1. Considere as palavras $w_1 = 101$, $w_2 = 1011$, $w_3 = 001$. Determine:
   (a) $w_1 \circ w_2$.
   (b) $w_2 \circ w_1$.
   (c) $|w_3|$.
   (d) w_2^3.
   (e) $w_3^2 \circ w_1 \circ w_2$.

2. Considere os seguintes conjuntos de palavras $A = \{tiesto\}$, $B = \{david\_fonseca, da\_weasel\}$, e $C = \{iris\}$. *Determine:*
   (a) A^3 e B^2.
   (b) $|A|$, $\left|B^3\right|$, e $\left|C^4\right|$.
   (c) $A \circ C$ e $B \circ C \circ A$.
   (d) $A^2 \cup B \cup C$.
   (e) Determine *'tiesto'*$^{\mathscr{R}}$ e *'ele'*$^{\mathscr{R}}$. Alguma destas palavras é uma palíndromo?

3. Se possível, dê um exemplo de uma linguagem sobre o alfabeto $\{\Finv, \Game, \bigstar\}$.

4. O conjunto $\{\heartsuit\diamondsuit\spadesuit, \heartsuit, \spadesuit\diamondsuit, \spadesuit\}$ é uma linguagem? Se sim, sobre que alfabeto?

5. Dado o conjunto $B = \{\alpha\beta, 0, ba\}$, determine 10 elementos distintos de B^*.

6. Determine C^2 onde $C = \{ab, b, \varepsilon\}$. Qual o número de elementos de C?

7. Dado o alfabeto $\{\triangle, \blacktriangle, \triangledown\}$ e a ordem $\blacktriangle < \triangle < \triangledown$ sobre este alfabeto, determine os 17 menores elementos de $\{\triangle, \blacktriangle, \triangledown\}^*$ de acordo com a ordem lexicográfica.

8. Se possível, indique uma propriedade que todos os elementos da linguagem A satisfaçam, mas que não seja satisfeita por nenhum elemento da linguagem B, onde:
   (a) $A = \{aab, aba\}^* - \{\varepsilon\}$ e $B = \{ab, ba\}^* - \{\varepsilon\}$.
   (b) $A = \{aab, aba\}^* - \{\varepsilon\}$ e $B = \{a, b\}^* - \{\varepsilon\}$.
   (c) $A = \{a\}^* - \{\varepsilon, a\}$ e $B = \{aa, aaa\}^* - \{\varepsilon\}$.

9. Verifique, para cada uma das linguagens definidas no exercício 8, se $A = B$.

10. Determine o conjunto $\{\varepsilon\}^*$.

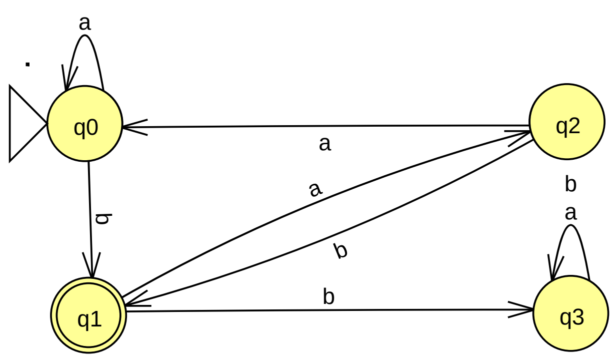

Figura 1: Autómato finito determinístico para o exercício 11.

11. A figura 1 representa o diagrama de estados de um autómato finito determinístico (AFD).

    (a) Qual é o estado inicial do autómato?
    (b) Qual a sequência de estados para o input *aabb*?
    (c) Será que o autómato aceita a palavra *aabb*?
    (d) Será que o autómato aceita a palavra ε? E a palavra *bbaaaaaaba*?
    (e) Dê uma descrição formal do autómato.

12. Dê exemplos de AFD's que reconheçam as seguintes linguagens (em todos os casos o alfabeto é $\{0,1\}$):

    (a) $A = \{w|w \text{ começa com um 1 e acaba com um } 0\}$.
    (b) $B = \{w|w \text{ começa com três 1s}\}$.
    (c) $C = \{w|w \text{ contém a subpalavra } 0101\}$.
    (d) $D = \{w|w \text{ começa com 0 e } |w| \text{ é ímpar, ou } w \text{ começa com 1 e } |w| \text{ é par}\}$.
    (e) $E = \{w|w \text{ não contém a subpalavra } 110\}$.
    (f) $F = \{w : |w| \leq 5\}$.
    (g) $G = \{w|w \text{ é qualquer palavra exceto 11 e } 111\}$.
    (h) $H = \{w|w \text{ tem um número par de 0s ou exatamente dois 1s}\}$.
    (i) $I = \{\varepsilon, 0\}$.
    (j) $J = \varnothing$.
    (k) $K = \{0,1\}^* - \{\varepsilon\}$.

