APONTAMENTOS DE
ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA ANALÍTICA

(II. Determinantes)

Índice

2. Determinantes

2.1 Introdução

Estamos todos familiarizados com funções do tipo $f(x) = \cos x$ ou $f(x) = x^2$. Estas associam a um número real da variável x um número real $y = f(x)$, por isso são denominadas funções reais de variável real (f.r.v.r.), $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Neste capítulo, estuda-se a "função determinante", que é uma função real de variável matricial no sentido que associa a uma matriz quadrada um número real $y = f(X)$. O estudo dos determinantes tem aplicações importantes, em particular, nos sistemas de equações lineares e na inversão de matrizes.

2.2 Permutações de subconjuntos de $\mathbb{N}$

Um dos objectivos deste capítulo é a obtenção de fórmulas ou métodos para o cálculo de determinantes, para isso é necessário fazer referência ao conceito de permutação.

Definição1: Chama-se permutação de um conjunto de números inteiros $A = \{1, 2, ..., n\}$ a qualquer conjunto que se pode construir com os n elementos, diferindo uns dos outros pela ordem dos seus elementos.

Repare-se que cada permutação de um conjunto de números inteiros $A = \{1, 2, ..., n\}$ é uma aplicação bijectiva de A em A.

Obs.1: Uma vez que o número de elementos do conjunto $A = \{1, 2, ..., n\}$ é $\# A = n$, o número de permutações de A é dado por $n! = n \times (n-1) \times ... \times 2 \times 1$.

Exemplo1: Represente as permutações do conjunto $A = \{1, 2, 3\}$.

Resolução:. Existem várias maneiras de se representar uma permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to \textit{domínio} \\ \to \textit{contradomínio} \end{matrix}, \ \{1,3,2\}, (1,3,2), ...$$

Vamos adoptar a última. Neste exemplo, como $\# A = 3$ temos $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ permutações distintas no conjunto A, $(1,2,3)$, $(1,3,2)$, $(2,1,3)$, $(2,3,1)$, $(3,1,2)$ e $(3,2,1)$.

Um método conveniente para sistematicamente listar as permutações de uma dado conjunto é através de uma árvore de permutações, por exemplo para $A = \{1, 2, 3\}$:

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
 & 1 & & & & 2 & & & & 3 & & \\
\swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow & \\
2 & & 3 & & 1 & & 3 & & 1 & & 2 & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
3 & & 2 & & 3 & & 1 & & 2 & & 1 &
\end{array}
$$

2.3 Paridade de uma permutação

À permutação em que os elementos se dispõem na ordem natural, dá-se o nome de permutação principal. Se numa permutação dois elementos não estão dispostos na ordem natural, diz-se que constituem uma inversão (por exemplo, na permutação $(1,3,2)$ os elementos 3 e 2 constituem uma inversão).

O número total de inversões pode ser calculado da seguinte maneira:
i) Fixar primeiro elemento da permutação e contar quantos elementos são mais pequenos que este;
ii) Fixar o segundo elemento da permutação e contar quantos elementos à direita são mais pequenos que este;
iii) Continuar até ao penúltimo elemento.

A soma destes números será o número de inversões na permutação.

Uma permutação será par ou ímpar consoante for par ou ímpar a soma das suas inversões, relativamente à sequência natural (até se obter a sequência natural).

Obs.2: Com n elementos obtém-se $n!$ permutações, sendo $\frac{n!}{2}$ pares e $\frac{n!}{2}$ ímpares.

Teorema1 (teorema de Bézout): Trocando entre si dois quaisquer elementos de uma permutação, a mesma muda de paridade.

Exemplo2: Determine do número de inversões na permutação $(6,1,3,4,5,2)$.

Resolução: O número de inversões é $5+0+1+1+1=8$. A permutação $(6,1,3,4,5,2)$ é par.

Exemplo3: Represente as paridades das permutações do conjunto $A = \{1, 2, 3\}$.

Resolução: Como já vimos temos 6 permutações para este conjunto:

$(1,2,3) \rightarrow 0$ inversões $\rightarrow$ permutação par (permutação principal);

$(1,3,2) \rightarrow 1$ inversões $\rightarrow$ permutação ímpar;

$(2,1,3) \rightarrow 1$ inversões $\rightarrow$ permutação ímpar;

$(2,3,1) \rightarrow 2$ inversões $\rightarrow$ permutação par;

$(3,1,2) \rightarrow 2$ inversões $\rightarrow$ permutação par;

$(3,2,1) \rightarrow 3$ inversões $\rightarrow$ permutação ímpar.

