

**UNIVERSIDADE DO ALGARVE**

**FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA**

**APONTAMENTOS DE FÍSICA MÉDICA**

**Cursos: Engenharia Física, ramos Física Médica e Tecnológico e Física e  
Química**

2006/2007 - 1º Semestre

*Docente: Carla Silva*



## RESUMO

A Física Médica é uma área interdisciplinar que corresponde à aplicação de conceitos, modelos ou equipamentos desenvolvidos em Física que sejam utilizados na prática clínica. Uma vez que é um tópico que deve a sua especificidade ao objecto de estudo e não tanto ao formalismo que utiliza,<sup>1</sup> exige um conhecimento abrangente de diversas matérias de Física (Clássica e Moderna) e uma especial aptidão para a compreensão dos mecanismos de funcionamento dos sistemas biológicos e, destes, em particular, da fisiologia humana, uma vez que o seu principal objectivo é o desenvolvimento de ferramentas que permitam ajudar nos diagnósticos, terapias e todo o tipo de avaliação clínica.

Neste contexto, assume-se que os estudantes possuem já uma formação razoavelmente sólida em muitas das matérias de Física e que conhecem, ainda que de uma forma pouco aprofundada, alguns dos mecanismos fisiológicos do corpo humano.

Este curso está organizado em nove capítulos, que pretendem, por um lado, cobrir um espectro bastante alargado dos equipamentos médicos actualmente utilizados em Medicina e, por outro, fornecer aos alunos alguns dados sobre a função que um Físico poderá e deverá ocupar no meio hospitalar e no âmbito das Ciências da Saúde, em geral.

Num primeiro capítulo serão introduzidos, de uma forma simples, os vários elementos dos equipamentos médicos: os seus blocos constituintes, os sensores nos quais se podem basear e alguns tópicos sobre processamento de dados, que são de particular importância nos módulos logiciais (*software*). No que respeita aos sensores serão considerados os principais transdutores aplicados em Física Médica: os sensores de grandezas mecânicas; os termómetros; os eléctrodos e os químicos. Saliente-se que alguns sensores específicos das técnicas de imagem serão considerados no segundo capítulo. Quanto ao processamento de dados, irão ser recordadas algumas noções matemáticas que, dado o papel relevante que desempenham em Física Médica, nos parece oportuno retomar. Além de algumas definições importantes no que respeita à discretização dos dados, serão também abordadas as técnicas de ajuste usando os mínimos quadrados, que, como é do conhecimento geral, são de extrema utilidade quando se pretende modelar determinada actividade com base em qualquer formalismo matemático e os Métodos de Transformada de Fourier que são amplamente utilizados quer na análise de séries temporais, quer na reconstrução e processamento de imagens. Por fim, referir-se-ão algumas formas de gravação dos dados, nomeadamente, de registos digitais.

O segundo capítulo será inteiramente dedicado às técnicas de diagnóstico que envolvem imagem. Num primeiro momento serão discutidos os métodos através dos quais as imagens são construídas, tanto a 2 como a 3 dimensões e, seguidamente, serão explicados os diversos métodos de obtenção de imagens médicas, como sejam: o uso dos raios-X (tanto em radiografia, como em Tomografia Axial Computadorizada - TAC); o uso de marcadores nucleares (Cintigrafia, Tomografia de Fotão Único – SPECT e Tomografia de Emissão de Positrões - TEP); a ecografia

---

<sup>1</sup> A Mecânica, a Termodinâmica, o Electromagnetismo, a Mecânica Quântica, por exemplo, são áreas da Física que se distinguem pelo formalismo a que cada uma delas recorre, ao contrário da Física Médica que aplica qualquer destes formalismos a diferentes situações clínicas.

(tradicional e de efeito de Doppler) e a Ressonância Magnética Nuclear – RMN (referente a imagens anatómicas e funcionais).

O terceiro capítulo será referente ao uso de técnicas de Radiação Nuclear em tratamento oncológico, que é, aliás, uma das áreas tradicionais da Física Médica. Neste âmbito serão abordadas as duas formas de tratamento radioactivo: a Radioterapia Externa e a Braquiterapia.

Tendo em conta o elevado potencial da aplicação dos lasers em Medicina, o quarto capítulo será inteiramente dedicado a estes equipamentos, enfatizando as três especialidades médicas em que o seu uso tem sido mais divulgado: Cirurgia, Oftalmologia e Oncologia.

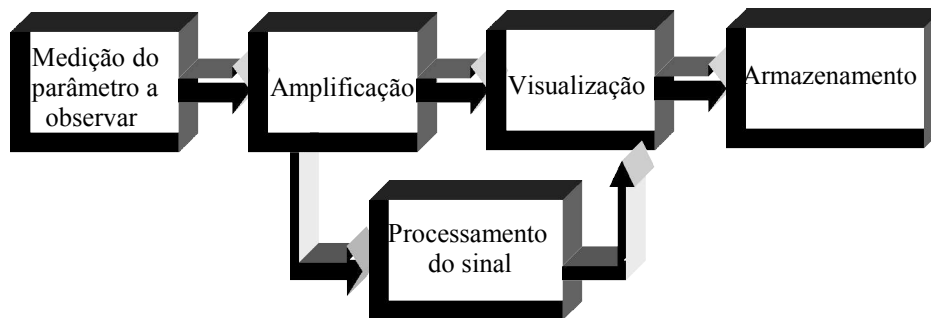
Os quinto e sexto capítulos referem duas das mais conhecidas técnicas de medição de potenciais eléctricos no corpo humano: a electrocardiografia (ECG) e a electroencefalografia (EEG). Neles são discutidos não só alguns aspectos ao nível de instrumentação, como também do processamento posterior dos sinais medidos, dando especial relevância ao tratamento de registos correspondentes à actividade espontânea e evocada do EEG, passando pela análise dos ritmos do sono.

O sétimo capítulo tem como objectivo a referência a alguns aspectos de Física Médica que não tenham sido abordados anteriormente, como sejam os Biomateriais, equipamentos vários de monitorização, imagens de infravermelho, etc.

Nos últimos capítulos pretende-se alertar os alunos para a importância da segurança do equipamento hospitalar, quer para os funcionários, quer para os doentes e para algumas questões relacionadas com a bioética, principalmente com o papel do Físico na orgânica hospital e de como as relações com os doentes devem obedecer a rigorosas normas de comportamento.