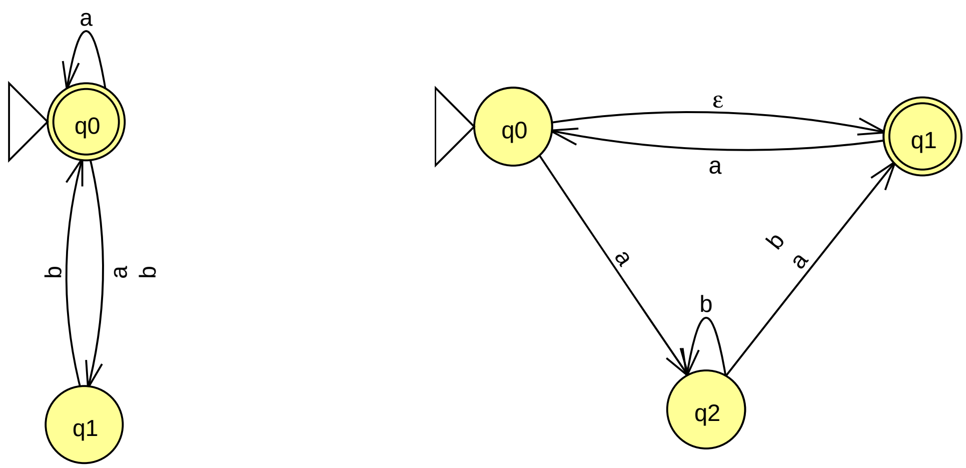

Figura 2: AFND's para o exercício 15.

13. Dê exemplos de AFND's que reconheçam as seguintes linguagens (em todos os casos o alfabeto é $\{0, 1\}$):

    (a) A linguagem $L = \{w|w \text{ acaba com } 00\}$ utilizando 3 estados. Represente o AFND formalmente.

    (b) A linguagem do exercício 12 - c), com 5 estados.

    (c) A linguagem do exercício 12 - h), com 6 estados.

    (d) A linguagem $M = \{0\} \circ \{1\}^* \circ \{0\}^* \circ \{0\}$ com 3 estados. Represente o AFND formalmente.

14. Converta os AFND's do exercício 13 - a) e 13 - d) em AFD's equivalentes (i.e. que reconheçam a mesma linguagem).

15. Converta os dois AFND's da Figura 2 em AFD's equivalentes.

16. Mostre que a linguagem $L_n = \{a^k | k \text{ é um múltiplo de } n\}$ é regular para todo o $n \in \mathbb{N}$.

17. Mostre que a linguagem $L_n = \{w|w \text{ é um número binário que é um múltiplo de } n\}$ é regular para todo o $n \in \mathbb{N}$.

18. Tendo em conta as linguagens definidas no exercício 12, determine um AFND que reconheça as seguintes linguagens:

    (a) $A \cup I$.

(b) $A \cup J$.

(c) $A \cup K$.

(d) $I \cup K$.

19. Tendo em conta as linguagens definidas nos exercícios 12 e 13, determine um AFND que reconheça as seguintes linguagens:

    (a) $C \circ L$.

    (b) $M \circ L$.

    (c) $L \circ M$.

    (d) $M \circ C$.

20. Tendo em conta as linguagens definidas nos exercícios 12 e 13, determine um AFND que reconheça as seguintes linguagens:

    (a) C^*.

    (b) M^*.

    (c) L^*.

    (d) H^*.

21. Mostre que todo o AFND pode ser convertido noutro AFND que reconhece a mesma linguagem, mas que só tem um estado final.

22. Sejam L_1 e L_2 linguagens regulares reconhecidas por AFD's M_1 e M_2, respetivamente. Construa, a partir de M_1 e M_2, um AFD que reconheça a linguagem $L_1 \cup L_2$.

23. Mostre que se a linguagem $L \subseteq \Sigma^*$ é regular, também o é a linguagem $\Sigma^* - L$. Por outras palavras, a classe das linguagens regulares é fechada para a operação de complemento.