2.4 Termo de um matriz quadrada

Termo de uma matriz quadrada de ordem n é qualquer produto de n elementos da matriz, onde esteja envolvido apenas um e um só elemento de cada linha e de cada coluna. Assim, por exemplo, numa matriz quadrada de ordem 3, podemos definir os seguintes termos:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

- $a_{11}a_{22}a_{33} \rightarrow$ termo principal
- $a_{12}a_{23}a_{31}$
- $a_{11}a_{23}a_{32}$
- $a_{13}a_{21}a_{32}$
- $a_{12}a_{21}a_{33}$
- $a_{13}a_{22}a_{31}$

Numa matriz quadrada de ordem 2, apenas podemos definir os seguintes termos $a_{11}a_{22}$ e $a_{12}a_{21}$.

Estes dois exemplos, ressaltam o facto de numa matriz de ordem n ter $n!$ termos. São todos os produtos da forma $a_{1j_1}a_{2j_2}...a_{nj_n}$, onde $(j_1, j_2, ..., j_n)$ é uma permutação do conjunto $A = \{1,2,...,n\}$.

2.5 Paridade de um termo

Um termo, de uma matriz quadrada, será par ou ímpar consoante for par ou ímpar a soma das inversões efectuadas aos índices das linhas e aos índices das colunas.

Se tivermos o cuidado de formar os termos de modo que os índices das linhas fiquem ordenados, apenas temos que nos preocupar com as inversões efectuadas aos índices das colunas. Como no caso da matriz A anterior.

Por exemplo o termo: • $a_{11}a_{23}a_{32}$. inversões das linhas = 0
. inversões das colunas = 1

Total = 1 $\Rightarrow$ termo ímpar

Se o termo for par vem afectado do sinal $+$, se for ímpar do sinal de $-$. Portanto, como $a_{11}a_{23}a_{32}$ é ímpar, escreve-se $-a_{11}a_{23}a_{32}$.

Exemplo4: Calcule os termos de cada uma das matrizes: a) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{22} & a_{21} \end{bmatrix}$ e b) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$.

Resolução:

a)

Termos	**Permutação associada**	Paridade	Paridade do termo
$a_{11}a_{22}$	$(1,2)$	Par	$+a_{11}a_{22}$
$a_{12}a_{21}$	$(2,1)$	Ímpar	$-a_{12}a_{21}$

b)

Termos	**Permutação associada**	Paridade	Paridade do termo
$a_{11}a_{22}a_{33}$	$(1,2,3)$	Par	$a_{11}a_{22}a_{33}$
$a_{11}a_{23}a_{32}$	$(1,3,2)$	Ímpar	$-a_{11}a_{23}a_{32}$
$a_{12}a_{21}a_{33}$	$(2,1,3)$	Ímpar	$-a_{12}a_{21}a_{33}$
$a_{12}a_{23}a_{31}$	$(2,3,1)$	Par	$a_{12}a_{23}a_{31}$
$a_{13}a_{21}a_{32}$	$(3,1,2)$	Par	$a_{13}a_{21}a_{32}$
$a_{13}a_{22}a_{31}$	$(3,2,1)$	Ímpar	$-a_{13}a_{22}a_{31}$

2.6 Determinante de uma matriz

Estamos agora em posição de definir a função determinante, que é denotada por $\det$.

Definição2: O número $\det A = |A|$ é chamado determinante da matriz quadrada *A* e define-se como sendo a soma de todos os termos de *A*, afectados do sinal (+) ou (-) consoante se trate de um termo par ou de um termo ímpar.

Obs.3: Pelo que foi dito, toda a matriz quadrada tem um determinante associado. Contudo, enquanto a matriz *A* pode ser representada por $A = [a_{ij}]_{(n\times n)}$ (não está implícito um cálculo) o determinante é representado por $|A| = \det(A) \det([a_{ij}])$ (na sua representação está implícito um cálculo) e, se *A* for uma matriz real, representa um nº real. Neste sentido, a "função determinante", é uma função real de variável matricial uma vez que associa a uma matriz quadrada um número real $y = \det(A) \in \mathbb{R}$.