# 1. INTRODUÇÃO

Os instrumentos médicos podem ter funções de medida, monitorização, cirurgia ou terapia. Concentrando-nos nos sistemas de medida, é possível reduzi-los a um pequeno conjunto de operações que poderão ser mais ou menos complexas. Desta forma, sempre que se pretender aceder à medida de uma grandeza, quer directamente através dos nossos sentidos, quer utilizando equipamentos adequados, podemos distinguir cinco passos (ver figura 1.1): No primeiro, com o recurso a um sensor apropriado, transforma-se a grandeza a que se pretende aceder num sinal analisável (tipicamente um sinal eléctrico). No segundo passo, esse sinal é amplificado, uma vez que, em particular nos fenómenos biológicos, a ordem de grandeza do sinal medido é, em geral, tão baixa que se torna difícil de processar. Em seguida, ou se observa directamente o sinal ou se processa o sinal e posteriormente se o observa. Por fim, o sinal poderá ser guardado de modo a poder ser novamente analisado ou sofrer posteriores processamentos.



**Figura 1.1 - Esquema dos blocos existentes num sistema de medição.**

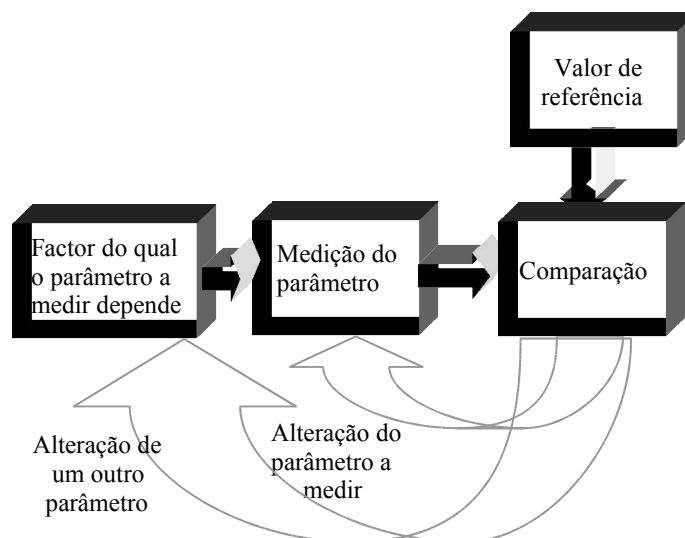
Para ilustrar a aplicação deste esquema a duas situações considere-se: 1) a percepção de uma imagem através dos nossos olhos e 2) a medição dos ultra-sons emitidos pelos morcegos.

No primeiro caso os fotões de luz que formam a imagem que os nossos olhos vêem são registados pelos sensores (cones e bastonetes) existentes na retina, especializados em transformar luz em sinais eléctricos. Esses sinais são transferidos e processados pelos neurónios, formando-se uma *imagem* que é reconhecida pelo cérebro e que é o resultado da actividade de determinados neurónios. Por fim, essa imagem poderá ser colocada na memória através de mecanismos ainda não totalmente conhecidos.

No caso de estarmos interessados no registo dos ultra-sons emitidos pelos morcegos, é necessário utilizar um sensor adequado, que nesse caso, poderá ser um cristal piezo-eléctrico que transforma os ultra-sons em sinais eléctricos. Estes sinais são amplificados e podem ser visualizados num osciloscópio. Geralmente, antes de serem observados, estes sinais sofrem um processo de filtragem (processamento) com o objectivo de os libertar de ruído (frequências indesejadas). Finalmente, o sinal poderá ser gravado no disco rígido de um computador, num CD ou qualquer outro suporte.

Associados aos sistemas de medida estão, muitas vezes, mecanismos de controlo. Neste caso os circuitos apresentam uma maior complexidade, uma vez que

existe um parâmetro que é controlado com base no valor medido<sup>2</sup>. Na figura 1.2 encontra-se um esquema geral dos **sistemas de controlo**: Existe um parâmetro que é monitorizado e um valor de referência que pode ou não ser também ele medido. Ambos são transmitidos a um dispositivo de comparação que actua sobre o parâmetro que se pretende controlar através de diferentes acções.



**Figura 1.2 - Esquema dos blocos existentes num sistema de controlo.**

Retome-se o primeiro exemplo. Como se sabe, o sistema nervoso tem capacidade para avaliar a quantidade de luz que está a chegar à retina e decidir qual a abertura adequada da pupila. Neste exemplo a referência é um patamar previamente estabelecido e o parâmetro controlado é diferente daquele que é medido.

Imagine-se uma outra situação em que se pretende manter uma sala a uma dada temperatura. Neste caso, é medida a temperatura da sala (que coincide com o parâmetro a controlar), estabelece-se a referência desejada e decide-se se os dispositivos de aquecimento ou arrefecimento devem ou não ser ligados. No decurso deste primeiro capítulo ir-se-á abordar essencialmente duas destas componentes essenciais: 1) os sensores e 2) o(s) módulo(s) de processamento de sinal.

## 1.1. SENSORES

Um sensor é um elemento de medida que transforma ou amplifica uma determinada variável num parâmetro que é mais facilmente processado. Uma vez que tanto o processamento de sinal como o seu registo são feitos, cada vez mais, através da electrónica, os sensores tendem a ser transdutores que transformam a grandeza que se pretende medir em tensão.

Uma das dificuldades da construção de sensores biomédicos é a de, num grande número de casos, a gama na qual se pretende medir a grandeza ser muito larga, pelo que é exigido que a dependência entre a grandeza medida e a registada seja a mesma, em geral, linear, numa vasta gama de valores. Em seguida far-se-á uma resenha de alguns dos mais importantes transdutores utilizados em Medicina, dividindo-os segundo o tipo de variável que medem: sensores de grandezas

<sup>2</sup> O parâmetro a controlar tanto pode ser aquele que é directamente medido, como outro que lhe esteja associado.

mecânicas, de temperatura e eléctrodos. Nesta enumeração não são referidos os sensores químicos que detectam, por exemplo, as concentrações de pH e de gases, como o oxigénio e o dióxido de carbono, e os sensores bioquímicos constituídos por um sistema de reconhecimento específico, como um enzima ou um anticorpo, e uma estrutura que transforma uma reacção química numa grandeza mensurável, ou seja, num sinal óptico, eléctrico ou mecânico.

#### *Sensores de Grandezas Mecânicas*

Os sensores de grandezas mecânicas são particularmente úteis no estudo dos músculos, do sistema circulatório e respiratório. Contam-se como os principais sensores desta categoria:

- i) Sensores de tensão mecânica/pressão – Nestes sensores é utilizado o efeito piezoresistivo para medir tensões mecânicas, ou seja, o facto da resistência de um metal ou de um semiconductor ser dependente da pressão a que está sujeita. O principal problema destes sensores é o serem muito dependentes da temperatura, pelo que é necessário compensar este aspecto. No que respeita ao desempenho comparativo entre os metais e os semicondutores, os primeiros são menos sensíveis, apresentam maior linearidade e são moderadamente dependentes da temperatura, enquanto que os semicondutores são mais sensíveis, não apresentam um comportamento tão linear, e são mais dependentes da temperatura.

