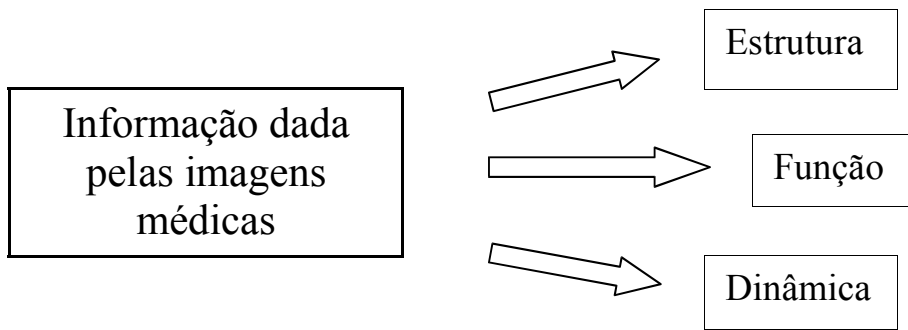


IMAGENS MÉDICAS



FORMAÇÃO DE IMAGENS

Resposta de um Sistema Linear

- Seja $f(t)$ um sinal de entrada e $h(t,t')$ uma função peso, à saída de um determinado sistema linear, temos uma resposta que cumpre:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t')h(t,t')dt'$$

- Repare-se que a função $h(t,t')$ não é mais do que a resposta do sistema a um impulso (delta de dirac).
- Repare-se ainda que num sistema estacionário a resposta não depende do instante a que a entrada ocorre, mas apenas da diferença entre t (instante em estudo) e t' (instante em que a entrada ocorreu):

$$h(t,t') = h(t - t')$$

- Ou seja, a resposta passa a vir dada pela convolução da função f com a função h :

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t')h(t - t')dt' = f(t) \otimes h(t)$$

- De modo que é possível aplicar o teorema da convolução, que relaciona os coeficientes de Fourier das três funções envolvidas:

$$C_g(\omega) = C_f(\omega)C_h(\omega) - S_f(\omega)S_h(\omega)$$

$$S_g(\omega) = C_f(\omega)S_h(\omega) + S_f(\omega)C_h(\omega)$$

- Ou, se estendermos o formalismo a duas dimensões:

$$C_g(k_x, k_y) = C_f(k_x, k_y)C_h(k_x, k_y) - S_f(k_x, k_y)S_h(k_x, k_y)$$

$$S_g(k_x, k_y) = C_f(k_x, k_y)S_h(k_x, k_y) + S_f(k_x, k_y)C_h(k_x, k_y)$$

- Habitualmente a variável ω é utilizada para representar a frequência angular, enquanto que k corresponde à frequência espacial.
- Uma analogia possível é pensar-se que quando uma determinada grandeza varia muito rapidamente no tempo, estamos na presença de uma frequência temporal elevada, quando o brilho de uma imagem varia muito rapidamente de um ponto para o outro, então está-se na presença de uma frequência espacial elevada.

Aplicação do formalismo a um sistema óptico

- Um objecto no plano (x', y') que se caracterize por irradiância $L(x', y')$ e que passe por um sistema óptico real tipo *pinhole*, dá origem a uma imagem cuja iluminância é dada por:

$$E_{\text{imagem}}(x, y) = \iint L(x', y') h(x, y; x', y') dx' dy'$$

- À função $h(x, y; x', y')$ dá-se o nome de função espalhamento de ponto, uma vez que descreve a imagem criada por um objecto pontual.
- Se a resposta a um objecto depender apenas da diferença entre as coordenadas do objecto e da imagem, o sistema diz-se invariante no espaço, e a iluminância vem dada por:

$$E_{\text{imagem}}(x, y) = \iint L(x', y') h(x - mx', y - my') dx' dy' \text{ que é a convolução de } L \text{ por } h.$$

