

JUSTIFIQUE TODAS AS RESPOSTAS

1. Seja $V = \{p_1, p_2, \dots, p_{79}\}$ um conjunto de variáveis proposicionais e $\phi = \neg p_1 \Rightarrow (p_{30} \vee \neg p_{54})$.
- (a) A fórmula ϕ é contraditória? (1, 0 val.)
 - (b) A fórmula $\neg\phi \wedge \phi$ é satisfazível? Não se esqueça de justificar a sua resposta. (1, 0 val.)
 - (c) Se possível, determine uma fórmula ψ em forma normal conjuntiva tal que $\psi \equiv \phi$. (1, 0 val.)
 - (d) Verifique se se tem $\{\phi \wedge \neg p_1, p_1 \Rightarrow (p_2 \Rightarrow (p_3 \Rightarrow (p_4 \Rightarrow (p_5 \Rightarrow (p_6 \Rightarrow p_7)))))\} \vdash \phi$. (1, 0 val.)
 - (e) Se possível, determine uma fórmula ψ tal que $\models \phi \vee \psi$. (1, 0 val.)
 - (f) Verifique se a fórmula ϕ é uma tautologia, utilizando tableaux. (1, 0 val.)
 - (g) É consistente o sistema resultante de adicionar aos axiomas do sistema de Hilbert os elementos do seguinte conjunto: $\Gamma = \{\phi\}$? (1, 0 val.)
 - (h) Existe alguma fórmula ψ tal que $\psi \vee \neg\psi \models \psi \vee \phi$? (1, 0 val.)
2. Sejam ϕ e ψ fórmulas do cálculo proposicional. Mostre, utilizando apenas regras do sistema dedutivo de Hilbert, que se tem $\{\neg\phi, \phi\} \vdash \psi$ (sugestão: utilize uma fórmula do formulário). (1, 5 val.)
3. Seja \mathcal{L} uma linguagem de primeira ordem em que $C = \{c_1\}$, $F = \{f_1^1\}$, $P = \{p_1^1, p_1^2\}$, e considere a fórmula

$$\phi = (\forall x_1)(p_1^2(c_1, f_1^1(x_1)) \Rightarrow p_1^1(x_1)).$$

- (a) Para cada ocorrência de uma variável na fórmula ϕ , indique se essa ocorrência é livre ou ligada. (1, 0 val.)
 - (b) Determine, se possível, uma fórmula normal prenexa que seja logicamente equivalente à fórmula ϕ . (1, 0 val.)
 - (c) Se possível, determine uma interpretação I que satisfaça a fórmula ϕ . (1, 0 val.)
4. Sejam ϕ, ψ fórmulas do cálculo de predicado. Mostre, utilizando apenas regras do sistema dedutivo de Hilbert, que se tem $\forall x_i \phi \vdash \forall x_i (\psi \Rightarrow \phi)$. (1, 5 val.)

(continua \implies)

5. Considere a linguagem de primeira ordem \mathcal{L} em que $C = \{c_1\}$, $F = \{f_1^1\}$, $P = \{p_1^1, p_1^2\}$, e a interpretação $I = (\mathcal{D}_I, \mathcal{C}_I, \mathcal{F}_I, \mathcal{P}_I)$ onde:

$\mathcal{D}_I = \{0, 1, \textit{indefinido}\}$, $[c_1]_I = 0$, $[p_1^1]_I(x) = 1$ sse $x = 1$, $[p_1^2]_I(x, y) = 1$ sse $x \neq 1$ ou $y \neq 1$ e $[f_1^1]_I$ é definida pela seguinte tabela:

x	$[f_1^1]_I(x)$
0	0
1	<i>indefinido</i>
<i>indefinido</i>	<i>indefinido</i>

- (a) Indique se é satisfeita ou não, nesta interpretação, a fórmula $\phi = (\forall x_1)p_1^2(c_1, f_1^1(x_1)) \Rightarrow (\exists x_1)p_1^1(x_1)$. (1,0 val.)
- (b) Se possível, indique uma valoração v tal que $\models_v^I \phi$ onde ϕ é a fórmula indicada na alínea anterior. (1,0 val.)
6. Considere a função $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x! & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

- (a) Construa um programa **Prog** que calcule esta função, sendo o input o valor inicial de uma variável x , e devendo o output ser retornado numa variável y . O programa deve terminar, independentemente do valor que x toma inicialmente (será sempre um valor em \mathbb{Z}). Mais precisamente, quer-se um programa **Prog** tal que $\vdash_{\text{tot}} (1) \text{Prog } (y = f(x))$ (nesta alínea basta indicar o programa. Não é necessário mostrar a correção total). (1,0 val.)
- (b) Mostre que se tem $\vdash_{\text{par}} (1) \text{Prog } (y = f(x))$ para o programa **Prog** que obteve na alínea anterior. (2,0 val.)
- (c) Mostre que se tem $\vdash_{\text{tot}} (1) \text{Prog } (y = f(x))$ para o programa **Prog** que obteve na alínea a). No caso de ter utilizado um ciclo **while** no seu programa **Prog**, pode substituir o invariante desse ciclo pela expressão “Inv”, mesmo que não tenha determinado esse invariante anteriormente. (1,0 val.)