24. Para cada linguagem definida no exercício 12, dê um exemplo de uma expressão regular que lhe esteja associada.

25. Para cada uma das seguintes expressões regulares, indique duas palavras que pertençam à linguagem que lhe está associada e duas palavras que não pertençam a esta linguagem. O alfabeto é $\Sigma = \{a, b\}$.

    (a) $\mathbf{a}^*\mathbf{b}^*$.

    (b) $\mathbf{a}(\mathbf{ba})^*\mathbf{b}$.

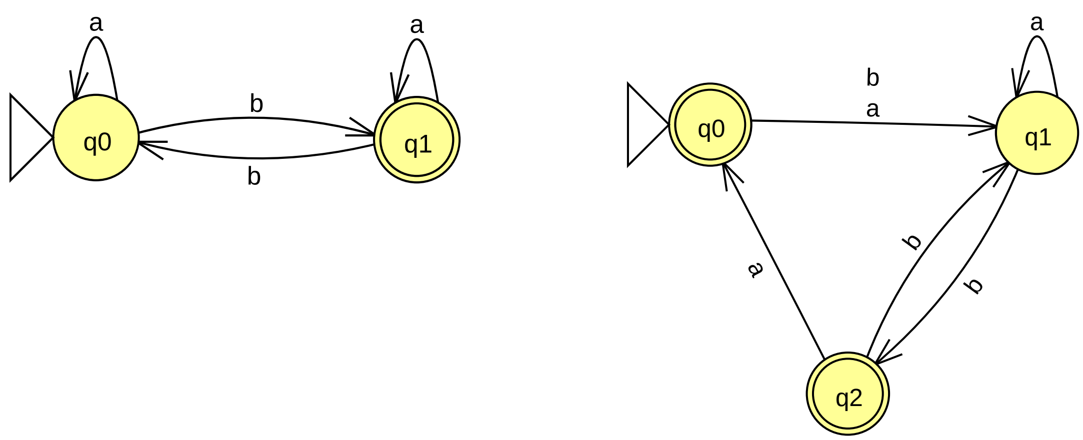

Figura 3: AFD's para o exercício 27.

(c) $\mathbf{a}^* \cup \mathbf{b}^*$.

(d) $(\mathbf{aaa})^*$.

(e) $\Sigma^*\mathbf{a}\Sigma^*\mathbf{b}\Sigma^*\mathbf{a}\Sigma^*$.

(f) $\mathbf{aba} \cup \mathbf{bab}$.

(g) $(\varepsilon \cup \mathbf{a})\mathbf{b}$.

(h) $(\mathbf{a} \cup \mathbf{ba} \cup \mathbf{bb})\Sigma^*$.

26. Para cada uma das seguintes expressões regulares, determine um AFND que reconheça a linguagem associada à expressão regular. Oalfabeto é $\Sigma = \{0, 1\}$.

    (a) $(\mathbf{0} \cup \mathbf{1})^*\mathbf{000}(\mathbf{0} \cup \mathbf{1})^*$.

    (b) $(((\mathbf{00})^*(\mathbf{11})) \cup \mathbf{01})^*$.

    (c) $\varnothing^*$.

27. Determine uma expressão regular associada à linguagem reconhecida por cada um dos AFD's da Figura 3.

28. Determine uma expressão regular associada à linguagem reconhecida pelos AFND's do exercício 15.

29. Seja L uma linguagem regular. Mostre que a linguagem $L^{\mathscr{R}} = \{w^{\mathscr{R}} | w \in L\}$ também é regular.

30. Seja $D = \{w \in \{0,1\}^* | w$ contém um número igual de ocorrências das subpalavras 01 e 10$\}$. Por exemplo $101 \in D$, mas $1010 \notin D$. Mostre que a linguagem D é regular.

31. Podemos facilmente definir a noção de *prefixo* para uma palavra y. A palavra x será um prefixo de y se existe uma palavra z tal que $y = xz$. Dizemos ainda que x é um prefixo próprio de y se x é prefixo de y e $x \neq y$. Da mesma forma x é um *sufixo de* y se existe uma palavra z tal que $y = zx$. Mostre que se A é uma linguagem regular, também o será a linguagem:

    (a) $NOPREFIX(A) = \{w \in A|$ nenhum prefixo próprio de w pertence a $A\}$.

    (b) $NOEXTEND(A) = \{w \in A|$ w não é prefixo próprio de nenhum $v \in A\}$.

    (c) $SUF(A) = \{w \in A|$ w é sufixo de algum $v \in A\}$.