Este tipo de sensores é utilizado, por exemplo, para medição directa da pressão sanguínea, ou seja, o detector de pressão é colocado no interior da via onde se pretende determinar a pressão. Nestas medidas deve ter-se em conta que a pressão total num fluido é dada por:  $P = P_e + \rho gh + \rho v^2/2$  (equação de Bernoulli); onde  $P_e$  é a pressão estática,  $\rho$  é a densidade do fluido;  $h$  a altura à qual a medida está a ser efectuada e  $v$  a velocidade do fluido.

É de salientar, no entanto, que esta não é a forma mais usual de medir a pressão sanguínea, para o que se usa, habitualmente um método indirecto, utilizando um esfigmomanómetro que, associado a um estetoscópio, permite medir as pressões máxima e mínima (na mínima, o sangue começa a passar, mas com um fluxo turbulento e, na máxima, o sangue deixa simplesmente de passar).

- ii) Potenciómetro – Transforma deslocamentos lineares ou rotacionais numa diferença de potencial, através do contacto com um elemento resistivo e usando a lei de Ohm. Em geral, a resolução destes sensores é limitada pelo tamanho das espiras de que a resistência é feita.
- iii) Sensor de deslocamento indutivo – Considerando que a indutância mútua se calcula através da expressão  $L = \mu N^2 \pi r^2 / l$ , onde  $N$  é o número de espiras,  $r$  é o raio da espira,  $l$  o tamanho da espira e  $\mu$  a permeabilidade do núcleo é possível determinar deslocamentos através do movimento no interior do núcleo de uma peça, em geral, ferrosa. Com este procedimento altera-se  $\mu$  e, por conseguinte,  $L$  passa a ser uma medida do deslocamento.
- iv) Condensador de placas – a capacidade de um condensador de placas é dada por:  $C = \epsilon A/d$ , onde  $\epsilon$  é a permitividade dieléctrica entre as placas;  $A$  é a área das placas e  $d$  a distância entre elas. Deste modo, variando  $d$ , varia-se a capacidade do condensador.

- v) Sensor de efeito de Hall – A diferença de potencial que se cria numa placa sujeita a um campo magnético  $B$ , perpendicular a esta e que é percorrida por uma corrente  $I$ , é dada por:  $V = KIB/h$ , onde  $K$  é a constante de Hall do material e  $h$  é a espessura da placa (ver fig. 1.3). Um sensor deste tipo pode, por exemplo, basear-se no deslocamento da placa no interior de um campo heterogéneo.

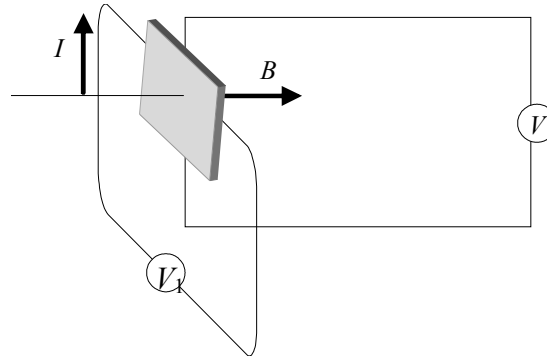


Figura 1.3 – Esquema do princípio do efeito de Hall. Repare-se que  $V_1$  é a diferença de potencial responsável pela corrente  $I$  que atravessa a placa,  $B$  é a densidade de campo magnético e  $V$  é a diferença de potencial criada. (adapt. A.E. Profio, 1993)

- vi) Sensor de efeito piezoelétrico – Estes sensores baseiam-se no efeito através do qual um cristal sujeito a uma força  $F$  desenvolve uma carga  $Q$  que cumpre a relação:  $Q = DF$ , onde  $D$  é o coeficiente piezoelétrico do material. A força aplicada pode assim ser medida através de um amplificador de carga ou medindo a diferença de potencial, uma vez que esta é dada por  $V = Q/C$ , onde  $C$  é a capacidade do cristal que pode ser calculada usando a expressão do condensador de placas.

Estes sensores são, por exemplo, utilizados para determinar a velocidade sanguínea quer através de fluxómetros de tempo de trânsito como através do efeito de Doppler. No primeiro caso, é utilizado um pulso de ultra-sons que viaja entre A e B (ver fig. 1.4). Se estes dois pontos estiverem à distância  $D$  e fizerem um ângulo  $\theta$  com a velocidade do fluido,  $v$ , o tempo de trânsito entre os dois pontos quando o fluido viaja no mesmo sentido é de:  $t = D / (v_s + v \cos\theta)$ , enquanto que se os sentidos forem opostos o tempo será:  $t = D / (v_s - v \cos\theta)$ , onde  $v_s$  é a velocidade do som no fluido.

No segundo, mede-se a frequência dos pulsos de ultra-som,  $f$ , após estes serem dispersos pelos eritrócitos. Neste caso a velocidade do sangue,  $v$ , cumpre a relação:  $f - f_0 = f_0 v / (v_s - v)$ , onde:  $f_0$  é a frequência do ultra-som e  $v_s$  a velocidade dos ultra-sons no fluido. Como  $v_s$  é, em geral, muito maior que  $v$ , a expressão toma a forma:  $f - f_0 = f_0 v / v_s$ .

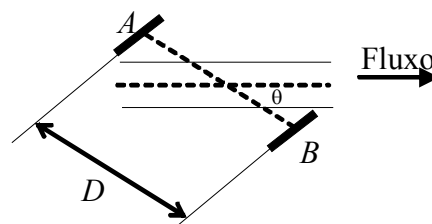


Figura 1.4 – Representação do princípio dos fluxómetros de tempo de trânsito. (adapt. A.E. Profio, 1993)

- vii) Fluxómetros electromagnéticos – Estes instrumentos consideram o facto de um condutor em movimento com uma velocidade  $v$ , perpendicular a um campo magnético com densidade de fluxo  $B$ , gerar uma diferença de potencial que cumpre:  $V = 2rBv$ , onde  $r$  é o raio do condutor, considerado cilíndrico. No caso de se pretender medir a velocidade do sangue, este funciona como o condutor que se move e  $r$ , será, então, o raio da artéria.