Obs.4: Se a matriz *A* não for quadrada não se pode calcular $\det A = |A|$, quanto muito, podemos calcular determinantes de submatrizes quadradas de *A*.

Portanto, consoante a dimensão da matriz, podemos ter:

- Matrizes (1×1); $A = [a_{11}] \Rightarrow \det A = |A| = a_{11}$;

- Matrizes (2×2); $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$;

- Matrizes (3×3); $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \det A = |A| = \overbrace{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}}^{\text{termos pares}} - (\overbrace{a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31}}^{\text{termos ímpares}})$$

Para matrizes (3×3) podemos usar uma das regras práticas:

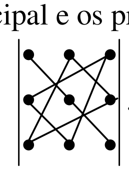
a) Adicionar à direita as duas primeiras colunas ou inferiormente as duas primeiras linhas e formar os termos pares e ímpares de acordo com a inclinação das diagonais.

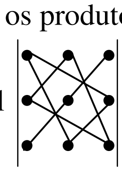
$$|A| = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}\right| \quad \text{ou} \quad |A| = \begin{array}{|ccc|} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \hline a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array}.$$

$$(\,-\,) \qquad (\,+\,)$$

Os termos positivos são o produto dos elementos da diagonal principal e das duas paralelas a esta e os termos negativos são o produto dos elementos da diagonal secundária e das duas paralelas a esta.

b) Regra de Sarrus

Os termos positivos são o produto dos elementos da diagonal principal e os produtos dos elementos que formam os triângulos de bases paralelas à diagonal principal .

Os termos negativos são o produto dos elementos da diagonal secundária e os produtos dos elementos que formam os triângulos de bases paralelas à diagonal principal .

Para matrizes de ordem superior à terceira não é viável usar a definição de determinante (por exemplo, no caso (4×4) temos $4! = 24$ termos, 12 pares e 12 ímpares), e, também não existem regras práticas como as apresentadas para determinantes de matrizes de 3ª ordem.

Nestes casos, obtêm-se métodos mais eficientes como consequência de algumas propriedades que vamos estabelecer.

Propriedades dos determinantes. Vamos apresentar, sem demonstração, algumas propriedades dos determinantes:

1. O determinante de uma matriz, quando existe, é único;
2. O determinante da matriz identidade é um ($\det(I) = 1$);
3. O valor dos determinantes de uma matriz e da sua transposta são iguais, $\det(A) = \det(A^T)$;
4. Se numa matriz as filas (linha ou coluna) forem linearmente dependentes então o seu determinante é nulo. Em particular, quando a matriz tiver:
   - uma fila de zeros (todos os seus termos são nulos);
   - duas filas iguais;
   - duas filas proporcionais;
   - uma fila combinação linear de outras filas;
   - característica inferior à sua ordem ($r(A) < n \Leftrightarrow \det(A) = 0$, A singular);
5. Uma matriz A admite inversa se e só se o seu determinante for diferente de zero. Consequentemente:
   - A regular $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$;
   - A regular $\Leftrightarrow r(A) = n$;
   - $r(A) = n \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$;
6. Se a matriz A é regular, então o seu determinante é o inverso do determinante da sua inversa. Ou seja:
   - $\det(A) = \dfrac{1}{\det(A^{-1})}$, A regular;
   - $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$, A^{-1} regular;
7. Se multiplicarmos uma fila de uma matriz por um número o seu determinante vem multiplicado por esse número (todos os termos do determinante são multiplicados por esse factor). Esta propriedade, diz que:

- Multiplica-se um determinante por um factor, multiplicando esse número pelos elementos de uma fila. E ainda que, se dividirmos uma fila de uma matriz por um número diferente de zero o seu determinante vem dividido por esse número;
- Se todos os elementos de uma matriz quadrada A forem multiplicados por uma constante k, então verifica-se a relação $\det(kA) = k^n \det(A)$;

8. Um determinante muda de sinal sempre que se trocam entre si duas filas paralelas (ao trocar duas filas paralelas todos os termos mudam de paridade);

9. Se os elementos de uma fila são somas algébricas de n parcelas, o determinante decompõe-se na soma dos n determinantes que se obtém substituindo os elementos dessa fila sucessivamente pela primeira, segunda,..., parcelas e deixando as restantes filas inalteradas.
   - Por exemplo, se cada elemento de uma fila é a soma de duas parcelas, então o determinante é igual à soma dos determinantes que dele se obtêm substituindo os elementos dessa fila, num caso pelas primeiras parcelas e noutro pelas segundas parcelas;

10. Não de altera o valor de um determinante quando:
    - aos elementos de uma fila se adiciona os elementos correspondentes de outra ou outras filas paralela, multiplicada por constantes;
    - se junta a uma fila uma combinação linear de outras filas paralelas;

11. O determinante de uma matriz triangular (superior, inferior ou diagonal) é dado pelo seu termo principal ($\det(A) = a_{11}a_{22}...a_{nn}$), visto que todos os outros termos são nulos.

