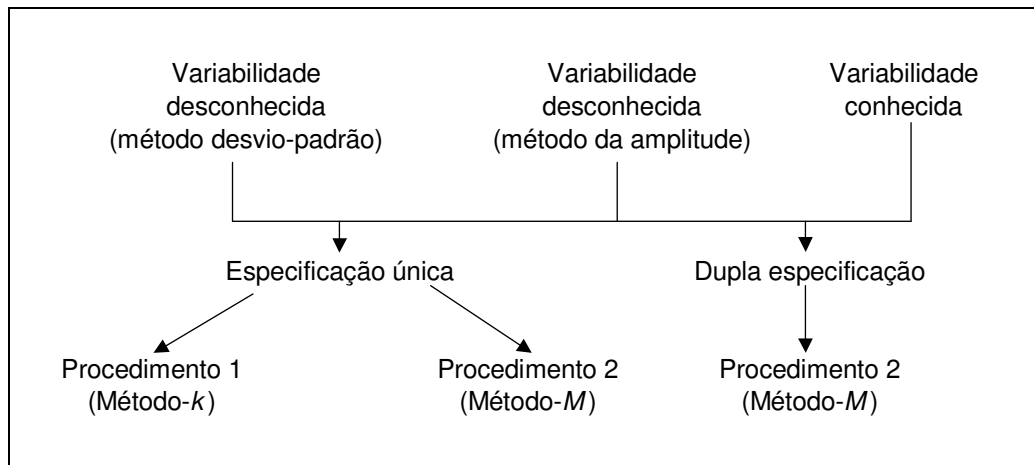


Fig. 24 – Organização dos planos de amostragem MIL-STD 414.

Neste contexto, obter do Quadro 6 o código a partir da dimensão do lote e do nível de inspeção (S3, S4 e I a III). No Quadro 7, conjugar aquele código com o AQL¹⁹ pretendido e determinar n , o tamanho da amostra, e k , a proporção “crítica” de defeituosos. Então, para uma amostra do lote de n elementos com média \bar{x} , calcular Z_L ou Z_U (consoante se trate dum limite inferior ou superior, respectivamente). Se $Z \geq k$ aceitar o lote. Caso contrário, ou seja, $Z < k$, rejeitar o lote. A aceitabilidade, ou não, dum lote pode ser decidida de outro modo. No caso de especificação única, um lote satisfaz o critério de aceitabilidade se $\bar{x} \leq \max - k(s)$ ou $\bar{x} \geq \min + k(s)$, em que \bar{x} é a média amostral, \max e \min correspondem a um valor máximo ou mínimo, respectivamente, da variável em apreciação, k se obtém do Quadro 7 (para um dado AQL e do nível de inspeção) e s é o desvio-padrão amostral das determinações na amostra. Por outro lado, em caso de requisito duplo, o lote é aceite se $\bar{x} \leq \max - k(s)$ e $\bar{x} \geq \min + k(s)$.

¹⁸ Os níveis de inspeção originais em MIL-STD 414 (de I a V) foram revistos para se equivalerem aos níveis indicados pela norma ANSI/ASQC Z1.4 (ou seja, passaram a designar-se S3, S4, I, II e III, respectivamente). Foram adoptadas as regras de alteração entre tipos de inspeção definidas para a norma ANSI/ASQC Z1.4.

¹⁹ Se, porventura, o AQL pretendido não constar do quadro a norma inclui um quadro para a respectiva “conversão”.

A norma ANSI/ASQC Z1.9 inclui ainda tabelas para a determinação de M (que não se apresentam aqui) e, por conseguinte, permite a utilização do Método- M para especificar PAA para situações com dupla especificação.

Quadro 6 – Códigos a usar nas Tabelas MIL-STD 414 (quadro seguinte) em função da dimensão do lote e nível (especial, S3 e S4, e geral, I a III) de inspeção. Não havendo outras indicações (contratuais, legais, etc.) usar nível geral II (adaptado de Mitra, 1993 e Ramos Pires, 2004).

Dimensão do lote	Níveis de inspeção				
	S3	S4	I	II	III
2 a 8	B	B	B	B	C
9 a 15	B	B	B	B	D
16 a 25	B	B	B	C	E
26 a 50	B	B	C	D	F
51 a 90	B	B	D	E	G
91 a 150	B	C	E	F	H
131 a 280	B	D	F	G	I
281 a 400	C	E	G	H	J
401 a 500	C	E	G	I	J
501 a 1200	D	F	H	J	K
1201 a 3200	E	G	I	K	L
3201 a 10000	F	H	J	L	M
10001 a 35000	G	I	K	M	N
35001 a 150000	H	J	L	N	P
150001 a 500000	H	K	M	P	P
500001 e acima	H	K	N	P	P

Quadro 7 – Valores críticos k em função do tamanho da amostra n e de AQL (em %) para inspeção de tipo normal (ver a partir do topo) e de tipo reforçada (ver a partir da base) de lotes para aceitação, em casos com uma única especificação (adaptado de Montgomery, 1985).