32. Mostre que as seguintes linguagens não são regulares:

    (a) $L_0 = \{w \in \{0,1\}^* | w$ tem um número idêntico de 0's e 1's$\}$.

    (b) $L_1 = \{0^n a^n \in \{0,1,a\}^* | n \geq 0\}$.

    (c) $L_2 = \{0^n 1^n 2^n \in \{0,1,2\}^* | n \geq 0\}$.

    (d) $L_3 = \{www \in \{a,b\}^* | w \in \{a,b\}^*\}$.

    (e) $L_4 = \{a^n \in \{a,b\}^* | n = 2^k$ para $k \geq 0\}$.

    (f) $L_5 = \{w \in \{0,1\}^* | w$ tem um número idêntico de 0's e 1's$\}$.

    (g) $L_6 = \{(00)^n 1^n \in \{0,1\}^* | n \geq 0\}$.

33. Mostre que a linguagem $F = \{a^i b^j c^k \in \{a,b,c\}^* | i,j,k \geq 0$ e se $i = 1$, então $j = k\}$ é não-regular e satisfaz as 3 condições do Lema da bombagem. Explique porque é que não há contradição com esse resultado.

34. Se possível, dê exemplos de:

    (a) Uma expressão regular associada a uma linguagem L tal que $L^{\mathscr{R}}$ não é reconhecida por um AFD.

    (b) Uma linguagem A e uma linguagem regular B tal que $A \cup B$ não seja regular.

    (c) Duas linguagens regulares A e B tais que $A \cap B$ não seja regular.

    (d) Duas linguagens não-regulares A e B tais que $A \cap B$ seja regular.

    (e) Um AFD cujo estado inicial seja também final, e que reconheça uma linguagem L tal que $L \neq L^*$.

35. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

    (a) Todo o subconjunto finito de $\{0,1\}^*$ é uma linguagem regular.

    (b) Se um AFD com n estados aceita uma palavra de comprimento maior do que n, então aceita palavras de comprimento arbitrariamente grande (i.e. para qualquer $k \in \mathbb{N}$, aceita palavras de comprimento maior ou igual a k).

    (c) Se uma linguagem L é reconhecida por um AFND cujo estado inicial é o único estado final, então $L = L^*$.

    (d) A linguagem $L = \{w \in \{0,1\}^* \,|\, |w| \geq 4$ e o 4^o símbolo mais à direita de w é $1\}$ é regular.

    (e) Se A é uma linguagem regular, assim como $A \cup B$, então B terá de ser uma linguagem regular.

36. Determine autómatos de pilha que reconheçam cada uma das seguintes linguagens (em todos os casos o alfabeto Σ é $\{0,1\}$):

    (a) $A = \{w \in \{0,1\}^* | w$ contém pelo menos três 1s$\}$.

    (b) $B = \{w \in \{0,1\}^* | w$ começa e acaba com o mesmo símbolo$\}$.

    (c) $C = \{w \in \{0,1\}^* |$ o comprimento de w é ímpar$\}$.

    (d) $D = \{w \in \{0,1\}^* |$ o comprimento de w é ímpar e o símbolo do meio é um $0\}$.

    (e) $E = \{w \in \{0,1\}^* | w$ contém mais 1's do que 0's$\}$.

    (f) $F = \{w \in \{0,1\}^* | w^{\mathscr{R}} = w$ (i.e. w é um palíndromo)$\}$.

    (g) $G = \emptyset$.

37. Dê uma descrição formal de cada um dos autómatos de pilha que determinou no exercício 36.

38. Determine autómatos de pilha que reconheçam cada uma das seguintes linguagens:

    (a) O conjunto de todas as palavras sobre o alfabeto $\{a,b\}$ que têm o dobro de a's em relação ao número de b's.

    (b) O complemento da linguagem $\{a^n b^n | n \in \mathbb{N}_0\}$.

    (c) $\{w\#x | w^{\mathscr{R}}$ é uma subpalavra de x para $w, x \in \{0,1\}^*\}$.

    (d) $\{x_1\#x_2\#\ldots\#x_k | k \in \mathbb{N}, x_i \in \{a,b\}^*$, e para algum i e j tem-se que $x_i = x_j^{\mathscr{R}}\}$.