#### *Sensores de Temperatura*

Os termómetros são aparelhos muito utilizados na clínica, uma vez que a temperatura do corpo é uma grandeza muito constante e o seu desequilíbrio corresponde, geralmente, a uma situação de infecção. Para além desta utilização os termómetros têm ainda a função de monitorizar a temperatura dos tecidos irradiados por radiação laser. Para além dos populares termómetros que utilizam a variação de volume de um líquido com a temperatura, pode ainda considerar-se como aplicados à Medicina, os termómetros:

- i) Termoresistivos – Estes sensores utilizam a variação da resistência dos metais e dos semicondutores com a temperatura, que, para variações pequenas de temperatura, segue a expressão:  $R = R_0[1 + \alpha(T - T_0)]$ , onde  $R_0$  é a resistência a uma temperatura padrão,  $T_0$ , e  $\alpha$  o coeficiente de temperatura que pode ser positivo ou negativo. Estes sensores são parte integrante de um circuito electrónico que é, basicamente, um amplificador operacional.
- ii) Termoeléctricos – Estes termómetros são os chamados termopares e utilizam o efeito de Seebeck. Este efeito indica que se forem considerados três troços de dois metais diferentes ligados através de duas junções, onde uma se encontra a uma temperatura padrão  $T_1$  e a outra à temperatura que se pretende medir  $T_2$ , é gerada uma diferença de potencial que cumpre:  $V = \beta (T_1 - T_2) + \gamma (T_1^2 - T_2^2)$ . Se a gama de temperaturas for pequena, o termo quadrático pode ser desprezável e, portanto, a diferença de potencial vem proporcional à diferença de temperaturas.

#### *Eléctrodos*

Existem inúmeras situações em que são necessárias medidas eléctricas na clínica, especialmente aplicadas ao sistema nervoso e aos músculos, em particular ao músculo cardíaco. Os principais sensores nesta área são os eléctrodos, que se dividem em macroeléctrodos e microeléctrodos. Os primeiros medem a actividade de um tecido ou órgão, enquanto que os segundos medem a actividade ao nível celular. Refira-se que uma vez que os eléctrodos medem diferenças de potencial é necessário estabelecer-se um local para a colocação do eléctrodo de referência, o qual não pode ser excessivamente afastado da actividade que se pretende medir, pois corre-se o risco de ser sensível à actividade de outros tecidos, nem excessivamente perto para que não seja contaminado com a actividade em estudo.

- i) Macroeléctrodos – Os macroeléctrodos que se mantêm em contacto com a pele podem ser de ligação metal/electrólito ou de ligação capacitiva. No primeiro caso tem-se uma peça metálica e um gel electrolítico que estabelece a ligação entre o tecido e o metal. É de

referir que logo que o gel entra em contacto com o metal se observa uma diferença de potencial que é devida à transferência de cargas entre o gel e o metal. Para que esta diferença de potencial não interfira com as medidas é necessário garantir que a resistência e a capacidade do contacto é igual entre o eléctrodo de medida e o de referência de modo a que o potencial medido corresponda apenas à diferença de potencial entre os dois locais e não àquela que corresponde ao contacto entre o metal e o gel.

Quanto aos eléctrodos capacitivos o contacto do metal com a pele é feito através de um isolador, por exemplo ar, e o que é medido é a corrente de deslocamento, em vez da corrente relativa ao movimento de cargas.

- ii) Microeléctrodos – Existem basicamente três tipos de microeléctrodos: 1) aqueles que estão no interior de um capilar de vidro e mergulhados num electrólito que faz o contacto com a célula através de um orifício na ponta do capilar; 2) os totalmente metálicos revestidos por um isolador, que estabelecem o contacto directamente com a célula, através de um orifício no referido revestimento e 3) eléctrodos de estado sólido que são fabricados utilizando técnicas idênticas às de construção dos circuitos integrados.

## 1.2. PROCESSAMENTO DE SINAL

Desde a detecção dos sinais até à sua análise, pode existir uma série de procedimentos matemáticos, mais ou menos complexos, que permitem colocar em evidência as características em estudo. Os sinais podem ser classificados segundo diferentes categorias. Pode-se distinguir os sinais contínuos dos discretos: enquanto os primeiros são descritos por uma variável contínua no tempo ou no espaço, os segundos são descritos por pontos discretos, ou seja, por uma sequência de números. Podem ser considerados determinísticos, quando lhes está subjacente uma função matemática ou determinadas regras de criação, ou aleatórios. Tomam ainda especial relevância os sinais periódicos, que revelam características que se repetem após um determinado período de tempo.

Dada a enorme relevância de que o processamento de sinal se reveste na análise de dados médicos, nesta secção abordar-se-ão algumas técnicas especialmente utilizadas neste âmbito: métodos de ajuste de parâmetros; análise de propriedades periódicas e detecção de comportamentos determinísticos.

### *Ajuste de parâmetros*

As funções polinomiais são das mais utilizadas para fazer o ajuste de dados. Ou seja, considerando uma série de dados  $y_j$  pretende-se aproximá-la a uma função do tipo:

$$y(x_j) = \sum_{k=0}^M a_k x_j^k \quad (1.1)$$

da qual se desconhecem os parâmetros  $a_k$  e, em geral,  $M$ .

A primeira questão que se coloca é a forma de testar a qualidade desse ajuste, com esse intuito é, muitas vezes, utilizado o *erro médio quadrático*, definido por:

$$Q = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N [y_j - y(x_j)]^2 \quad (1.2)$$

onde  $N$  é o número de pontos de que se dispõe.

As chamadas técnicas de *mínimos quadrados*, não fazem mais do que encontrar os parâmetros para os quais a função  $Q$  se minimiza. Ou seja, está-se perante um problema de extremos. Pense-se no caso particular de uma recta com declive 1:

$$y = x + b \quad (1.3)$$

Neste caso,  $Q$  é dado por:

$$Q = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (y_j - x_j - b)^2 = \frac{1}{N} [(y_1 - x_1 - b)^2 + (y_2 - x_2 - b)^2 + \dots + (y_N - x_N - b)^2] \quad (1.4)$$

Se calcularmos a derivada em ordem ao parâmetro  $b$ , temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial b} &= \frac{1}{N} [-2(y_1 - x_1 - b) - 2(y_2 - x_2 - b) - \dots - 2(y_N - x_N - b)] = \frac{-2}{N} \sum_{j=1}^N (y_j - x_j - b) = \\ &= \frac{-2}{N} \left( \sum_{j=1}^N y_j - \sum_{j=1}^N x_j - \sum_{j=1}^N b \right) = \frac{-2}{N} \left( \sum_{j=1}^N y_j - \sum_{j=1}^N x_j - bN \right) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Igualando a zero, para encontrar o mínimo:

$$\frac{\partial Q}{\partial b} = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^N y_j = \sum_{j=1}^N x_j + bN \Leftrightarrow b = \frac{1}{N} \left[ \sum_{j=1}^N y_j - \sum_{j=1}^N x_j \right] \Leftrightarrow b = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (y_j - x_j) \quad (1.6)$$

Um bom exercício é usar o mesmo raciocínio para uma recta geral de declive  $m$  e ordenada na origem  $b$ :

$$y = mx + b \quad (1.7)$$

Neste caso, obter-se-á um sistema de duas equações (obtidas igualando as derivadas parciais da função  $Q$  em ordem a  $m$  e a  $b$  a zero) e duas incógnitas (os parâmetros:  $m$  e  $b$ ).