- E, uma vez mais, pelo teorema da convolução tem-se:

$$C_{\text{imagem}}(k_x, k_y) = C_{\text{objecto}}(k_x, k_y) C_h(k_x, k_y) - S_{\text{objecto}}(k_x, k_y) S_h(k_x, k_y)$$

$$S_{\text{imagem}}(k_x, k_y) = C_{\text{objecto}}(k_x, k_y) S_h(k_x, k_y) + S_{\text{objecto}}(k_x, k_y) C_h(k_x, k_y)$$

- Existem vários parâmetros, baseados no formalismo apresentado, que caracterizam o comportamento dos sistemas a várias frequências, podendo ser usados como medidas da qualidade das imagens:

a) Função Transferência Óptica (FTO):

Transformada de Fourier da função espalhamento de ponto, caracterizada pelos coeficientes: $C_h(k_x, k_y)$ e $S_h(k_x, k_y)$.

b) Função Transferência de Modulação (FTM):

$$\text{Amplitude da FTO: } \text{MTF}(k_x, k_y) = \left[C_h^2(k_x, k_y) + S_h^2(k_x, k_y) \right]^{1/2}$$

c) Função Transferência de Fase (FTF):

$$\text{Argumento da FTO: } \text{FTF}(k_x, k_y) = \arctan \frac{S_h(k_x, k_y)}{C_h(k_x, k_y)}$$

Frequências espaciais presentes numa imagem

- Considerem-se as seguintes variáveis unidimensionais (facilmente estendidas a mais do que uma dimensão):

L - dimensão do campo de visão

D - dimensão da imagem

N - número de pontos de que a imagem é constituída (pixels)

k_0 e $k_{\text{máx}}$ - menor e maior frequências espaciais presentes na imagem

Δx - resolução da imagem

Δk - resolução em frequência espacial

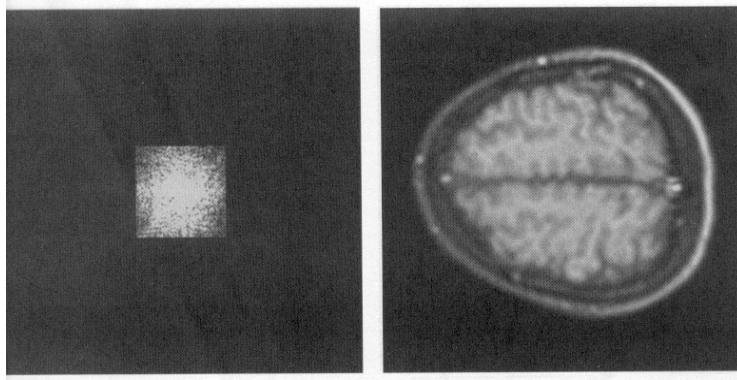
- Quando se aplica o formalismo das transformadas de Fourier, imagina-se a imagem repetida indefinidamente em espaços de D .
- Nestas condições, é fácil deduzir que:

$$k_0 = 2\pi / L \qquad \Delta k = k_0 \qquad D < \frac{2\pi}{\Delta k}$$

$$\Delta x = D / N \qquad k_{\text{máx}} = N\Delta k / 2 \qquad \Delta x = \frac{D\Delta k}{2k_{\text{máx}}} = \frac{\pi}{k_{\text{máx}}}$$