39. Determine autómatos de pilha que reconheçam as linguagens indicadas no exercício 13.

40. Considere a gramática livre de contexto $G = (V, \Sigma, R, E)$, onde $V = \{E, T, F\}$, $\Sigma = \{a, +, \times, (,)\}$ e as regras são dadas por

$$\begin{aligned} E &\to E + T | T \\ T &\to T \times F | F \\ F &\to (E) | a \end{aligned}$$

Indique as derivações para as seguintes palavras:

(a) a.

(b) $a + a$.

(c) $a + a + a$.

(d) $((a))$.

41. Considere a gramática livre de contexto $G = (V, \Sigma, R, A)$, onde $V = \{A, B, C, D\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ e as regras são dadas por

$$\begin{aligned} A &\to DAD | B \\ B &\to aCb | bCa \\ C &\to DCD | D | \varepsilon \\ D &\to a | b \end{aligned}$$

(a) Quais são as variáveis e terminais de G? Qual é a variável inicial?

(b) Dê exemplos de 3 palavras em $L(G)$.

(c) Dê exemplos de 3 palavras que não pertencem a $L(G)$.

(d) Quais das seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

(i) $C \Rightarrow aba$.

(ii) $C \stackrel{*}{\Rightarrow} aba$.

(iii) $C \Rightarrow C$.

(iv) $C \stackrel{*}{\Rightarrow} C$.

(v) $DDD \stackrel{*}{\Rightarrow} aba$.

(vi) $D \stackrel{*}{\Rightarrow} aba$.

(vii) $C \stackrel{*}{\Rightarrow} DD$.

(viii) $S \stackrel{*}{\Rightarrow} \varepsilon$.

42. Dê exemplos de gramáticas livres de contexto que geram as linguagens definidas no exercício 36.

43. Dê exemplos de gramáticas livres de contexto que geram as linguagens do exercício 38.

44. Dê um exemplo de uma gramática livre de contexto cuja linguagem é

$$L = \{a^i b^j c^k | i, j, k \in \mathbb{N}_0, \text{ e ou } i = j \text{ ou } j = k\}.$$

    Será essa gramática ambígua? Porquê?

45. Dê um exemplo de uma gramática livre de contexto na qual seja ambígua a palavra 0#1.

46. Descreva um autómato de pilha que reconheça a linguagem do exercício 44.

47. Considere a gramática $G = (V, \Sigma, R, S)$, onde $V = \{S, T, U\}$, $\Sigma = \{0, \#\}$, e R é o conjunto de regras dado por

$$\begin{aligned} S &\to TT | U \\ T &\to 0T | T0 | \# \\ U &\to 0U00 | \# \end{aligned}$$

    (a) Descreva $L(G)$ de forma informal.
    (b) Mostre que $L(G)$ não é regular.

48. Mostre que a classe das linguagens livres de contexto é fechada para:

    (a) A união.
    (b) A concatenação.
    (c) O operador de fecho.

49. Seja C uma linguagem livre de contexto e R uma linguagem regular. Mostre que a linguagem $C \cap R$ é livre de contexto.

50. Mostre que toda a linguagem reconhecida por um autómato de pilha é também reconhecida por um autómato de pilha com um único estado final.

51. Utilizando a ideia esboçada na demonstração do Lema 3.2.5, construa um autómato de pilha que reconheça a linguagem $L(G)$, onde $G = (V, \Sigma, R, S)$ é a gramática livre de contexto:

    (a) Definida pelas seguintes regras:

$$\begin{aligned} S &\to aTb | b \\ T &\to Ta | \varepsilon \end{aligned}$$

(b) Definida no exercício 40.

(c) Definida no exercício 41.

52. Aplique o procedimento indicado na demonstração do Lema 3.2.6 das folhas teóricas ao autómato de pilha da Fig. 4, para obter uma gramática livre de contexto associada à linguagem reconhecida por esse autómato de pilha.

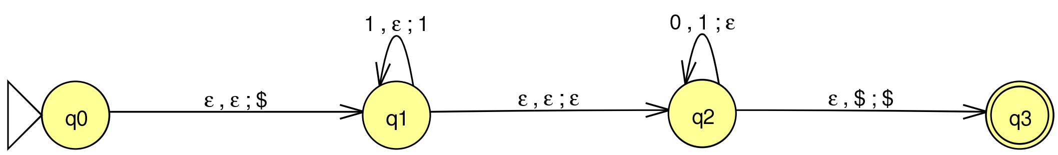

Figura 4: Autómato de pilha para o exercício 52.

53. Aplique o procedimento indicado na demonstração do Lema 3.2.6 das folhas teóricas aos autómatos de pilha obtidos no exercício 36, para obter gramáticas livres de contexto associadas às linguagens reconhecidas por esses autómatos.