		Nível de Qualidade Aceitável para inspeção normal (AQL, %)													
		0,040	0,065	0,10	0,15	0,25	0,40	0,65	1,00	1,50	2,50	4,00	6,50	10,00	15,00
Código	n	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k
B	3	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	1,12	0,958	0,765	0,566	0,341
C	4	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	1,45	1,34	1,17	1,01	0,814	0,617	0,393
D	5	↓	↓	↓	↓	↓	↓	1,65	1,53	1,40	1,24	1,07	0,874	0,675	0,455
E	7	↓	↓	↓	↓	2,00	1,88	1,75	1,62	1,50	1,33	1,15	0,955	0,755	0,536
F	10	↓	↓	↓	2,24	2,11	1,98	1,84	1,72	1,58	1,41	1,23	1,03	0,828	0,611
G	15	2,64	2,53	2,42	2,32	2,20	20,60	1,91	1,79	1,65	1,47	1,30	1,09	0,886	0,664
H	20	2,69	2,58	2,47	2,36	2,24	2,11	1,96	1,82	1,69	1,51	1,33	1,12	0,917	0,695
I	25	2,72	2,61	2,50	2,40	2,26	2,14	1,98	1,85	1,72	1,53	1,35	1,14	0,936	0,712
J	30	2,73	2,61	2,51	2,41	2,28	2,15	2,00	1,86	1,73	1,55	1,36	1,15	0,946	0,723
K	35	2,77	2,65	2,54	2,45	2,31	2,18	2,03	1,89	1,76	1,57	1,39	1,18	0,969	0,745
L	40	2,77	2,66	2,55	2,44	2,31	2,18	2,03	1,89	1,76	1,58	1,39	1,18	0,971	0,746
M	50	2,83	2,71	2,60	2,50	2,35	2,22	2,08	1,93	1,80	1,61	1,42	1,21	1,00	0,774
N	75	2,90	2,77	2,66	2,55	2,41	2,27	2,12	1,98	1,84	1,65	1,46	1,24	1,03	0,804
P	100	2,92	2,80	2,69	2,58	2,43	2,29	2,14	2,00	1,86	1,67	1,48	1,26	1,05	0,819
O	150	2,96	2,84	2,73	2,61	2,47	2,33	2,18	2,03	1,89	1,70	1,51	1,29	1,07	0,841
Q	200	2,97	2,85	2,73	2,62	2,47	2,33	2,18	2,04	1,89	1,70	1,51	1,29	1,07	0,845
		0,065	0,10	0,15	0,25	0,40	0,65	1,00	1,50	2,50	4,00	6,50	10,00	15,00	
		Nível de Qualidade Aceitável para inspeção reforçada (AQL, %)													

Planos de Amostragem para Aceitação (Sumário)

Os Planos de Amostragem para Aceitação (PAA), que constituem um conjunto de metodologias de Controlo Estatístico da Qualidade, permitem decidir sobre a aceitação, ou não, de um lote (de matéria-prima, por exemplo) com base na inspeção (e análise estatística) de amostra(s). Da inspeção de lotes com base em PAA por atributos (e.g. para a proporção de defeituosos) ou por variáveis (e.g. para a média) é possível decidir se a fracção de não-conformes em determinado lote é, ou não, aceitável ou, então, se a “qualidade média” de determinada característica do lote é superior, e/ou inferior, ao limite especificado previamente.

É possível, avaliar o poder discriminatório dos PAA através de curvas CO, considerando os parâmetros AQL e LQL, e os “riscos do produtor e do consumidor”. Contudo, existem planos normalizados que substituem a preparação e estudo das curvas CO para cada PAA, facilitando o estabelecimento de um plano de amostragem apropriado.

Bibliografia²⁰

- Duret, D. & Pillet, M. (2009) *Qualidade na produção. Da ISO 9000 ao Seis Sigma*. LIDEL Edições Técnicas Lda., Lisboa (ND).
- Esteves, E. (2004) Controlo estatístico da qualidade de produtos alimentares: gráficos de controlo. *Tecnovisão, Revista de Divulgação Tecnológica*, 16: 20-23
- Esteves, E. (2005) Controlo estatístico da qualidade de produtos alimentares: planos de amostragem para a aceitação. *Tecnovisão, Revista de Divulgação Tecnológica*, 17: 13-17
- Fey, R. & Gigue, J.M. (1983) *Princípios da gestão da qualidade*. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.
- ISO (1989) *ISO standards handbook 3. Statistical methods*. 3rd Edition, International Organization for Standardization, Switzerland.
- Juran, J.M. & Gryna, F.M. (1991) *Controle da qualidade: componentes básicos da função qualidade*. Volumes I – IX. McGraw-Hill/Makron, São Paulo.
- Juran, J.M.; Gryna, F.M. & Bingham Jr., R.S. (1959) *Quality Control Handbook*. 3rd Edition, McGraw-Hill Book Co., NY.
- Mitra, A. (1993) *Fundamentals of quality control and improvement*. Macmillan Publishing Company, USA.
- Montgomery, D.C. (2005) *Introduction to statistical quality control*. 5th Edition, John Wiley & Sons, New York.
- Ramos Pires; S. (2004) *Qualidade. Sistemas de Gestão da Qualidade*. 3ª Edição, Edições Sílabo Lda., Lisboa.
- Rivera Vilas, L.M. (1995) *Gestión de la calidad agroalimentaria*. Ediciones Mundi-Prensa & A. Madrid Vicente, Ediciones, México & Madrid.

²⁰ Disponível na Biblioteca Central do *Campus* da Penha, Universidade do Algarve, Faro (salvo outra indicação).

Exercícios

Capítulo I – Gráficos de controlo por variáveis (gráficos de \bar{x} e de R)

1. A experiência de vários anos de laboração de uma fábrica permite afirmar que os pontos de fusão de uma determinada substância têm uma distribuição normal com $\mu=335$ °C e $\sigma=21$ °C. Da produção diária é retirada uma amostra de $n=9$ elementos e determinados os pontos de fusão de cada um dos elementos da amostra. As médias das amostras dos últimos 28 dias de laboração da fábrica são as seguintes:

Dia	\bar{x}	Dia	\bar{x}	Dia	\bar{x}	Dia	\bar{x}
1	340	8	339	15	334	22	345
2	328	9	336	16	310	23	330
3	342	10	317	17	325	24	332
4	335	11	337	18	338	25	351
5	351	12	350	19	326	26	344
6	340	13	339	20	328	27	328
7	323	14	355	21	340	28	333

- Construa um gráfico de controlo da média, que inclua os valores da linha central (LC) e dos limites superior e inferior de controlo (LSC e LIC, respectivamente) para $z=1, 2$ e 3 desvios-padrão.
- Represente cada média por um ponto no gráfico anterior. Identifique pontos que indiquem que o processo está fora-de-controlo.
- Um trabalhador da fábrica sugeriu que se poupava tempo se as médias diárias fossem representadas no gráfico apenas uma vez por semana e que nessa altura se verificariam quais os pontos que durante a semana tinham ficado fora de controlo. Qual é a sua opinião sobre esta sugestão do trabalhador?