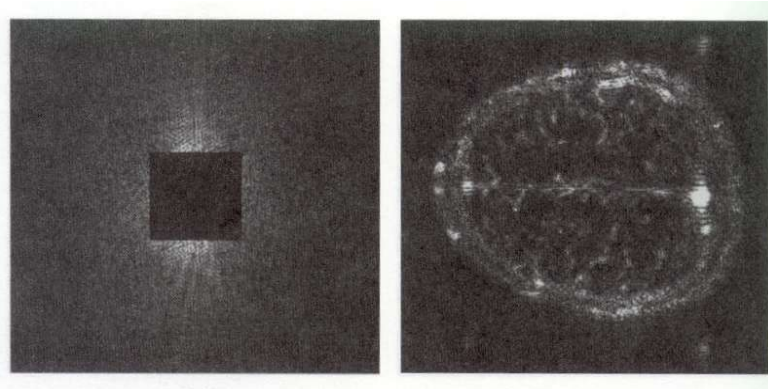
Efeitos da filtragem de imagens

- O formalismo das transformadas de Fourier permite, entre outras possibilidades, manipular a imagem de diversas formas. Observe-se o que acontece quando são retiradas as altas frequências a uma imagem (filtro passa baixo):



...perde-se resolução e o detalhe dos contornos.

- ... E aplicando um filtro passa alto (retirando-se as frequências mais baixas):



...perde-se a forma, o contraste e as diferentes gradações de brilho, enfatiza-se os contornos.

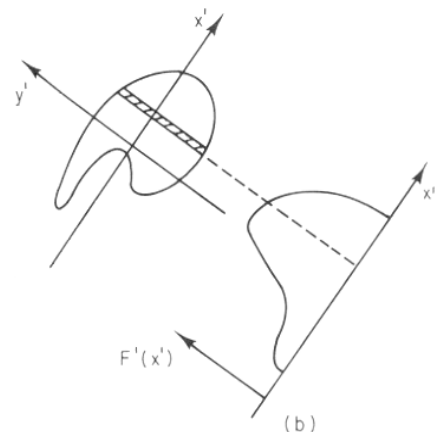
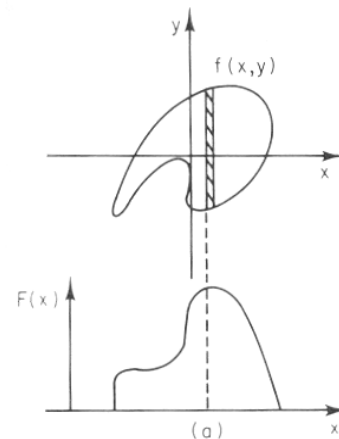
Reconstrução de imagens a partir de projecções

- A reconstrução de imagens tridimensionais a partir de projecções das mesmas é um problema matemático de resolução relativamente complexa.
- A sua solução com base na transformada de Fourier pressupõe a constatação que a transformada de Fourier da projecção $F(x)$, dada por:

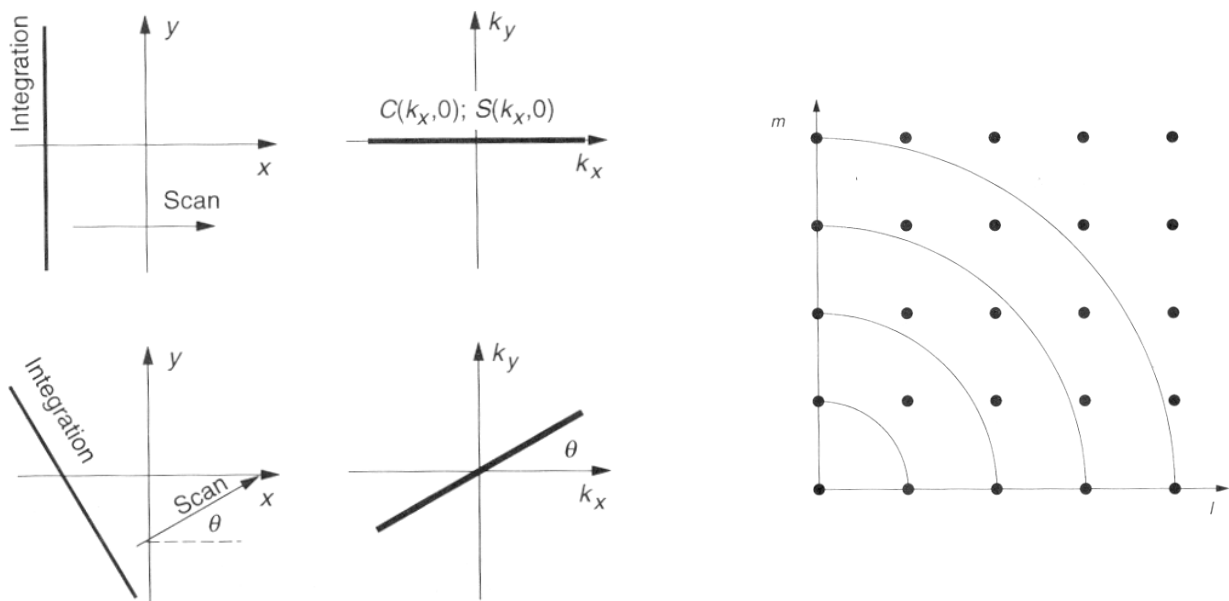
$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$