12. A característica de uma matriz (não nula) pode ser indicado pela mais alta ordem dos determinantes não nulos das suas submatrizes quadradas;

13. O determinante de um produto de matrizes quadradas da mesma ordem é igual ao produto dos determinantes das matrizes, $\det(A \times B) = \det(A) \times \det(B)$;

14. O determinante da soma de matrizes quadradas da mesma ordem, de uma maneira geral, não é igual à soma dos determinantes das matrizes, $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$.

Como foi referido, é inviável calcular, por definição, determinantes de ordem superior à terceira ($n > 3$). Portanto, a aplicação das propriedades dos determinantes é, na prática, fundamental para o cálculo de determinantes de ordem elevada. Tal facto, permite obter o valor de um determinante por um método análogo ao que seguimos para obter a característica de uma matriz (condensação). Para isso, por exemplo, combinam-se as propriedades 7), 8), e 10) visando a obtenção de determinante triangular cujo valor é dado pela propriedade 11).

Obs.5: Como se fala em condensação, é preciso ter em conta que nem toda a operação elementar das matrizes deixa inalterado o valor do determinante. De facto, como se pode observar, as operações das propriedades 7) e 8) (que são elementares para as matrizes) alteram o valor do determinante. Apenas as operações referidas na propriedade 10) deixam inalterado o valor do mesmo.

Pelo que foi dito, devemos ter em conta que, apesar das operações elementares das matrizes não alterarem a característica dessas (as matrizes são equivalentes), duas matrizes equivalentes não têm que ter o mesmo determinante. Quer dizer, condensar uma matriz e depois calcular o seu determinante pode levar a valores errados do mesmo. Contudo, quando condensamos um determinante ficamos a saber a característica da matriz original correspondente.

Exercício1: Dê exemplos simples para cada uma das propriedades apresentadas em cima.

Exemplo5: Calcule o determinante da matriz quadrada $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & -1 \\ 4 & 4 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

Resolução: Vamos aplicar algumas das propriedades em cima enunciadas e transformar o determinante em triangular.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 17 & 6 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 7 & -1 \\ 4 & 4 & 3 & 15 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 & 17 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 7 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 15 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix},$$

Por exemplo, como na 5ª linha figuravam 3 zeros, começamos por reduzir o elemento $a_{54}=3$ a zero (somámos a 3ª coluna à 4ª multiplicada por 3), no último passo, trocámos a 3ª coluna pela 5ª, o determinante trocou de sinal. Vamos, agora por em evidência o valor (-1) da 5ª linha,

$$|A|=-(-1)\times\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 & 17 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 7 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 15 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 & 17 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 7 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 15 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

não multiplicámos os elementos da 5ª coluna por (-1) porque esta operação foi feita em termos da 5ª linha onde o resto dos elementos são nulos (como exercício, afecte a 5ª coluna do sinal negativo e calcule o determinante). Vamos, agora, anular todos os elementos abaixo de $a_{11}=1$, comecemos por reduzir a zero $a_{21}=2$, (somamos a 1ª linha à 2ª multiplicada por -2), e assim sucessivamente, resulta

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 & 17 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 7 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 15 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 & 17 & 4 \\ 0 & -6 & -7 & -31 & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 7 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 15 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 & 17 & 4 \\ 0 & -6 & -7 & -31 & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & -8 & -22 & -53 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

Como o nosso objectivo é transformar o determinante em triangular, vamos anular os elementos abaixo de $a_{22}=-6$, troquemos a 2ª linha pela 3ª, ficando $a_{22}=2$

$$|A| = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 & 17 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & -6 & -7 & -31 & -8 \\ 0 & -8 & -22 & -49 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 & 17 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & -10 & -5 \\ 0 & -8 & -22 & -49 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 & 17 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & -10 & -5 \\ 0 & 0 & -26 & -25 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

multiplicámos a 2ª linha por 3 e 4 respectivamente e somámos esta linha às 3ª e 4ª linhas respectivamente. Visando anular o elemento $a_{43}=-26$, vamos por em evidência o -5 na 3 linha,

$$A = 5\times\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 & 17 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -26 & -25 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Finalmente, multiplicando a 3ª linha por 13 e somando à 4ª, obtemos

$$|A| = 5\times\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 & 17 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5(1\times 2\times 2\times 1\times 1) = 20.$$