54. Utilizando o lema da bombagem, mostre que a linguagem $\{a^n b^n c^n \in \{a,b,c\}^* | n \in \mathbb{N}_0\}$ não é livre de contexto.

55. Utilize as linguagens $A = \{a^m b^n c^n | m,n \in \mathbb{N}_0\}$, $B = \{a^n b^n c^m | m,n \in \mathbb{N}_0\}$, e a linguagem do exercício anterior, para mostrar que a classe das linguagens livres de contexto não é fechada para a interseção. Utilizando ainda as leis de De Morgan, mostre que a classe das linguagens livres de contexto também não é fechada para a complementação.

56. Mostre que a linguagem $\{w \in \{a,b,c\}^* | w$ tem um número igual de a's, de b's e de c's$\}$ não é uma linguagem livre de contexto.

57. Utilizando o Lema da bombagem, mostre que as seguintes linguagens não são livres de contexto:

    (a) $\{0^n 1^n 0^n 1^n \in \{0,1\}^* | n \in \mathbb{N}_0\}$.

    (b) $\{0^n \# 0^{2n} \# 0^{3n} \in \{0,\#\}^* | n \in \mathbb{N}_0\}$.

    (c) $\{w\#x | w$ é uma subpalavra de x, onde $x,w \in \{a,b\}^*\}$.

    (d) $\{x_1 \# x_2 \# \ldots \# x_k | k \in \mathbb{N} - \{1\}, x_i \in \{a,b\}^*$, e para algum $i \neq j$ tem-se que $x_i = x_j\}$.

58. Dê um exemplo de uma linguagem que não é livre de contexto, mas que satisfaz as 3 hipóteses do Lema da bombagem.

59. Descreva formalmente uma MT que decida a linguagem $\{w \in \{0,1\}^* | w$ contém o mesmo número de 1's que 0's$\}$.

60. Descreva formalmente uma MT que aceita a linguagem $A = \{0^k | k = 2^n$ para $n \in \mathbb{N}_0\}$.

61. Descreva formalmente uma máquina de Turing que decida a linguagem $A = \{w\#w | w \in \{0,1\}^*\}$. Será esta linguagem recursiva? E recursivamente enumerável?

62. Dê a descrição, em forma de 7-tuplo, da máquina de Turing que obteve no exercício 60.

63. Dê a descrição, em forma de 7-tuplo, da máquina de Turing que obteve no exercício 61.

64. Para as máquinas de Turing dos exercícios 60 e 61, indique qual é a sua configuração no 5^o passo da computação com inputs 000000 e 101#110, respetivamente. Qual é a configuração que se lhe segue?

65. Imagine um cavaleiro andante numa peregrinação por uma terra povoada de criaturas amigáveis (C) e infestada de dragões (D) e vampiros (V). Inicia a sua viagem sem armas, mas pode recolher pelo caminho espadas encantadas $(\rightarrow)$, que matam dragões, e amuletos (A), que encantam vampiros. Infelizmente, só pode carregar uma arma de cada vez (se encontrar uma nova arma, larga a antiga e fica com a nova), e arma torna-se logo ineficaz após o seu uso. Descreva uma máquina de Turing que aceita uma viagem (uma palavra de $\{A, C, D, V, \rightarrow\}^*$) se e só se o cavaleiro sobrevive (por exemplo, na viagem $C \rightarrow CDA \rightarrow CD$ o cavaleiro sobrevive, mas já na viagem $C \rightarrow CDA \rightarrow CDV$ ele não sobrevive, pois não dispõe de armas para derrotar o vampiro que encontra no fim).

66. Descreva formalmente uma máquina de Turing com o seguinte comportamento: no inicio a fita tem um input com k 1's consecutivos. Queremos que a computação acabe sempre e que no final a fita só contenha $k+1$ 1's consecutivos, estando a cabeça de leitura em cima do 1 mais à esquerda (esta MT calcula a função sucessor $suc(k) = k+1$).

67. Descreva formalmente uma MT que compute a função $f_+ : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $f_+(x,y) = x+y$, onde $x, y \in \mathbb{N}$ são os inputs. O input da MT é dado por x 1's consecutivos, seguido de um símbolo branco B, seguido de y 1's consecutivos. O resultado deve ser calculado em notação unária, i.e. deve ser formado por $x+y$ 1's consecutivos.