2. Para um determinado processo de embalagem de salsichas, sabe-se, da experiência passada, que o comprimento das embalagens tem uma distribuição normal com $\mu=280$ mm e $\sigma=2$ mm. O processo é monitorizado de hora a hora, retirando-se amostras aleatórias de 4 elementos e representado as médias das amostras num gráfico de controlo.

- Construa um gráfico de controlo do processo, indicando os valores da LC, e de LSC e LIC para $z=1, 2$ e 3 .
- Os valores de comprimento (em mm) das amostras retiradas aleatoriamente na primeira hora de laboração da fábrica estão incluídos na tabela seguinte:

Amostra 1	279,3	280,1	279,4	281,0
Amostra 2	280,2	277,5	282,4	280,5
Amostra 3	277,0	278,6	280,3	278,5
Amostra 4	277,6	279,2	277,3	280,4
Amostra 5	275,8	274,7	277,9	276,0

Calcule e represente as médias das amostras num gráfico de controlo. Algum dos valores calculados está fora-de-controlo em relação à média do processo? Comente.

3. Numa determinada fábrica, os pesos da pasta de peixe por lata distribuem-se normalmente com $\sigma=1,5$ g. Os pesos médios por lata têm uma variação maior quando se ligam as máquinas, mas esta variação tende a diminuir ao longo do processo. O peso médio desejável é de $\mu=375$ g. Durante o enchimento das latas, em cada hora são seleccionadas aleatoriamente seis latas, o peso do produto é registado e é calculada a média de cada amostra.

a) Construa o gráfico de controlo para a média do peso de pasta por lata, utilizando $z=1, 2$ e 3 desvios-padrão para os limites de controlo. Indique no gráfico os valores da LC e dos limites LSC e LIC:

b) As médias das amostras correspondentes ao intervalo entre a 25ª e 32ª hora de laboração foram as seguintes:

Hora	25	26	27	28	29	30	31	32
\bar{x} (em g)	374,2	375,1	374,9	376,3	376,2	376,6	376,7	377,2

Represente estas médias no gráfico de controlo. O processo está sob controlo no período amostrado? O gráfico dá outras informações sobre o processo? Explique.

c) Se se decidir aumentar o tamanho da amostra para $n=12$, as conclusões retiradas na alínea anterior seriam diferentes? Explique.

4. Numa fábrica de compotas é necessário que o produto não encha totalmente os frascos porque, durante a colocação automática da tampa, parte do produto pode verter. De experiências anteriores, um espaço de 5,4 a 5,5 mm parece ser ideal. As máquinas de enchimento foram calibradas de modo a que esta especificação fosse cumprida. Com base nas 13 amostras de $n=4$ elementos apresentadas a seguir, calcule LC, LSC e LIC de um gráfico de \bar{x} . Analise o gráfico obtido.

Amostra 1	5,35	5,30	5,75	5,55
Amostra 2	5,55	5,35	5,48	5,75
Amostra 3	5,47	5,25	5,45	5,50
Amostra 4	5,40	5,37	5,65	5,60
Amostra 5	5,85	5,55	5,65	5,75
Amostra 6	5,50	5,63	5,35	5,40
Amostra 7	5,35	5,65	5,50	5,25
Amostra 8	5,30	5,60	5,25	5,45
Amostra 9	5,35	5,69	5,50	5,72
Amostra 10	5,20	5,05	5,35	5,38
Amostra 11	5,30	5,45	5,45	5,40
Amostra 12	5,20	5,52	5,55	5,47
Amostra 13	5,52	5,25	5,55	5,30

5. Com os dados do exercício 4 construa um gráfico de R. Analise o gráfico obtido.

6. Numa linha de produção de azeitonas de conserva, pretende-se instalar o controlo microbiológico. Para o efeito, foram retiradas de 20 em 20 minutos, 16 amostras de tamanho $n=5$. A contagem da flora mesófila total foi feita em placas de agar, tendo-se encontrado o número de colónias ($\times 10^2$) indicado na tabela seguinte:

Amostra 1	5	5	3	6	4	Amostra 9	10	7	9	12	9
Amostra 2	7	5	6	4	7	Amostra 10	5	4	2	4	3
Amostra 3	4	6	5	8	6	Amostra 11	6	8	5	4	6
Amostra 4	8	7	8	4	6	Amostra 12	7	6	10	5	7
Amostra 5	6	8	6	4	2	Amostra 13	4	6	7	5	8
Amostra 6	5	5	8	0	0	Amostra 14	7	9	6	7	8
Amostra 7	7	9	6	0	5	Amostra 15	8	6	6	7	8
Amostra 8	8	6	4	6	5	Amostra 16	7	9	6	10	7

a) Com os dados da tabela, construa gráficos de controlo de médias e amplitudes. Qual lhe parece mais utilizável na situação considerada?

b) No gráfico que considera mais adequado, como interpreta os valores encontrados?

7. Pretende-se estabelecer gráficos de controlo de médias e amplitudes para controlar o peso de embalagens de feijão congelado. As embalagens devem pesar cerca de 400 g, mas não se conhecem as especificações exactas. Recolheram-se 10 amostras preliminares do seguinte modo: durante a fase de enchimento, retiraram-se e pesaram-se 5 embalagens consecutivas; tendo-se repetido esta recolha de 1/2 em 1/2 hora. Na tabela seguinte estão incluídos os resultados obtidos:

#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10
410	400	400	400	400	350	390	400	420	400
400	380	390	410	410	370	400	410	420	410
400	390	410	410	400	400	430	400	420	410
410	400	410	400	410	380	420	390	410	400
430	420	390	400	340	360	400	430	420	380

a) Com os valores obtidos nas 10 amostras estabeleça as especificações para o peso das embalagens.

b) Construa e analise os gráficos de controlo das médias e das amplitudes.