A situação mais geral que corresponde ao ajuste de um polinómio de ordem  $M$ , corresponde, de facto, a um sistema de  $M + 1$  equações com  $M + 1$  incógnitas que pode ser resolvido recorrendo a métodos numéricos que envolvem a inversão de matrizes.

É de abordar a situação em que nem todos os pontos são medidos com a mesma precisão. Nestas circunstâncias, faz sentido que no cálculo do erro médio quadrático esta questão seja tida em consideração. Por este motivo,  $Q$  toma, então, a forma:

$$Q = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{[y_j - y(x_j)]^2}{(\delta y_j)^2} \quad (1.8)$$

onde  $\delta y_j$  é o erro associado a cada medida  $y_j$ .

Esta técnica pode também ser utilizada em situações em que a função a ajustar não é um polinómio. Neste caso, a primeira opção a tomar é verificar se existe alguma operação que transforme o problema num caso polinomial. Tome-se, por exemplo, a função exponencial:

$$y = a e^{-bx} \quad (1.9)$$

Ao sujeitar a função à operação logarítmica, obtém-se:

$$\log y = \log a - bx \log e \Leftrightarrow \log y = a' - b'x \quad (1.10)$$

que se resume ao caso de uma recta com declive  $b'$  e ordenada na origem  $a'$ .

Há, no entanto, situações em que este estratagema não é aplicável. Imagine-se, por exemplo, que se pretende ajustar uma soma de exponenciais:

$$y = a_1 e^{b_1 x} + a_2 e^{b_2 x} + \dots \quad (1.11)$$

Neste caso a linearização não resulta e torna-se necessário atacar o problema de uma outra forma. Assim, utiliza-se uma outra abordagem a que se dá o nome de mínimos quadrados não lineares e que é um método iterativo que exige que seja dada uma primeira estimativa para os parâmetros que se pretende encontrar. Deste modo, considere-se o conjunto  $(b_{1,0}, b_{2,0}, \dots)$  como essa primeira estimativa, a função é escrita sob a forma de série de Taylor em torno desse ponto:

$$y(x_j; b_1, b_2, \dots) = y(x_j; b_{1,0}, b_{2,0}, \dots) + \frac{\partial y}{\partial b_1} h_1 + \frac{\partial y}{\partial b_2} h_2 + \dots \quad (1.12)$$

a expressão fica linear relativamente aos parâmetros  $h$  porque as derivadas são tomadas com os valores correspondentes à estimativa fornecida. É, então, utilizada a técnica dos mínimos quadrados (linear) para encontrar os parâmetros  $h$  e a nova estimativa vem dada por:  $b_k = b_{k,0} + h_k$ . Repete-se o processo até se alcançar um mínimo para a função  $Q$ . Estes métodos apresentam vários refinamentos que permitem, quer tornar o processo de busca mais rápido, quer evitar soluções que correspondam a mínimos locais.

### Transformada de Fourier

Uma função diz-se periódica quando se repete após um determinado período de tempo, o que é equivalente a dizer, quando cumpre a relação:

$$y(t+T) = y(t) \quad (1.13)$$

Note-se que a variável  $t$  tem, neste contexto, o significado de tempo, mas todo o formalismo que se irá desenvolver em torno das funções periódicas é válido quando o tempo é substituído por qualquer outra variável independente.

O exemplo típico de funções periódicas são as funções trigonométricas. Considere-se, por exemplo, uma função seno de amplitude  $A$ , frequência angular  $\omega_0$  e fase inicial  $\phi$ :

$$y(t) = A \sin(\omega_0 t - \phi) \quad (1.14)$$

Como é sabido, esta função repete-se quando o seu argumento avança de  $2\pi$ , ou seja, ao fim de um período  $T$ , cumprindo-se a relação:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (1.15)$$

Repare-se que é possível escrever a função  $y$  em termos da soma de uma função seno, com uma função coseno:

$$\begin{aligned} y(t) &= A \sin(\omega_0 t - \phi) = A(\sin \omega_0 t \cos \phi - \cos \omega_0 t \sin \phi) = \\ &(A \cos \phi) \sin \omega_0 t - (A \sin \phi) \cos \omega_0 t = S \sin \omega_0 t - C \cos \omega_0 t \end{aligned} \quad (1.16)$$

Às funções cuja frequência é múltipla da fundamental, isto é, que têm uma dependência com o tempo do tipo:  $\cos(k\omega_0 t)$ , onde  $k$  é um número inteiro<sup>3</sup>, dá-se o nome de *harmónicas*. Na figura 1.5 estão representadas diversos sinais periódicos obtidos através da soma de funções seno e coseno cujas frequências são harmónicas da primeira.

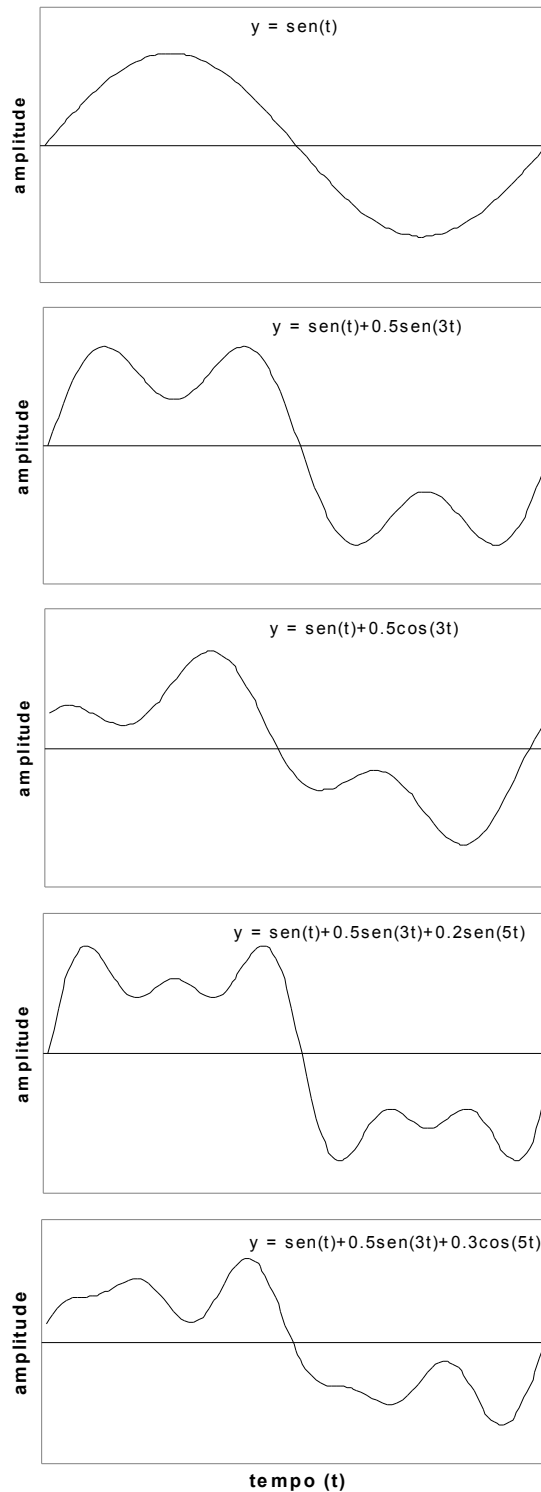
Esta capacidade de ajustar a um sinal com uma determinada forma, uma soma de funções sinusoidais, sugere que um conjunto de dados discretos com comportamento periódico, possa ser aproximado a uma função da forma:

$$y(t_j) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(k\omega_0 t_j) + \sum_{k=1}^n b_k \sin(k\omega_0 t_j) \quad (1.17)$$

Observe-se que, neste caso, o período  $T=2\pi/\omega_0$  é característica da função calculada e não, necessariamente, da função original. Está-se, pois, mais uma vez, perante uma situação de ajuste de funções, onde se pretende conhecer os  $2n+1$  parâmetros:  $(a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_n)$ . Por conseguinte, é possível usar o método dos mínimos quadrados para os calcular. Comece-se por construir a função  $Q$ :

$$Q = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left( y_j - a_0 - \sum_{k=1}^n a_k \cos(k\omega_0 t_j) - \sum_{k=1}^n b_k \sin(k\omega_0 t_j) \right)^2 \quad (1.18)$$

<sup>3</sup> Não confundir com a variável frequência espacial que será introduzida mais adiante no texto.



**Figura 1.5 – Representação de sinais periódicos obtidos somando ondas sinusoidais cujas frequências sejam harmônicas da primeira. (adapt. R.K.Hobbie, 1997)**

Calculando-se as derivadas em ordem aos parâmetros, obtém-se:

$$\frac{\partial Q}{\partial a_0} = -\frac{2}{N} \sum_{j=1}^N \left[ y_j - a_0 - \sum_{k=1}^n a_k \cos(k\omega_0 t_j) - \sum_{k=1}^n b_k \sin(k\omega_0 t_j) \right] \quad (1.19)$$

$n$  derivadas do tipo:

$$\frac{\partial Q}{\partial a_m} = -\frac{2}{N} \sum_{j=1}^N \left[ \left( y_j - a_0 - \sum_{k=1}^n a_k \cos(k\omega_0 t_j) - \sum_{k=1}^n b_k \sin(k\omega_0 t_j) \right) \cos(m\omega_0 t_j) \right] \quad (1.20)$$

e  $n$  derivadas do tipo:

$$\frac{\partial Q}{\partial b_m} = -\frac{2}{N} \sum_{j=1}^N \left[ \left( y_j - a_0 - \sum_{k=1}^n a_k \cos(k\omega_0 t_j) - \sum_{k=1}^n b_k \sin(k\omega_0 t_j) \right) \sin(m\omega_0 t_j) \right] \quad (1.21)$$

Ao igualar estas equações a zero para encontrar os parâmetros que minimizam  $Q$ , obtém-se:

$$\sum_{j=1}^N y_j = Na_0 + \sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=1}^N \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^n b_k \sum_{j=1}^N \sin(k\omega_0 t) \quad (1.22)$$

$n$  equações do tipo:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N y_j \cos(m\omega_0 t) &= \\ &= a_0 \sum_{j=1}^N \cos(m\omega_0 t) + \sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=1}^N \cos(k\omega_0 t) \cos(m\omega_0 t) + \sum_{k=1}^n b_k \sum_{j=1}^N \sin(k\omega_0 t) \cos(m\omega_0 t) \end{aligned} \quad (1.23)$$

com  $m = 1, \dots, n$  e  $n$  equações do tipo:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N y_j \sin(m\omega_0 t) &= \\ &= a_0 \sum_{j=1}^N \sin(m\omega_0 t) + \sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=1}^N \cos(k\omega_0 t) \sin(m\omega_0 t) + \sum_{k=1}^n b_k \sum_{j=1}^N \sin(k\omega_0 t) \sin(m\omega_0 t) \end{aligned} \quad (1.24)$$

com  $m = 1, \dots, n$ .

Facilmente se verifica que estas equações se tornam bastante mais simples se os instantes  $t_j$  estiverem igualmente espaçados. Nesse caso, considere-se que cada intervalo  $T$  contém  $N$  pontos, então  $t_j = jT/N = 2\pi j / N\omega_0$ , com  $j = 1, \dots, N$ . O que implica o argumento dos senos e cosenos ser da forma:  $2\pi jk / N$ . Ora, atendendo às igualdades:

$$\sum_{j=1}^N \cos\left(\frac{2\pi jk}{N}\right) = \begin{cases} N, & k = 0 \text{ ou } k = N \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (1.25)$$

$$\sum_{j=1}^N \sin\left(\frac{2\pi jk}{N}\right) = 0, \quad \forall k \quad (1.26)$$

$$\sum_{j=1}^N \cos\left(\frac{2\pi jk}{N}\right) \cos\left(\frac{2\pi jm}{N}\right) = \begin{cases} N/2, & k = m \text{ ou } k = N - m \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (1.27)$$

$$\sum_{j=1}^N \sin\left(\frac{2\pi jk}{N}\right) \sin\left(\frac{2\pi jm}{N}\right) = \begin{cases} N/2, & k = m \\ -N/2, & k = N - m \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (1.28)$$

$$\sum_{j=1}^N \sin\left(\frac{2\pi jk}{N}\right) \cos\left(\frac{2\pi jm}{N}\right) = 0, \quad \forall k \quad (1.29)$$

A simplificação das equações (1.22), (1.23) e (1.24) conduz às equações:

$$a_0 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y_j \quad (1.30)$$

$$a_m = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N y_j \cos\left(\frac{2\pi jm}{N}\right) \quad (1.31)$$

$$b_m = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N y_j \sin\left(\frac{2\pi jm}{N}\right) \quad (1.32)$$

Em geral, modifica-se estas equações tendo em conta o facto de tanto o seno como o coseno terem os mesmos valores para  $j=0$  e para  $j=N$  e, portanto, os limites do somatório podem ser modificados para:

$$a_0 = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y_j \quad (1.33)$$

$$a_m = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y_j \cos\left(\frac{2\pi jm}{N}\right) \quad (1.34)$$

$$b_m = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y_j \sin\left(\frac{2\pi jm}{N}\right) \quad (1.35)$$

Do mesmo modo, para valores igualmente espaçados, a equação (1.17) toma a forma:

$$y_j = y(t_j) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos\left(\frac{2\pi jk}{N}\right) + \sum_{k=1}^n b_k \sin\left(\frac{2\pi jk}{N}\right) \quad (1.36)$$

Uma vez que existem  $N$  pontos independentes, têm que existir, pelo menos  $N$  coeficientes independentes e, portanto, deve cumprir-se:

$$n \leq \frac{N-1}{2} \quad (1.37)$$

O que significa que devem existir, pelo menos, dois pontos por período correspondente à frequência mais alta. Este resultado é conhecido pelo *Teorema de Nyquist*.