68. Descreva formalmente uma MT que compute a função $f_{\max} : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $f_{\max}(x,y) = \max(x,y)$, onde $x, y \in \mathbb{N}$ são os inputs. Os inputs e outputs devem ser dados/obtidos segundo as regras do exercício anterior.

69. Descreva formalmente uma MT que calcule a função sucessor para inputs definidos em binário sobre $\{0,1\}^*$. O resultado também deve ser escrito em binário.

70. Descreva formalmente uma máquina de Turing com duas fitas que decida a linguagem $D = \{\#x_1\#x_2\#\ldots\#x_k | x_i \in \{0,1\}^*$, e $x_i \neq x_j$ sempre que $i \neq j\}$.

71. Descreva formalmente uma máquina de Turing com duas fitas que decida a linguagem $C = \{a^i b^j c^k | i \times j = k$ e $i, j, k \in \mathbb{N}\}$. Será esta linguagem recursiva? E recursivamente enumerável?

72. Descreva informalmente cada uma das máquinas de Turing que obteve nos exercícios 70 e 71.

73. Qual a linguagem aceite pela máquina de Turing não-determinística da Fig. 5? E qual a linguagem decidida por esta MTND? Alguma desta linguagens é recursiva? E recursivamente enumerável?

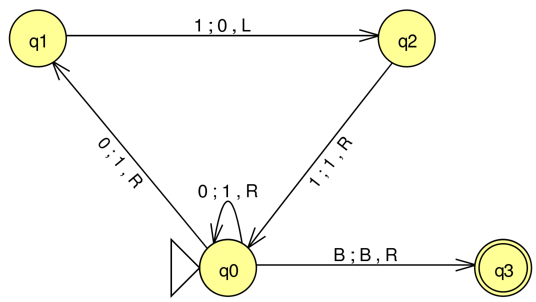

Figura 5: Máquina de Turing não-determinística para o exercício 73.

74. Considere a linguagem $L = \{a^{n+1}b^n \in \{a,b\}^* | n \in \mathbb{N}_0\}$. Descreva formalmente uma máquina de Turing que aceite, mas não reconheça a linguagem L. Será a linguagem L recursivamente enumerável? E recursiva?

75. Diga porque é que o seguinte texto não é uma descrição legítima de uma máquina de Turing:
M_{mau} =“o input é um polinómio $p(x)$,
1. Teste o valor de p para todos os valores inteiros de x.
2. Se $p(x) = 0$ para algum dos valores anteriores, aceitar, caso contrário rejeitar”.

76. Mostre que a classe das linguagens recursivas é fechada para as seguintes operações:

    (a) União.

    (b) Concatenação.

(c) Operador de fecho.
(d) Complementação.
(e) Interseção.

77. Mostre que a classe das linguagens recursivamente enumeráveis é fechada para as seguintes operações:

    (a) União.
    (b) Concatenação.
    (c) Operador de fecho.
    (d) Interseção.

78. Seja G o grafo da Fig. 6. Para cada uma das codificações indicadas na Secção 4.2 dos apontamentos teóricos, determine $\langle G \rangle$.

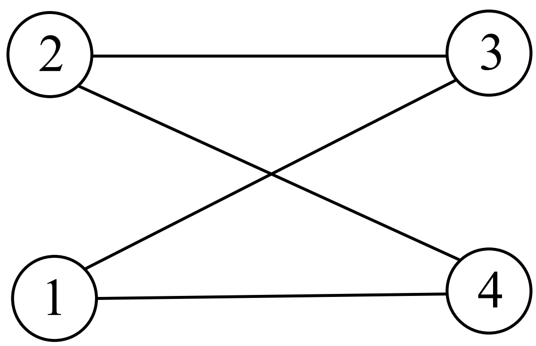

Figura 6: Grafo para o exercício 78.

79. Dada a maquina de Turing não-determinística M da Fig. 5, determine $\langle M \rangle$, utilizando uma codificação semelhante ao segundo tipo de codificação para grafos introduzido nos apontamentos teóricos.

80. Mostre que uma linguagem é recursiva se e só se ela é r.e. assim como o seu complemento.

81. Sejam $L_1, L_2, \ldots, L_k$ k linguagens sobre Σ satisfazendo simultaneamente as seguintes 3 condições
    (i) Para todo o $i \neq j$, $L_i \cap L_j = \varnothing$.
    (ii) $L_1 \cup L_2 \cup \ldots \cup L_k = \Sigma^*$.
    (iii) Cada uma das linguagens L_i, $i = 1, \ldots, k$ é r.e.
    Mostre que cada uma das linguagens $L_1, L_2, \ldots, L_k$ é recursiva.