Capítulo II – Gráficos de controlo por atributos (gráficos de *p* e de *np*)

1. Numa determinada fábrica, o sumo de laranja é empacotado em cartões. Estas embalagens são obtidas numa máquina fazendo rodar um rolo de cartão e ajustando um fundo de metal ao cartão enrolado. Por inspecção das embalagens já prontas é possível determinar se o fundo está bem ajustado ao cartão e se as margens deste ficaram bem coladas. Esta inspecção é fundamental porque é o único modo de prevenir que durante o enchimento dos cartões o líquido não verta, o que acontecerá se, por acaso, as colagens das embalagens não ficarem bem feitas.

Para atingir este objectivo é realizada uma amostragem para monitorizar o número de cartões não-conformes que são produzidos diariamente. Assim, em cada dia são retiradas, aleatoriamente, amostras de $n=50$ cartões, de meia em meia hora, e os cartões são classificados em conformes e não-conformes. Um total de 30 amostras é seleccionado por dia.

a) Construa o gráfico de p (da fracção de não-conformes) com os dados da tabela seguinte e verifique se o processo está sob controlo.

Amostra nº	Cartões não-conformes	Amostra nº	Cartões não-conformes
1	12	16	8
2	15	17	10
3	8	18	5
4	10	19	13
5	4	20	11
6	7	21	20
7	16	22	18
8	9	23	24
9	14	24	15
10	10	25	9
11	5	26	12
12	6	27	7
13	17	28	13
14	12	29	9
15	22	30	6

b) Depois de se obter o gráfico, tentou-se averiguar a razão para as amostras #15 e #23 estarem fora-de-controlo, concluindo-se que na meia hora antes da amostra #15 ter sido retirada tinha havido uma substituição do rolo de cartão e que no intervalo de tempo em que se recolheram as amostras #21, #22 e #23 tinha havido uma substituição temporária dum operário no controlo da máquina. Elabore um novo gráfico de p , excluindo os valores referentes às amostras #15, #21, #22 e #23. Comente os resultados obtidos.

c) Ao engenheiro mecânico responsável pelo equipamento da fábrica foi-lhe solicitado, pelo director de produção, que fizesse ajustamentos na máquina de modo a tentar diminuir a proporção de defeituosos. Depois desses ajustamentos, foram retiradas 24 amostras de $n=50$ cartões e o nº de não-conformes contado em cada amostra. A tabela seguinte resume os resultados obtidos. Construa um gráfico de p com os limites utilizados na alínea b) e comente os resultados.

Amostra nº	Cartões não-conformes	Amostra nº	Cartões não-conformes
1	9	13	3
2	6	14	6
3	12	15	5
4	5	16	4
5	6	17	8
6	4	18	5
7	5	19	6
8	3	20	7
9	7	21	5
10	6	22	6
11	2	23	3
12	4	24	4

d) Construa um novo gráfico de p com as especificações calculadas com base nos dados das amostras retiradas depois do ajustamento da máquina. Comente os resultados.

2. Repita a alínea d) do problema anterior mas utilizando gráficos de np . Compare e comente os resultados obtidos nos dois tipos de gráficos.

3. Numa fábrica de enlatamento de sardinha, pretende-se controlar o número de latas mal cravadas utilizando gráficos de controlo por atributos. Com esse objectivo, foi retirada diariamente uma amostra de tamanho $n=100$ durante 10 dias consecutivos. Os dados obtidos estão incluídos na tabela seguinte:

Dia	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nº defeituosos	3	2	6	2	7	2	1	2	0	5

Estabeleça um gráfico de controlo para o processo de cravação de latas e comente os resultados.

4. Numa determinada fábrica, as garrafas de plástico de sumo de fruta devem conter um certo volume de líquido. Garrafas com volumes superiores a um dado valor são consideradas não-conformes. O processo é controlado com gráficos de np , utilizando amostras de tamanho $n=100$ e uma linha central de $\bar{p}=0,02$.

a) Calcule os limites superiores e inferiores de controlo para este gráfico.

b) Analise as seguintes dez amostras retiradas para controlo estatístico. Verifique se o processo de fabrico está sob controlo.

Amostra nº	Nº de não-conformes
1	5
2	2
3	3
4	8
5	4
6	1
7	2
8	6
9	3
10	4

5. Numa fábrica de garrafas de vidro para refrigerantes é realizada regularmente uma inspecção ao produto final. Decidiu-se estabelecer como objectivo de produção uma proporção de 3% de unidades não-conformes. Diariamente, 20 amostras de 100 unidades cada são seleccionadas de 20 em 20 minutos e em cada amostra é contado o número de garrafas não-conformes (x_i). Analise dados obtidos que se incluem na tabela seguinte:

Amostra nº	x_i	Amostra nº	x_i	Amostra nº	x_i	Amostra nº	x_i
1	4	6	4	11	9	16	5
2	2	7	3	12	3	17	3
3	5	8	9	13	3	18	1
4	3	9	5	14	4	19	4
5	6	10	6	15	2	20	3

Capítulo III – Curvas características de Operação (Curvas CO) e gráficos de controlo

1. Construiu-se um gráfico de controlo da média para monitorizar o processo de produção de embalagens de iogurte de fruta, designadamente para estudar o volume médio das embalagens. Amostras de $n=5$ embalagens foram seleccionadas aleatoriamente da linha de produção de 1 hora em 1 hora. A média do processo é igual a 120 ml, com desvio-padrão de 8 ml.

a) Construa a Curva CO para situações de incremento da média do processo (ou seja para aumentos do volume médio das embalagens).

b) Qual a probabilidade de se detectar a alteração do processo se a média \bar{x} aumentar para $\bar{x}_i=125$ ml? E se aumentar para $\bar{x}_i=145$ ml, qual a probabilidade de não se detectar essa modificação?

c) E se se pretendesse estudar a sensibilidade do gráfico de controlo de \bar{x} a diminuições da média como fazer? Construa a Curva CO para diminuições da média e comente.