Neste exemplo, à semelhança do que se faz com as matrizes, "condensámos" o determinante utilizando as propriedades 7), 8) e 10) às linhas (experimente fazer às colunas!), e depois, de obter o determinante triangular, aplicámos a propriedade 11). A matriz *A* tem característica 5 (**porquê?**).

Exemplo6: Seja A uma matriz regular de ordem n. Averigúe, com base na teoria dos determinantes, o sinal do determinante da matriz $A^T A$. Esse determinante pode ser nulo?

Resolução: Aplicando as propriedades dos determinantes, tem-se

$$|A^T A| \underset{pp13)}{=} |A^T||A| \underset{pp3)}{=} |A||A| = |A|^2 \geq 0 .$$

Ou seja, $|A^T A| \geq 0$, como a matriz A é regular $|A| \neq 0$, e portanto $|A^T A| \neq 0$. Em conclusão $|A^T A| > 0$.

2.7 Teorema de Laplace

Para aplicar o teorema de Laplace é necessário compreender a noção de complemento algébrico.

Definição3: O menor de um determinante é o determinante que se obtém de um determinante dado suprimindo o mesmo número de linhas e de colunas.

Se um determinante é de ordem n, suprimindo p linhas e p colunas, obtém-se um determinante de ordem $(n-p)$ que é um menor do determinante dado.

Definição4: Dois menores dizem-se complementares sempre que em cada um deles estejam representadas as linhas e colunas, do determinante dado, que não figurem no outro.

Obs.6: Dois menores complementares têm sempre a mesma paridade.

Definição5: Um menor de um determinante, diz-se principal se a sua diagonal principal é constituída apenas por elementos principais do determinante dado. E representam-se por Δ_i, $i = 1,\dots,n$ é a ordem do menor.

Obs.7: Um menor principal é sempre par.

Definição6: Chama-se menor complementar de um elemento a_{ik} de um determinante, ao determinante que se obtém, suprimindo a linha e a coluna a que pertence esse elemento (se um determinante é de ordem n, o menor complementar é de ordem $(n-1)$). Vamos representa-se o menor complementar de a_{ik} por M_{ik}.

Definição7: Chama-se complemento algébrico de um elemento a_{ik} de um determinante ao determinante que se obtém suprimindo a linha i e a coluna k a que pertence o elemento a_{ik}, afectado do sinal $(+)$ ou $(-)$ consoante a soma dos índices $(i+k)$ é par ou ímpar.

Obs.8 Se representarmos o complemento algébrico de a_{ik} por C_{ik}, então, $C_{ik}=(-1)^{i+k}M_{ik}$, em que M_{ik} é o menor complementar do elemento a_{ik}. Ou seja, o complemento algébrico de um elemento a_{ik} de um determinante é igual ao menor complementar ou ao seu simétrico consoante a soma dos índices do elemento é par ou ímpar.

Obs.9: Os complementos algébricos de elementos consecutivos, dispostos quer em linha, quer em coluna, são alternadamente positivos e negativos. Por exemplo, consideremos a matriz $A\,(3\times 3)$, os sinais dos elementos do determinante associado são

$$|A|=\begin{vmatrix} \overset{+}{a_{11}} & \overset{-}{a_{12}} & \overset{+}{a_{13}} \\ \overset{-}{a_{21}} & \overset{+}{a_{22}} & \overset{-}{a_{23}} \\ \overset{+}{a_{31}} & \overset{-}{a_{32}} & \overset{+}{a_{33}} \end{vmatrix}$$

Exemplo7: Dado o determinante $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & -5 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -5 & 6 \\ -2 & -4 & 6 & 3 \end{vmatrix}$, calcule o complemento algébrico dos elementos da segunda linha.