82. Considere a linguagem $H_{paragem}$ definida $H_{paragem}$ pelo problema da paragem. O seu complemento é recursivo? E recursivamente enumerável?

83. Diga, justificando, quais das seguintes afirmações são verdadeiras:

    (a) $2n \in O(n)$.

    (b) $n^2 \in O(n)$.

    (c) $n^2 \in O(n \log^2 n)$.

    (d) $n \log n \in O(n^2)$.

    (e) $3^n \in 2^{O(n)}$.

    (f) $2^{2^n} \in O(2^{2^n})$.

84. Se possível, dê um exemplo de uma linguagem que:

    (a) Pertença a $TIME(n^2)$.

    (b) Pertença a $TIME(n^{2000000})$.

    (c) Pertença a $NTIME(n^2)$.

    (d) Pertença a P.

    (e) Pertença a NP

    (f) Pertença a $EXPTIME$.

    (g) Não pertença a P.

    (h) Não pertença a $EXPTIME$.

85. Mostre que $PATH \in P$, onde

$$PATH = \{\langle G, s, t\rangle \text{ onde } G \text{ é um grafo não-orientado} | \text{existe um caminho de } s \text{ a } t\}.$$

86. Mostre que $UNARY\text{-}PRIMES \in P$, onde

$$UNARY\text{-}PRIMES = \{1^n | n \text{ é um número primo}\}.$$

87. Mostre que $CONNECTED \in P$, onde

$$CONNECTED = \{\langle G\rangle \text{ onde } G \text{ é um grafo não-orientado} | G \text{ é conexo}\}.$$

88. Um *clique* num grafo não-orientado é um subgrafo em que quaisquer dois vértices estão ligados por uma aresta. Um k-clique é um clique que tem k vértices. Um triângulo num grafo não-orientado é um 3-clique. Mostre que $TRIANGLE \in P$, onde

$$TRIANGLE = \{\langle G \rangle \text{ onde } G \text{ é um grafo não-orientado} | G \text{ contém um triângulo}\}.$$

89. Dois grafos G e H dizem-se isomorfos se os vértices de G podem ser reordenados de forma a que seja idêntico a H. Mostre que $ISO \in NP$, onde

$$ISO = \{\langle G, H \rangle | G \text{ e } H \text{ são grafos isomorfos}\}.$$

90. Mostre que $CLIQUE \in NP$, onde

$$CLIQUE = \{\langle G, k \rangle \text{ onde } G \text{ é um grafo não-orientado} | G \text{ contém um } k\text{-clique}\}.$$

91. Mostre que $SUBSET\text{-}SUM \in NP$, onde

$$SUBSET\text{-}SUM = \{\langle S, t \rangle \text{ onde } S = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq \mathbb{N}_0 | \text{para algum } \{y_1, \ldots, y_k\} \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}, \text{ tem-se } \textstyle\sum_{i=1}^{k} y_i = t\}.$$

92. Mostre que a classe P é fechada para as operações de união, concatenação, e complemento.

93. Mostre que a classe NP é fechada para a união e a concatenação.

94. Mostre que P é fechado para o operador de fecho.

95. Mostre que NP é fechado para o operador de fecho.

96. Sabe-se que $HAMPATH \leq_P CLIQUE$ ($HAMPATH$ foi definido nos apontamentos teóricos). Será que:

    (a) $TRIANGLE \leq_P CLIQUE$?

    (b) $CLIQUE \leq_P TRIANGLE$?

    (c) $CLIQUE \leq_P HAMPATH$?

    (d) $SUBSET\text{-}SUM \leq_P HAMPATH$?

    (e) $SUBSET\text{-}SUM \leq_P CLIQUE$?

    (f) Quais dos problemas $HAMPATH$, $CLIQUE$, $TRIANGLE$, $SUBSET\text{-}SUM$ são garantidamente NP-completos?

(g) Assumindo que $P = NP$, quais dos problemas da alínea f) são NP-completos?

(h) Assumindo que $P \neq NP$, quais dos problemas da alínea f) não são garantidamente NP-completos?

97. Mostre que se $P = NP$, então toda a linguagem de P, com exceção de $A = \varnothing$ e $A = \Sigma^*$ é NP-completa.

98. Seja $L \in NP$. Em que condições é que L é uma linguagem NP-completa?