fornece os coeficientes da transformada de Fourier da função $f(x,y)$ ao longo da linha sobre qual a projecção de realiza.

- Deste modo, é possível reconstruir-se o objecto $f(x,y)$, desde que se proceda a um processo de interpolação dos coeficientes (ver figura da página seguinte)



a



- Uma outra técnica de reconstrução de imagens é a de retroprojecção, ou, um refinamento desta, conhecida por retroprojecção filtrada.
- O princípio no qual esta técnica se baseia é o de considerar que a imagem reconstruída poderá ser a soma das contribuições de todas as projecções, ou seja, se $f(x,y)$ for o objecto, $F_{\vartheta}(x')$ a projecção sobre o eixo que faz um ângulo ϑ com x e $f_b(x,y)$ a imagem reconstruída (ou retroprojectada), temos:

$$f_b(x, y) = \int_0^{\pi} F_{\vartheta}(x') d\vartheta$$

- Antes de mais, prova-se que este processo é equivalente a considerar a convolução da função objecto $f(x,y)$ com a função $h(x-x',y-y')=1/r$, sendo r a distância dos pontos referentes ao objecto e ao ponto da imagem que se está a considerar, (x,y) :

$$f_b(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{f(x', y')}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 \right]^{1/2}} \right) dx' dy'$$

- Porém, verifica-se que a imagem assim obtida se encontra longe de ser uma boa representação do objecto real, ou seja:

$$f_b(x, y) \neq f(x, y)$$

- E, portanto, com o objectivo de superar esta dificuldade, segue-se o seguinte raciocínio:

- a) Pretende-se encontrar a função $g(x,y)$ que convoluída com a função $h(x-x',y-y')$ $=1/r$ e retroprojectada coincida com a função objecto:

$$g_b(x, y) = f(x, y)$$

- b) Utiliza-se as relações entre os coeficientes de Fourier das diversas funções envolvidas para escrever os coeficientes de Fourier da função $g(x,y)$:

$$C_g(k_x, k_y) = \frac{1}{2\pi} (k_x^2 + k_y^2)^{1/2} C_f(k_x, k_y)$$

$$S_g(k_x, k_y) = \frac{1}{2\pi} (k_x^2 + k_y^2)^{1/2} S_f(k_x, k_y)$$

- c) Por fim, recordando um resultado anterior que mostrava que os coeficientes de Fourier do objecto para $k_y=0$ são os coeficientes de Fourier da função projecção, e após algumas manipulações matemáticas, chega-se à conclusão que:

$$C_g(k_x, k_y) = \frac{1}{2\pi} |k_x| C_f(k_x, 0)$$

$$S_g(k_x, k_y) = \frac{1}{2\pi} |k_x| S_f(k_x, 0)$$

- d) Então... é possível encontrar uma função $h(x)$ tal que convoluída com $F_g(x')$ seja $f(x,y)$. Tendo essa função os seguinte coeficientes de Fourier:

$$C_h = |k_x| / 2\pi$$

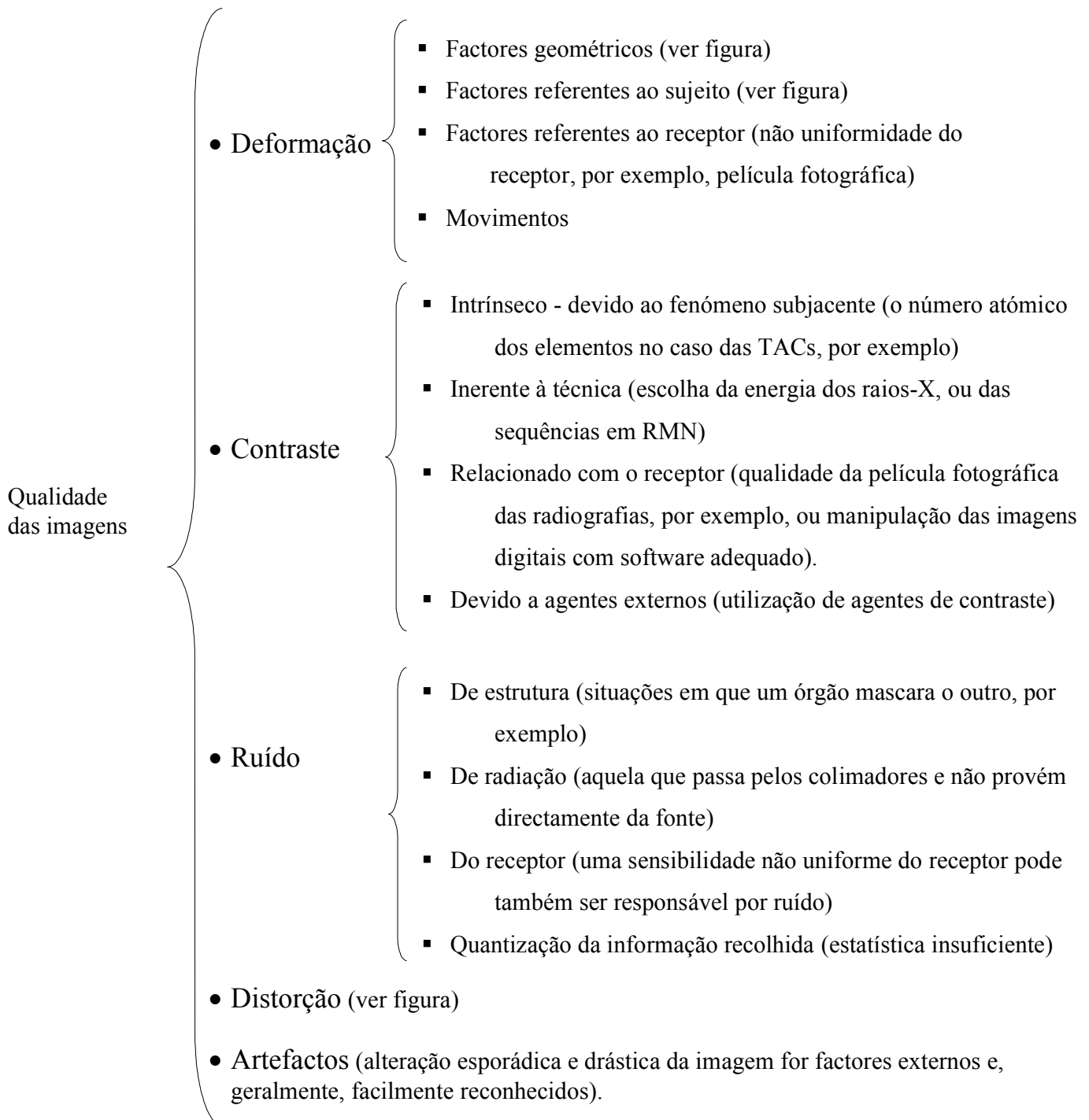
$$S_h = 0$$

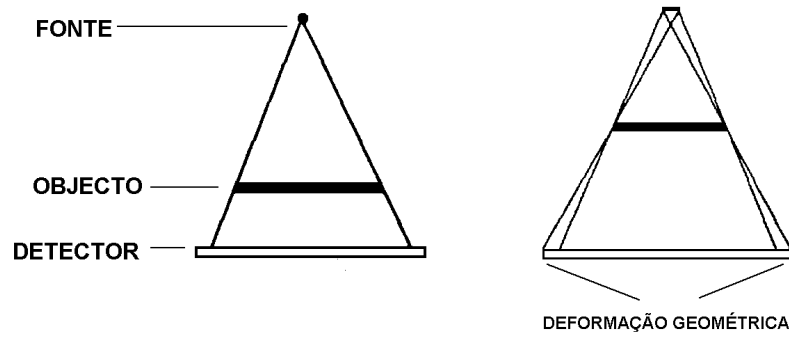
- e) Ou seja, após alguns passos matemáticos, conclui-se que a função $h(x)$ tem a expressão:

$$h(x) = \frac{k_{x\text{máx}}^2}{(2\pi)^2} [2\text{sinc}(\xi) - \text{sinc}^2(\xi)],$$

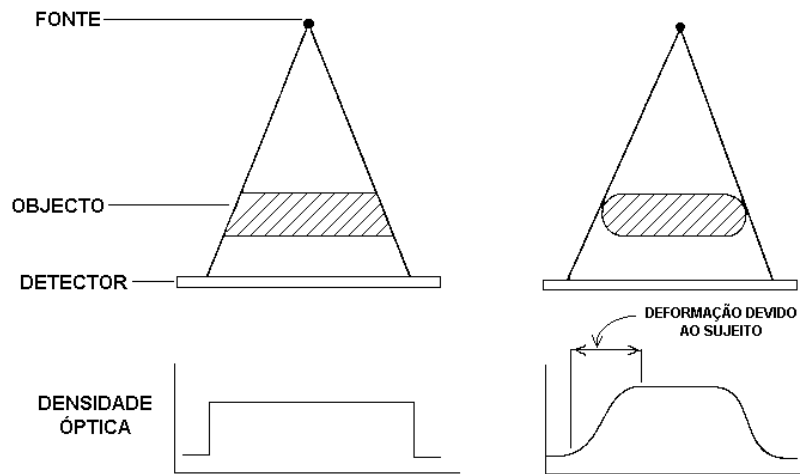
onde $\text{sinc}(x)$ é o seno cardinal de x e ξ é $k_{x\text{máx}}x$

FACTORES QUE INFLUENCIAM A QUALIDADE DA IMAGEM

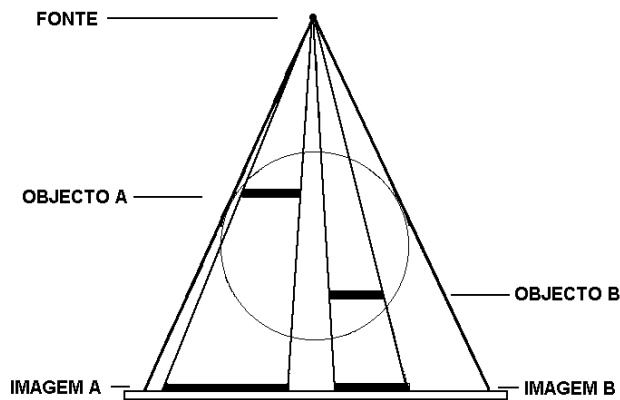




Deformação devida a factores geométricos (geometria do sistema)



Deformação devida ao sujeito (geometria dos órgãos)



Distorção da imagem - as relações de comprimento não se mantêm