Resolução: Genericamente, os elementos da segunda linha são: a_{21}, a_{22}, a_{23} e a_{24}.

$$C_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -5 & 6 \\ -4 & 6 & 3 \end{vmatrix}, C_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ -2 & 6 & 3 \end{vmatrix}; C_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ -2 & -4 & 3 \end{vmatrix}; C_{24}=(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -5 \\ -2 & -4 & 6 \end{vmatrix}.$$

Teorema2 (teorema de Laplace): O valor de um determinante $|A|$ é igual à soma dos produtos que se obtêm multiplicando os elementos de uma fila (linha ou coluna) pelos respectivos complementos algébricos.

Consideremos um determinante de ordem 3, $|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$. Aplicando a regra de Sarrus obtemos o valor do determinante

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}= \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}) \end{aligned},$$

ou seja,

$$|A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}C_{11} - a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

Obs.10: Qualquer que fosse a ordem do determinante e qualquer que fosse a linha ou coluna proceder-se-ia de igual modo.

Portanto, pelo teorema de Laplace, $|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij}$ considerando a i-ésima linha, ou $|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}C_{ij}$ considerando a j-ésima coluna.

Obs.11: A aplicação do teorema de Laplace baixa a ordem do determinante.

A aplicação sucessiva do teorema de Laplace permite-nos determinar o valor de um determinante de qualquer ordem. Trata-se porém de um processo bastante moroso, basta atender a que de um determinante de 5ª ordem se obtém 5 determinantes de 4ª ordem e consequentemente 20 determinantes de 3ª ordem. Este teorema é, contudo, muito útil quando o determinante contém uma linha ou uma coluna com vários zeros, pois podemos minimizar o número de complementos algébricos a calcular, escolhendo convenientemente a linha ou coluna a partir da pela qual calculamos o determinante. Assim, antes de aplicar o teorema de Laplace a um determinante de ordem n, uma hipótese é reduzir a zero $(n-1)$ elementos de uma fila, de acordo com as propriedades dos determinantes.

Exemplo8: Calcule do valor do determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & -1 \\ 4 & 4 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

Resolução: Aplicando o teorema de Laplace, como na 5ª linha já figuram 3 zeros, comecemos por reduzir o elemento $a_{54} = 3$ a zero (somamos a 3ª coluna à 4ª multiplicada por 3),

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 17 & 6 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 7 & -1 \\ 4 & 4 & 3 & 15 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{5+3}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 17 & 6 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 7 & -1 \\ 4 & 4 & 15 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 17 & 6 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 7 & -1 \\ 4 & 4 & 15 & 2 \end{vmatrix}.$$

Vamos, por exemplo, reduzir a zero os elementos da 1ª coluna abaixo de $a_{11} = 1$. Fixemos a 1ª linha e somamos à 2ª a 1ª multiplicada por (-2) e à 4ª a 1ª multiplicada por (-4), o que pelas propriedades dos determinantes não altera o seu valor,

$$|A| = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 17 & 6 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 7 & -1 \\ 4 & 4 & 15 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 17 & 6 \\ 0 & -6 & 31 & -7 \\ 0 & 2 & 7 & -1 \\ 0 & -8 & -53 & -22 \end{vmatrix} = -1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -6 & 31 & -7 \\ 2 & 7 & -1 \\ -8 & -53 & -22 \end{vmatrix}.$$

Fixemos, agora a 2 linha e vamos reduzir a zero os restantes elementos da 1ª coluna. Somamos à 1ª linha a 2ª multiplicada por 3, e à 3ª linha a 2ª multiplicada por 4,

$$|A| = -\begin{vmatrix} 0 & -10 & -10 \\ 2 & 7 & -1 \\ 0 & -25 & -26 \end{vmatrix} = -(-1)^{2+1}\times 2\begin{vmatrix} -10 & -10 \\ -25 & -26 \end{vmatrix} = 2(260-250) = 20.$$

Exercício2: Considere a matriz: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ -2 & 5 & -3 & 3 \end{bmatrix}$. Calcule o seu determinante utilizando:

a) O teorema de Laplace.
b) As propriedades dos determinantes.

Corolário1 (do teorema de Laplace): Se num determinante multiplicarmos os elementos de uma fila pelos correspondentes complementos algébricos de outra fila paralela, a soma obtida é nula.

Teorema3 (teorema de Laplace generalizado): Todo determinante é igual à soma algébrica dos produtos que se obtêm multiplicando todos os menores de ordem *p*, contidos em *p* filas paralelas, pelos correspondentes complementos algébricos.