2. Com a informação do exercício 2, alínea a) do capítulo I [$\mu=280$ mm, $LSC_3=283$ mm, $LIC_3=277$ mm e $n=4$], construa a Curva CO do gráfico de controlo para estudar a sensibilidade a aumentos da média do processo. Qual é a probabilidade de não se detectar uma alteração da média para $\bar{x}_i=283$ mm?

3. Recuperem-se os dados do exercício 3 do capítulo I, designadamente a resolução da alínea a).

a) Elabore a Curva CO para aquele gráfico de controlo da \bar{x} que permita estudar a sua "habilidade" para detectar incrementos à média.

b) Se a média aumentasse inadvertidamente para $\bar{x}_i=375,5$ g, qual seria a probabilidade do gráfico de controlo da média detectar essa alteração?

4. A percentagem média de frascos defeituosos numa linha de produção é de 6,7%. Sabendo que, a partir de amostras de $n=50$ frascos, se calcularam os limites $LSC_3=0,173$ e $LIC_3=0$. Construa a Curva CO e determine qual a probabilidade de se detectar uma alteração da fracção de defeituosos de 6,7% para 8%.

5. Observa-se que a proporção média de cabos não-conformes produzidos pela "Fábrica de Cabos do Sul" é de 3,33%, em amostras de 100 cabos. O departamento de controlo de qualidade tem elaborado gráficos de controlo de p com os seguintes limites: $LSC_3=0,0872$ e $LIC_3=0$.

a) Construa a Curva CO para este gráfico de p .

b) Se a fracção de cabos defeituosos aumentasse para 7,5% qual seria a probabilidade dessa modificação não ser detectada pelo gráfico de p na primeira amostra retirada a seguir à alteração?

6. Uma companhia produz "diskettes" de 3,5 polegadas para computadores. Amostras aleatórias de $n=200$ "diskettes" têm sido seleccionadas e o número de defeituosas em cada amostra anotado. A partir de 25 amostras foi possível estabelecer que a proporção média de "diskettes"

defeituosas é de cerca de 0,0221 e os limites $LSC_3=0,0533$ e $LIC_3=0$. Construa a curva CO para esse gráfico de controlo de p .

- a) Se a proporção de não-conformes aumentasse para 2,7% qual seria a probabilidade de se detectar essa alteração?
- b) E se aumentasse para 3% qual seria a probabilidade de não se detectar essa modificação?

Capítulo IV – Planos Amostragem para Aceitação por atributos

1. Pretende-se classificar a qualidade de um lote de $N=2000$ unidades utilizando um plano de amostragem simples com $n=50$ e $c=2$.

- a) Construa a Curva CO deste plano de amostragem recorrendo às probabilidades acumuladas da distribuição Binomial.
- b) Se o lote a ser inspeccionado incluir 1% de unidades defeituosas, qual é a probabilidade de ser aceite?
- c) E se a percentagem de defeituosos for de 5%?
- d) Como varia a probabilidade de aceitação à medida que a qualidade do lote é mais baixa?
- e) Se $AQL=0,01$ e $LQL=0,11$, qual é o "risco do fornecedor" e o "risco do comprador"?
- f) Repita os cálculos anteriores utilizando a distribuição de Poisson.

2. Considere um lote de tamanho $N=2000$ e três planos de amostragem simples: $n=50$, $n=100$ e $n=200$. Para um número de aceitação $c=2$ em todos os planos, construa as três curvas de aceitação no mesmo gráfico. Calcule a probabilidade de aceitação para cada um dos planos se no lote amostrado 2% dos elementos forem classificados como não-conformes. Qual é a influência do tamanho da amostra?

3. Foram considerados quatro planos de amostragem simples para inspeccionar a qualidade de um lote de tamanho $N=2000$. Nos quatro planos, o tamanho da amostra é constante ($n=50$), mas o valor do número de aceitação varia entre 0 e 3. Construa as curvas CO relativas aos quatro planos de amostragem considerados e represente-as no mesmo gráfico.

- a) Qual é a influência do número de aceitação em planos com n constante?
- b) Para um AQL de 0,5% qual é o "risco do produtor" quando $c=3$?
- c) No plano em que $c=0$, qual é o "risco do produtor" para um AQL de 0,5%?
- d) Para planos com o mesmo tamanho de amostra, qual é a influência da variação do número de aceitação?

4. Considere um plano de amostragem com $N=1500$, $n=150$ e $c=3$. Construa a curva CO. Para um AQL de 0,05% e um LQL de 6% descreva a protecção oferecida por este plano para os níveis de qualidade considerados.

5. Considere, agora, um plano de amostragem com $N=1500$, $n=200$ e $c=3$. Construa a curva CO. Para os mesmos níveis de qualidade do problema anterior, compare a protecção oferecida por este plano relativamente à conferida pelo plano descrito no problema anterior.

6. Suponha que o risco desejável para o produtor é de 3% e que para o consumidor é de 6%. Qual dos planos descritos no dois problemas anteriores parece melhor? Explique as razões da escolha.

7. Pretende-se inspeccionar lotes de tamanho $N=2000$ utilizando um plano de amostragem simples.

a) Se o AQL estabelecido por contrato for de 0,65% e a inspecção for de tipo normal, estabeleça um plano de amostragem a partir das tabelas MIL-STD 105.

b) Repita os cálculos para um AQL=0,065.