Sugere-se que, atendendo às características de simetria das equações (1.27) e (1.28), se prove que as equações (1.34), (1.35) e (1.36) podem ser reescritas sob a forma:

$$a_m = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y_j \cos\left(\frac{2\pi jm}{N}\right) \quad (1.38)$$

$$b_m = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y_j \sin\left(\frac{2\pi jm}{N}\right) \quad (1.39)$$

$$y_j = y(t_j) = \sum_{k=1}^n a_k \cos\left(\frac{2\pi jk}{N}\right) + \sum_{k=1}^n b_k \sin\left(\frac{2\pi jk}{N}\right) \quad (1.40)$$

Sendo este conjunto de equações conhecido pela *Transformada de Fourier Discreta*. Ao introduzir os números complexos neste formalismo, as equações tornam-se mais compactas, podendo ser escritas sob a forma:

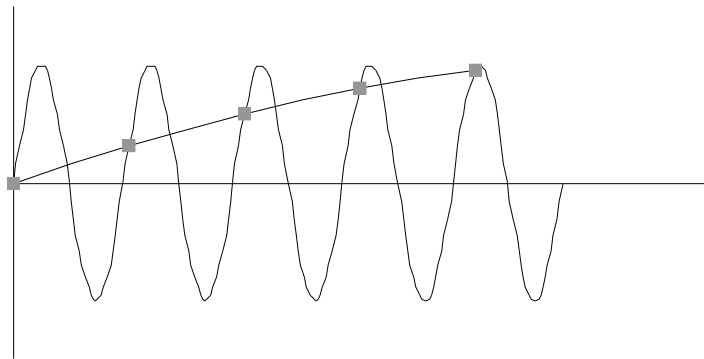
$$Y_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y_j e^{-i2\pi jk/N} \quad (1.41)$$

$$y_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} Y_j e^{i2\pi jk/N} \quad (1.42)$$

Admitindo que  $y_j$  são reais, então, na equação (1.42), apenas a parte real é considerada.

Deve-se realçar que, do ponto de vista de aplicações, a transformada de Fourier é, actualmente, realizada através de uma técnica a que se dá o nome de *Transformada de Fourier Rápida*<sup>4</sup>, que envolve um menor número de cálculos e, por isso, se torna bastante mais prática.

Ao derivar-se as equações (1.38), (1.39) e (1.40) a partir das equações (1.33), (1.34), (1.35) e (1.36), utiliza-se o resultado de os coeficientes de Fourier (nome dado aos parâmetros  $a_k$  e  $b_k$ ) entre  $k = 0$  e  $k = (N-1) / 2$  serem iguais aos correspondentes a  $k = (N-1) / 2 + 1$  até  $k = N$ . Isto significa que apenas metade deste coeficientes são independentes, ou seja, ao considerar-se um intervalo entre dados de  $T/N$ , a frequência angular máxima que se pode considerar é de  $(N-1)\omega_0 / 2$ , ou, o que é o mesmo, o período correspondente é:  $T_{\min} = 2T / (N-1)$  que é aproximadamente o dobro do espaçamento entre dois pontos consecutivos. Ou seja, para determinar o coeficiente associado a uma dada frequência é necessário ter-se dois pontos por cada período correspondente a essa frequência. Esta é, na verdade, uma outra formulação do Teorema de Nyquist. Na figura 1.6 observa-se o que acontece quando esta condição não é verificada. Ou seja, quando, no sinal, existem frequências mais elevadas, estas contribuem, na análise de Fourier para os coeficientes de frequências mais baixas, sendo um fenómeno a que se dá o nome de *alisamento*<sup>5</sup>. A única forma de garantir que este fenómeno não ocorre é sujeitar o sinal a um filtro que o *limpe* de frequências excessivamente elevadas e, só então, aplicar a análise de Fourier.



**Figura 1.6 – Esquema ilustrativo do efeito de alisamento associado à discretização de pontos usando taxas de amostragem mais baixas do que as frequências presentes no sinal. (adapt. R.K.Hobbie, 1997)**

É também possível estender estas técnicas a funções periódicas (note-se que até aqui se tem considerado séries temporais e não funções). Neste caso, a função a aproximar é idêntica a (1.17) (série de senos e cosenos), mas a quantidade a minimizar toma a forma:

<sup>4</sup> Do inglês: *Fast Fourier Transform* (FFT).

<sup>5</sup> Do inglês: *aliasing*.

$$Q = \frac{1}{T} \int_{t'}^{t'+T} [y(t) - y_{calc}(t)]^2 dt \quad (1.43)$$

Minimizar  $Q$  (sugestão de exercício) leva à definição dos parâmetros  $a_m$  e  $b_m$ :

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \cos(m\omega_0 t) dt \\ b_m &= \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \sin(m\omega_0 t) dt \\ a_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt \end{aligned} \quad (1.44)$$

Note-se que estes integrais podem ser tomados em qualquer período, sendo, por vezes, útil considerá-los entre  $-T/2$  e  $T/2$ .

#### *Potência dos sinais*

Uma função que é muitas vezes utilizada em diferentes domínios e, também, no âmbito da Física Médica é a potência dos sinais, cuja expressão geral é<sup>6</sup>:

$$\langle y^2 \rangle = \lim_{T' \rightarrow \infty} \frac{1}{2T'} \int_{-T'}^{T'} y^2(t) dt \quad (1.45)$$

e para funções periódicas toma a expressão:

$$\langle y^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T y^2(t) dt \quad (1.46)$$

Se na equação anterior  $y$  for substituído pela sua expressão:

$$y(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(k\omega_0 t_j) + \sum_{k=1}^n b_k \sin(k\omega_0 t_j) + \varepsilon_n(t) \quad (1.47)$$

onde  $\varepsilon_n(t)$  é a diferença entre o sinal medido e a soma relativa a todos os  $n$  termos da transformada de Fourier.