Exercício3: Calcule o determinante do exemplo7 utilizando este resultado.

Exemplo9: Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

a) O produto $a_{23}a_{12}a_{31}a_{44}$ é um termo da matriz *A*? Justifique. Qual o seu sinal?

b) Calcule $|A|$ utilizando o desenvolvimento de Laplace ao longo da 2ª linha.

c) Seja $B_{(4\times4)}$, com $|B| = 12$. Calcule justificando, o determinante da matriz $(AB^{-1})^T$.

Resolução:

a) O produto $a_{23}a_{12}a_{31}a_{44}$ é um termo da matriz *A* porque é o produto de 4 elementos de *A*, com um e um só factor em cada linha e em cada coluna. Como num termo é irrelevante a ordem dos factores, vamos ordenar os factores por linhas $a_{23}a_{12}a_{31}a_{44} = a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$. O sinal do termo de uma matriz é dado por $(-1)^{\alpha}$, onde α é o número de inversões dos índices das colunas (como os índices das linhas coincidem com a permutação principal, o número de inversões dos índices das linhas é zero). No termo dado $\alpha = 1$ e portanto $(-1)^{\alpha} = -1$. O termo é negativo.

b) Aplicando o teorema de Laplace o longo da 2ª linha, obtém-se

$$|A| = +1\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -60.$$

c) O determinante da matriz $(AB^{-1})^T$ é dado por $|AB^{-1}|^T = |AB^{-1}| = |A||B^{-1}| = |A||B|^{-1}$. Como $|A| = -60$ (da alínea anterior) e $|B| = 12$ (por hipótese), obtém-se $|AB^{-1}|^T = |A||B|^{-1} -60 \times \dfrac{1}{12} = -5$.

2.8 Matriz Adjunta e matriz inversa

Apresenta-se nesta secção uma fórmula que permite calcular a inversa de uma matriz regular.

Definição8: Chama-se matriz adjunta, de uma matriz quadrada *A*, à transposta que dela se obtém substituindo cada elemento pelo respectivo complemento algébrico e representa-se por $\text{adj}(A) = \hat{A}$.

Simbolicamente, $A = [a_{ij}]_{(n\times n)} \Rightarrow \text{adj}(A) = [C_{ij}]^T_{(n\times n)} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}^T$,

onde $C_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$, sendo M_{ik} o menor complementar do elemento a_{ik}.

Vamos agora deduzir uma fórmula que permite calcular a inversa de uma matriz através da sua adjunta. Prova-se que $A \times \text{adj}(A) = \det(A) \times I$, donde

$$A^{-1} \times A \times \mathrm{adj}(A) = A^{-1} \times \det(A) \Rightarrow I \times \mathrm{adj}(A) = A^{-1} \times \det(A) \Rightarrow \mathrm{adj}(A) = A^{-1} \times \det(A)$$

e consequentemente, a inversa de uma matriz regular A é dada por:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{adj}(A).$$

Apesar da utilização da matriz adjunta ser razoável para inverter matrizes até ordem 3, o método da matriz ampliada é mais eficiente para matrizes de maior dimensão. Contudo, este último é apenas um procedimento, enquanto o método da matriz adjunta é uma fórmula para calcular a inversa de uma matriz. Esta fórmula é útil para a obtenção de algumas propriedades da matriz inversa, tais como:

i) Uma matriz triangular admite inversa se e só se a sua diagonal principal não incluir elementos nulos;
ii) A inversa de uma matriz regular triangular superior (inferior) é uma matriz triangular superior (inferior).

Exemplo10: Calcule a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$.

Resolução: Vamos utilizar a matriz adjunta para calcular A^{-1}. Primeiro convém verificar se a matriz admite inversa, $\det(A) = 64 \neq 0 \Rightarrow A$ é regular. Vamos, então, calcular a adjunta de A,

$$\mathrm{adj}(A) = [C_{ij}]^T_{(n\times n)} = \begin{bmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{adj}(A) = \frac{1}{64} \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{16} & \frac{1}{16} & \frac{3}{16} \\ \frac{3}{32} & \frac{1}{32} & -\frac{5}{32} \\ -\frac{4}{16} & \frac{4}{16} & \frac{4}{16} \end{bmatrix}$$

Exercício4: Determine, caso exista, a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 7 \end{bmatrix}$.

a) Pelo método da matriz adjunta.
b) Pelo método da matriz ampliada.

Índice