8. Dez lotes de $N=400$ foram inspeccionados segundo o sistema de amostragem ISO 2859 (correspondente ao sistema da norma ANSI/ASQC Z1.4). Pretende-se elaborar planos de amostragem simples e uma inspecção de tipo normal com AQL=1%. A tabela seguinte resume os resultados da inspecção de 10 lotes consecutivos:

Lote nº	Nº de não-conformes
1	1
2	0
3	2
4	3
5	1
6	1
7	0
8	1
9	1
10	2

a) Que tipo de inspecção foi utilizada para o lote nº 6?

b) Que tipo de inspecção foi utilizada para os lotes nºs 9 e 10?

c) Qual seria o tipo de inspecção, se existisse um outro lote para ser amostrado (lote nº 11)?

9. Determinado fornecedor vende a mercadoria em lotes de $N=3000$ unidades. O AQL para o seu produto foi estabelecido em 1%. O comprador decidiu fazer uma inspecção de nível geral II. Com base no sistema de amostragem da norma ANSI/ASQC Z1.4, estabeleça o plano de amostragem simples inicial.

10. Repita o exercício anterior, supondo que a confiança que o comprador tem na qualidade do produto fornecido é suficientemente grande para que se possa fazer uma inspecção reduzida. Compare os planos obtidos.

11. Um produto é fornecido em lotes de $N=10000$ unidades. Pretende-se realizar inspeção normal, estabelecendo planos de amostragem simples com $AQL=0,1\%$.

a) Utilizando o sistema da norma ANSI/ASQC Z1.4, estabeleça os planos de amostragem para um nível geral II de inspeção.

b) Repita a alínea anterior, supondo que o comprador pretende realizar inspeção de nível III porque a "história" anterior do fornecedor não lhe merece confiança.

12. Numa fábrica pretende-se utilizar o sistema de amostragem da norma ANSI/ASQC Z1.4 para realizar a inspeção final a um determinado produto, armazenado em lotes de $N=5000$ unidades. A fábrica utiliza um nível geral de inspeção II e um AQL de $0,65\%$.

a) Indique os planos de amostragem simples para aquele nível de inspeção.

b) Em 10 amostras de outros tantos lotes consecutivos inspeccionados, foram detectados os seguintes números de unidades defeituosas: 0, 1, 0, 3, 0, 4, 5, 4, 2 e 0. Que sequência de planos de inspeção foi utilizada?

c) Represente graficamente as curvas CO relativas aos planos de amostragem obtidos na alínea anterior.

Capítulo V – Planos de Amostragem para Aceitação por variáveis

1. Para uma fábrica é necessário que um determinado produto contenha uma quantidade de sódio igual ou inferior a $0,3$ ppm. O produto é vendido em lotes. Em cada lote é necessário fazer análises químicas numa amostra, e consoante a média da amostra, aceitar ou rejeitar o lote. Pretende-se que lotes em que a média de sódio seja $0,3$ ppm tenham uma probabilidade de aceitação de 95% e que lotes em que a média seja $0,4$ ppm tenham uma probabilidade de aceitação de 10% . Dado que o desvio-padrão do processo de fabrico do produto é igual a $0,10$ ppm, estabeleça um plano de amostragem que satisfaça as condições estabelecidas. $|z_\alpha|=1,645$; $|z_\beta|=1,282$.

2. Um produto químico é embalado e distribuído em recipientes de metal. Suponha-se que uma grande quantidade deste produto vai ser comprada por uma fábrica, cujos responsáveis pretendem só aceitar o produto após conhecerem os resultados obtidos por amostragem. O comprador pretende que a densidade média do produto não seja inferior a $0,150$ g cm⁻². Lotes com esta quantidade devem ter uma probabilidade de aceitação de $0,95$, mas lotes em que a densidade média seja de $0,145$ g cm⁻² apenas em 10% dos casos devem ser aceites. Sabendo que o desvio-padrão das densidades do produto é de $0,004$ g cm⁻², estabeleça um plano de amostragem que satisfaça aquelas condições.

3. O nitrato de amónio é distribuído em sacos de 500 kg. O limite inferior das especificações definidas para a sua utilização por uma determinada fábrica é de 13% de azoto no produto. Sabe-se que a concentração de azoto nos sacos tem uma distribuição normal com um desvio-padrão de $1,5\%$. Estabeleça um plano de amostragem que satisfaça as seguintes condições: lotes cuja média seja $2,5$ desvios-padrão acima do limite inferior das especificações devem ser aceites com uma

probabilidade de 0,95; lotes cuja média seja 1,5 desvios-padrão acima do limite inferior das especificações devem ser aceites com uma probabilidade de 0,1.

4. O peso das embalagens de um produto deve estar compreendida entre dois valores. Supondo que se pretende que a probabilidade de aceitação dos lotes cujas médias sejam iguais ou inferiores a 45 g ou iguais ou superiores a 47 g seja de 0,1 e que o risco do produtor seja de 0,05, estabeleça um plano de amostragem para a variável peso (sabendo que o desvio-padrão do processo é 0,6 g). $|z_{\alpha/2}|=1,96$; $|z_{\beta}|=1,28$

5. A percentagem de proteína de origem vegetal num determinado produto deve estar compreendida entre dois valores-limite. Pretende-se que lotes cuja percentagem média de proteína seja inferior a 25% ou superior a 35% tenham uma probabilidade de aceitação de 9% e que lotes cuja percentagem média de proteína seja de 30% sejam aceites em 95% dos casos. Sabendo que a distribuição da percentagem de proteína é normal com desvio-padrão igual a 2%, estabeleça um plano de amostragem para esta variável e explique o modo de operação desse plano. $|z_{\alpha/2}|=1,96$; $|z_{\beta}|=1,34$.