É mais uma vez possível (exercício) provar que a potência do sinal vem dada por:

---

<sup>6</sup> Onde o operador  $\langle \rangle$  denota média temporal de uma variável.

$$\langle y^2(t) \rangle = a_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) + \langle \varepsilon_n^2 \rangle = \sum_{k=0}^n \Phi_k + \langle \varepsilon_n^2 \rangle \quad (1.48)$$

Onde:

$$\Phi_k = \frac{1}{2} (a_k^2 + b_k^2) \quad \forall k \neq 0 \quad \text{e} \quad \Phi_0 = a_0^2 \quad (1.49)$$

### *Funções de Correlação*

Um importante dado sobre duas grandezas é a forma como elas se relacionam temporalmente, a função de correlação entre duas variáveis permite auferir de que forma é que uma alteração numa delas se relaciona com uma alteração prévia ou posterior da outra. Note-se, no entanto, que neste formalismo, a existência de correlação não implica uma relação de causa-efeito.

A função de correlação entre duas funções  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$ , definidas por pulsos, é dada pela expressão:

$$\Phi_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} y_1(t) y_2(t + \tau) dt \quad (1.50)$$

Quando as funções não são pulsos, a função correlação toma a forma:

$$\Phi_{12}(\tau) = \langle y_1(t) y_2(t + \tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} y_1(t) y_2(t + \tau) dt \quad (1.51)$$

Caso as funções sejam periódicas, então a expressão (1.51) é reescrita como:

$$\Phi_{12}(\tau) = \frac{1}{T} \int_i^{i+T} y_1(t) y_2(t + \tau) dt \quad (1.52)$$

Chama-se função de auto-correlação à função de correlação de um sinal consigo próprio.

### *Transformada de Fourier de sinais periódicos*

Regressando ao formalismo das Transformadas de Fourier, resta considerar a situação em que o sinal é contínuo, mas não periódico. Nesta categoria podem incluir-se os pulsos e o ruído.

Comece-se por considerar as equações (1.17) e (1.44), válidas para sinais periódicos. Ao observar que os limites dos integrais das expressões (1.44) podem ser quaisquer uns, desde que incluam um período completo, considere-se, então o intervalo  $[-T/2, +T/2]$  e faça-se a substituição:  $1/T = \omega_0/2\pi$ :

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{\omega_0}{\pi} \int_{-T/2}^{T/2} y(t) \cos(k\omega_0 t) dt \\
b_k &= \frac{\omega_0}{\pi} \int_{-T/2}^{T/2} y(t) \sin(k\omega_0 t) dt \\
a_0 &= \frac{\omega_0}{\pi} \int_{-T/2}^{T/2} y(t) dt
\end{aligned} \tag{1.53}$$

Onde  $k$  pode, agora, ser negativo. Usando um truque semelhante ao usado para os valores discretos, observando que  $a_k = a_{-k}$  e  $-b_k = b_{-k}$ , é possível reescrever as relações (1.53) sob a forma:

$$\begin{aligned}
a'_k &= \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} y(t) \cos(k\omega_0 t) dt \\
b'_k &= \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} y(t) \sin(k\omega_0 t) dt \\
a'_0 &= \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} y(t) dt
\end{aligned} \tag{1.54}$$

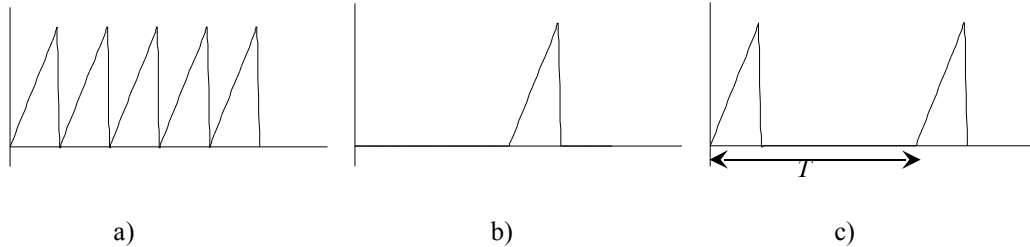
Visto que  $\cos(0\omega_0 t) = 1$  e  $\sin(0\omega_0 t) = 0$  a definição de  $a'_0$  pode ser incluída na definição de  $a'_k$  e pode acrescentar-se  $b'_0$  em  $b'_k$  uma vez que  $b'_0$  é nulo. Ficando as relações com a forma:

$$\begin{aligned}
a'_k &= \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} y(t) \cos(k\omega_0 t) dt \\
b'_k &= \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} y(t) \sin(k\omega_0 t) dt \\
y(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [a'_k \cos(k\omega_0 t) + b'_k \sin(k\omega_0 t)]
\end{aligned} \tag{1.55}$$

Finalmente se forem introduzidas as variáveis:  $C_k = 2\pi a'_k / \omega_0$  e  $S_k = 2\pi b'_k / \omega_0$  as relações finais são:

$$\begin{aligned}
C_k &= \int_{-T/2}^{T/2} y(t) \cos(k\omega_0 t) dt \\
S_k &= \int_{-T/2}^{T/2} y(t) \sin(k\omega_0 t) dt \\
y(t) &= \frac{\omega_0}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [C_k \cos(k\omega_0 t) + S_k \sin(k\omega_0 t)]
\end{aligned} \tag{1.56}$$

Na verdade estas equações não trazem muito de novo, comparativamente com as anteriores, apenas foram introduzidos  $k$  negativos. Por conseguinte, este novo formalismo poderá, uma vez mais, ser aplicado a funções periódicas, como por exemplo, a função representada na figura 1.7 a). Suponha-se, então, a função não periódica esquematizada na figura 5 b) e assumam-se, ainda, que a poderíamos aproximar a uma função periódica com período  $T$  (ver figura 5 c)), sendo esta aproximação tanto mais próxima da real quanto maior for  $T$ .



**Figura 1.7 – Esquema de a) uma função periódica, b) uma função não periódica e c) da aproximação de uma função não-periódica a uma função periódica. (adapt. R.K.Hobbie, 1997)**

Com base nesta aproximação observa-se que fazer  $T$  tender para infinito, corresponde a transformar o somatório da equação 1.56 em integral. Ou seja, atendendo a que é possível definir  $\omega$  como sendo frequências que se relacionam com  $\omega_0$  (frequência associada ao período  $T$ ) através da relação:  $\omega = k\omega_0$  e que fazer  $T$  tender para infinito significa fazer  $\omega_0$  tender para zero e  $\omega$  deixarem de ser discretas; as equações 1.56 são transformáveis em:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [C(\omega) \cos(\omega t) + S(\omega) \sin(k\omega t)] d\omega$$

$$C_k = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \cos(k\omega t) dt$$

$$S_k = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \sin(k\omega t) dt$$
(1.57)

Que são a forma mais geral das transformadas de Fourier, também aplicáveis a sinais não periódicos.