6. Uma fábrica de lacticínios pretende que uma determinada marca de queijo seja produzida com uma percentagem de gordura que não exceda um dado valor. Nas inspecções realizadas ao produto final, lotes cuja percentagem média de gordura seja de 40% devem ter uma probabilidade de aceitação de 97%; lotes cuja média de gordura seja de 45% apenas devem ter uma probabilidade de aceitação de 2%. Se o desvio-padrão do processo for de 3%, estabeleça um plano de amostragem e indique como deve ser feita a implementação do plano. $|z_{\alpha}|=1,88$; $|z_{\beta}|=2,05$.

7. Determinada empresa adquire a um dado fornecedor, sacos de matéria-prima com, pelo menos, 100 kg de produto. Lotes com 2% de sacos com peso inferior àquele devem ser aceites com uma probabilidade de 98%. Contudo, devem aceitar-se lotes em que 12% dos sacos tenham menos de 100 kg apenas em 10% das ocasiões. De acordo com o fornecedor, o peso dos sacos varia com desvio-padrão igual a 8 kg. $|z_{p1}|=2,055$; $|z_{p2}|=1,175$; $|z_{\alpha}|=1,405$; $|z_{\beta}|=1,282$.

a) Quais são os parâmetros dum plano de amostragem para aceitação que esteja de acordo com as condições enunciadas acima.

b) Suponha que se recebeu para estudo uma amostra de dez sacos proveniente dum lote sujeito a inspecção e que o peso médio nessa amostra foi de 110 kg. O que decidir acerca do lote?

8. A carne de atum recebida por determinada conserveira deve conter, no máximo, 1 ppm de mercúrio por imperativo legal. Sabe-se que a concentração daquele composto na carne varia com desvio-padrão igual a 0,04 ppm. Devem aceitar-se 99% dos lotes de atuns em que apenas 1% dos animais contêm mais de 1 ppm. Pelo contrário, lotes em que 5% dos atuns apresentam teores de mercúrio superiores a 1 ppm devem ser rejeitados em 95% das ocasiões. Os “riscos do produtor e consumidor” devem ser de 1% e 5% respectivamente. $|z_{p1}|=|z_{\alpha}|=2,326$; $|z_{p2}|=|z_{\beta}|=1,645$.

a) Obtenha o PAA para este caso.

b) Duma amostra de atuns proveniente dum lote em apreciação obteve-se um conteúdo médio de mercúrio de 0,94 ppm. O que se deve decidir acerca desse lote?

c) Numa outra ocasião, o teor médio de mercúrio numa amostra foi de 0,89 ppm. Deve aceitar-se ou rejeitar-se o lote inspeccionado?

9. Repita o exercício anterior utilizando o método-*M*.

10. Determinada empresa produz cereais para o pequeno-almoço em embalagens de 450 g. De acordo com as especificações do produto, o conteúdo em sódio deve variar entre 0,3 e 1,1% (sabe-se que o desvio-padrão do teor em sódio é igual a 0,18%). As embalagens são expedidas em lotes de 100 unidades.

a) Para $AQL=1\%$, $\alpha=5\%$ e $LQL=\beta=10\%$ estabeleça um plano de amostragem para aceitação. $|z_{p1}|=2,326$; $|z_{\alpha}|=1,645$; $|z_{p2}|=|z_{\beta}|=1,282$.

b) Numa amostra, obteve-se um teor médio de sódio de 0,679%. O que decidir acerca do lote?

c) Numa outra ocasião, o conteúdo de sódio numa amostra foi de 0,4%. Deve aceitar-se ou rejeitar-se o lote inspeccionado?

Solução dos Exercícios

Capítulo I – Gráficos de controlo por variáveis (gráficos de \bar{x} e de R)

1. a) $LC=335^{\circ}C$; $LSC=342^{\circ}C$ $349^{\circ}C$ $356^{\circ}C$ (para $z=1, 2$ ou 3 respectivamente); $LIC=328^{\circ}C$ $321^{\circ}C$ $314^{\circ}C$ (para $z=1, 2$ ou 3 respectivamente).

2. a) $LC=280mm$; $LSC=281mm$ $282mm$ $283mm$ (para $z=1, 2$ ou 3 respectivamente); $LIC=279mm$ $278mm$ $277mm$ (para $z=1, 2$ ou 3 respectivamente).

3. a) $LC=375,0g$; $LSC=375,6g$ $376,2g$ $376,8g$ (para $z=1, 2$ ou 3 respectivamente); $LIC=374,4g$ $373,8g$ $373,2g$ (para $z=1, 2$ ou 3 respectivamente). Se $n=12$ então mantém-se $LC=375g$, mas $LSC=375,4g$ $375,9g$ $376,3g$ (para $z=1, 2$ ou 3 respectivamente) e $LIC=374,6g$ $374,1g$ $373,7g$ (para $z=1, 2$ ou 3 respectivamente).

4. $LC=5,46$ mm, $LSC(3)=5,698$ mm, $LIC(3)=5,226$ mm. 5. $LC=0,324$ mm; $LSC(3)=0,739$ mm; $LIC(3)=0$ mm.

6. a) Para o gráfico de \bar{x} : $LC=6,1 \times 10^2$ colónias; $LSC(3)=8,6 \times 10^2$ colónias; $LIC(3)=3,5 \times 10^2$ colónias. Para o gráfico de R: $LC=4,4 \times 10^2$ colónias; $LSC=9,4 \times 10^2$ colónias; $LIC=0 \times 10^2$ colónias.

7. a) Peso médio das latas é 400,8 g. b) Para o gráfico de \bar{x} : $LC=400,8$ g; $LSC=420,4$ g; $LIC=381,2$ g. c) Para o gráfico de R: $LC=34$ g; $LSC=78,9$ g; $LIC=0$ g.

Capítulo II – Gráficos de controlo por atributos (gráficos de p e de np)

1. a) $LC=0,2313$; $LSC=0,2909$ $0,3506$ $0,4102$ (respectivamente para $z=1, 2$ ou 3); $LIC=0,1717$ $0,1121$ $0,0524$ (respectivamente para $z=1, 2$ ou 3). b) $LC=0,2023$; $LSC=0,2591$ $0,3159$ $0,3727$ (para $z=1, 2$ ou 3); $LIC=0,1455$ $0,0887$ $0,0319$ (para $z=1, 2$ ou 3). d) $LC=0,1092$; $LSC=0,1533$ $0,1974$ $0,2415$ (para $z=1, 2$ ou 3); $LIC=0,0651$ $0,0209$ e 0 (para $z=1, 2$ ou 3).

2. $LC=5,5$; $LSC=7,7$; $9,9$; $12,1$ (respectivamente para $z=1, 2$ ou 3); $LIC=3,3$; $1,0$; 0 (respectivamente para $z=1, 2$ ou 3).

3. Para um gráfico de np : $LC=3$; $LSC=4,7$; $6,4$; $8,1$ (para $z=1, 2$ ou 3); $LIC=1,3$; 0 ; 0 (para $z=1, 2$ ou 3).

4. a) LSC=3; 5; 6 (para $z=1, 2$ ou 3); LIC=1; 0; 0 (para $z=1, 2$ ou 3). b) LC=2; limites como anteriores.
 5. Para um gráfico de p : LC=0,0300; LSC=0,0471 0,0641 0,0812 ($z=1, 2, 3$); LIC=0,0129 0 0 ($z=1, 2, 3$).

Capítulo III – Curvas características de Operação (Curvas CO)

1. b) $1-\beta(\bar{x}_i=125 \text{ ml})=0,0544$ e $\beta(\bar{x}_i=145 \text{ ml})=3,4 \times 10^{-5}$. 2. $\beta(\bar{x}_i=283 \text{ mm})=0,5$.
 3. b) $1-\beta(\bar{x}_i=375,5 \text{ g})=0,0146$. 4. $1-\beta(\bar{p}_i=8\%)=0,0321$
 5. b) $\beta(\bar{p}_i=7,5\%)=0,6614$ 6. a) $1-\beta(\bar{p}_i=2,7\%)=0,0270$. b) $\beta(\bar{p}_i=3\%)=0,9549$

Capítulo IV – Planos de Amostragem para Aceitação por atributos

1. b) $P(a)=0,9862$. b) $P(a)=0,5405$. e) $\alpha=0,0138$ e $\beta=0,0763$ (Binomial) f) $\alpha=0,0144$ e $\beta=0,0884$ (Poisson).
 2. Para $P(a)=0,9216$; $0,6767$ e $0,2352$ (para $n=50, 100, 200$ respectivamente e considerando a distribuição Binomial).
 3. b) $\alpha=0,0001$. c) $\alpha=0,2217$. 4. $\alpha=0,0071$ e $\beta=0,0186$. 5. $\alpha=0,0187$ e $\beta=0,0018$.
 6. Com o PAA da alínea 4) obtém-se $\alpha=0,6577$ e $\beta=0,0212$. Com o PAA da alínea 5) $\alpha=0,8488$ e $\beta=0,0023$.
 7. a) $n=125, c=2, r=1$. b) $n=125, c=14$. 8. a) Reforçada. b) Reforçada e Normal. c) Normal.
 9. Para $N=3000$, o PAA de nível II deverá ser: seleccionar amostras de $n=125$ unidades, determinar x_i , se $x_i < 3$ aceitar o lote e se $x_i > 4$ rejeitar o lote.
 10. Para $N=3000$, o PAA de nível I deverá ser: seleccionar amostras de $n=20$ elementos, determinar x_i , se $x_i = 0$ aceitar o lote e se $x_i > 2$ rejeitar o lote.
 11. a) Para $N=10000$, os PAA deverão ser: nível II - seleccionar amostras de $n=125$ elementos, determinar x_i , se $x_i = 0$ aceitar o lote e se $x_i > 1$ rejeitar o lote; b) para um nível III - seleccionar amostras de $n=315$ unidades, determinar x_i , se $x_i < 1$ aceitar o lote e se $x_i > 2$ rejeitar o lote.
 12. a) $n=200, c=3$ (Inspeção Normal); $n=200$ e $c=2$ (Reforçada); $n=80$ e $c=1$ (Reduzida).

Capítulo V – Planos de Amostragem para Aceitação por variáveis

1. $n=9, \bar{X}_{AS}=0,36 \text{ ppm}$. 2. $n=6, \bar{X}_{AI}=0,1472 \text{ g cm}^{-2}$. 3. $n=9, \bar{X}_{AI}=0,159$ (i.e. 15,9%).
 4. $n=4, \bar{X}_{AI}=45,4 \text{ g}$ e $\bar{X}_{AS}=46,6 \text{ g}$ (variam ligeiramente com opção de resolução).
 5. $n=2, \bar{X}_{AI}=0,272$ (i.e. 27,2%) e $\bar{X}_{AS}=0,328$ (i.e. 32,8%). 6. $n=6, \bar{X}_{AS}=0,424\%$ (i.e. 42,4%).
 7. a) $n=10$ e $k=1,595$ b) Rejeitar o lote (porque $Z_L=1,250 < k$).
 8. a) $n=35$ e $k=1,928$ (graficamente) ou $n=34$ e $k=1,927$ (matematicamente)
 b) Rejeitar o lote (porque $Z_U=1,500 < k$). c) Aceitar o lote ($Z_U=2,75 > k$).
 9. a) $n=34$ e $M=0,025$ b) Rejeitar o lote (porque $p_U=0,046 > M$). c) Aceitar o lote (porque $p_U=0 \ll M$).
 10. a) $n=8$ e $M=0,0315$. b) Aceitar o lote (porque $p_U+p_L=0,0184 < M$). c) Rejeitar o lote (uma vez que $p_U+p_L=0,2763 \gg M$).